平成２４年度卒業研究概要

一次方程式定理と一次不定方程式に関するある問題

中等教育教員養成課程　数学専攻　柴山 敬二朗

正の整数 $a,\ b,\ c$ に対して，一次方程式定理により，$\gcd(a,\ b)=1$ ならば一次方程式 $ax+by=c$ は必ず整数解が存在する．しかしながら，正の整数解と限定した場合は解をもたないことがある．例えば，$3x+5y=7$ は整数解はもつが正の整数解はもたない．本論文では，右辺の定数項がどのような場合に一次方程式が正の整数解をもたないのかを考察する．

本論文の主結果は次である．

定理 2. $a,\ b$ を 2 以上の整数とし，$\gcd(a,\ b)=1$ とする．また，c を正の整数とし，$a\nmid c,\ b\nmid c$ とする．このとき，一次方程式 $ax+by=c$ が正の整数解 $(x,\ y)$ をもたない最大の c は

$$c=ab-(a+b)$$

である．

この定理は一次方程式定理を用いて証明される．

また，扱う一次方程式を二元から三元に拡張し，次の結果を得た．

定理 4. $a,\ b,\ c$ を $\gcd(a,\ b,\ c)=1$ を満たす正の整数とし，d を正の整数とする．また，$0\leq i\leq a-1$ に対して，

$$by+cz\equiv i\ (\mathrm{mod}\ a)$$

の負でない整数解の中で，$by+cz$ の値が最小となるものを $(y,\ z)=(y_i,\ z_i)$ とする．さらに，集合 A,B を

$$A:=\{(y_i,\ z_i)\,|\,0\leq i\leq a-1\},$$
$$B:=\{by_i+cz_i\,|\,(y_i,\ z_i)\in A\}$$

と定義し，B の最大元を by_i+cz_i とする．このとき，方程式 $ax+by+cz=d$ が負でない整数解 $(x,\ y,\ z)$ をもたない最大の d は

$$d=-a+by_i+cz_i$$

である．

定理 4 の d を，定理 2 のように定数 $a,\ b,\ c$ で表すことが今後の課題である．