On some inadmissible values of the Fourier coefficients of some cusp forms with level 1 or 2

後藤 新裕 (九州大学)

1 序論と主結果

Ramanujan の τ 関数は

$$x\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^{24}=\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)x^n$$

により定義される ($\tau(n)$ を $a_\Delta(n)$ と書くこともある). 各 $n\geq 1$ に対し, $\tau(n)$ は整数であることは明らかである. 複素数 z の虚部が正のとき $x=e^{2\pi iz}$ とおくと, これは重さ 12, レベル 1 の唯一つの newform Δ を定める. Ramanujan は多くの $\tau(n)$ の値を計算し, 次の予想を立てた:

Conjecture 1.1 (Ramanujan 予想, 1916 年)**.** Ramanujan の τ 関数は次を満たす:

(1) (乗法性) $\tau(nm)=\tau(n)\tau(m)$, ただし, $\gcd(n,m)=1$.

(2) (漸化式) $\tau(p^{m+1})=\tau(p)\tau(p^m)-p^{11}\tau(p^{m-1})$, p は素数, $m\geq 1$.

(3) (上界) $|\tau(p)|\leq 2p^{11/2}$, p は素数.

最初の二つ (1), (2) は 1917 年 Mordell [16] により証明された. 彼の証明では, ある作用素に関して Δ が固有関数であることを用いるものであった. その作用素は後に Hecke により一般化され「Hecke 作用素」とよばれるようになった. (3) は Deligne [8, 9] により Weil 予想の系として証明された.

1947 年, Lehmer は次の予想を立てた:すべての $n\geq 1$ に対して $\tau(n)\neq 0$ である. これは現在も未解決である. Lehmer はさらに, もし $\tau(n)=0$ となる n が存在すれば, そのような n で最小のものは素数であることを示した. その後 Serre により, $\tau(p)=0$ となる素数 p の集合が素数全体の中で自然密度 0 をもつことを示した (これは現在では, 以下で述べる佐藤-Tate 予想の系として理解できる).

一方この予想に一見相反するような佐藤-Tate 予想について述べる. $\tau(p)$ は実数 (実際には整数) なので, ある $0\leq\theta_p\leq\pi$ に対して

$$\tau(p)=2p^{11/2}\cos\theta_p$$

と書ける. 佐藤-Tate 予想とは, 任意の $0\leq\alpha<\beta\leq\pi$ に対して

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\#\{p\leq x\mid p:\text{素数},\ \alpha\leq\theta_p\leq\beta\}}{\#\{p\leq x\mid p:\text{素数}\}}=\frac{2}{\pi}\int_{\alpha}^{\beta}\sin^2\theta\,d\theta$$

が成り立つというものである. これは Barnett-Lamb, Geraghty, Harris, Taylor [5] によって解決された. したがって θ_p は $\pi/2$ 付近に分布しやすい. この記号を用いると, Lehmer の予想は $\theta_p\neq\pi/2$ が全ての素数 p で成り立つことに他ならない.

近年, Newton と Thorne は Δ(より一般に虚数乗法を持たない newform) のすべての $n \geq 1$ に対する n 次対称積 L 関数が保型的であるということを示した．この結果を用いて Thorner は佐藤-Tate 予想 (定理) の剰余項を決定した．すなわち, 任意の $0 \leq \alpha < \beta \leq \pi$ に対し,

$$\frac{\#\{p \leq x \mid p\text{:素数},\ \alpha \leq \theta_p \leq \beta\}}{\#\{p \leq x \mid p\text{:素数}\ \}} = \frac{2}{\pi}\int_\alpha^\beta \sin^2\theta d\theta + O\left(\frac{\log(12\log x)}{\sqrt{\log x}}\right),\ x \to \infty$$

である．さらに, これを用いて Gafni, Thorner, Wong [11] は, 密度 0 の素数集合 $S(\Delta)$ を除いて

$$|\tau(p)| > \frac{2p^{11/2}\log\log p}{\sqrt{\log p}}$$

のような下界が成り立つことを示し, 次の Atkin-Serre 予想が密度 1 の素数で成り立つことを示唆した．

Conjecture 1.2 (Atkin-Serre)**.** 任意の $\varepsilon > 0$ に対して定数 $c_\varepsilon, c'_\varepsilon > 0$ が存在し, すべての素数 $p > c'_\varepsilon$ に対して

$$|\tau(p)| \geq c_\varepsilon p^{9/2-\varepsilon}$$

が成り立つ．

上記の成果はいずれもブレイクスルーであるが, 個々の $\tau(n)$ の値については直接の情報を与えるわけではない．そこで近年, $\tau(n)$ の個別の値に注目した研究が進められている．特に, Lehmer 予想の変化版として, 0 以外の整数 a に対し

$$\tau(n) = a \tag{1.1}$$

となる n が存在するかどうかが研究されている．

まず, a が奇数の場合についての主な先行研究を述べる．Murty-Murty-Shorey [17] は任意の奇数 a に対して方程式 (1.1) を満たす n は有限個しか存在しないことを示した．Lygeros-Rozier [15] は $n > 1$ に対して

$$\tau(n) \neq \pm 1 \tag{1.2}$$

であることを示した．Balakrishnan, Ono, Craig, Tsai [2, 3] は 2022 年から 2023 年にかけて, (絶対値が素数になる) 整数で,

$$\pm3, \pm5, \pm7, \pm13, \pm17, -19, \pm23, \pm37, \pm691$$

が $\tau(n)$ の値とならないことを示した．また, Hanada-Madhukara [13] は 100 以下の合成数で,

$$-9, \pm15, \pm21, -25, -27, -33, \pm35, \pm45, \pm49, -55, \pm63, \pm77, -81, \pm91$$

が $\tau(n)$ の値とならないことを示した．Dembner-Jain [10] は $n > 1$ に対し,

$$\tau(n) \notin \{\pm\ell \mid \ell < 100, \text{奇素数}\ \} \cup \{\pm 5^m \mid m \geq 0\}$$

が $\tau(n)$ に値にはなり得ないことを示した．Bennett-Gherga-Patel-Siksek [6, Corollary 1.1 and Theorem 6] は $n > 1$ に対し,

$$\tau(n) \neq \pm\ell^a, 3^b5^c7^d11^e$$

を示した．ただし，ℓ は 100 未満の奇素数，a, b, c, d, e は 0 以上の整数である．Lin-Ma [14, Corollary 1.3] は $n > 1$ に対し，$\tau(n)$ が奇数ならば，

$$|\tau(n)| > |\tau(3)| = 252$$

であることを示した．

これらの結果はすべて奇数の場合であった．このことは次の合同式

$$\Delta(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} q^{(2n+1)^2} \bmod 2 \tag{1.3}$$

より，$\tau(n)$ が奇数であることと n が奇数の平方であることと同値であることに基づいている．この合同式 Jacobi の三重積の等式より直ちに従う．

一方で (1.1) における a が偶数の場合の結果もある．Balakrishnan-Ono-Tsai [4] は奇素数 $\ell < 100$ に対し，すべての $n \geq 1$ で

$$\tau(n) \notin \{\pm 2\ell\} \cup \{\pm 2\ell^2\} \cup \{\pm 2\ell^3 : \ell \neq 59\}$$

であることを示した．

さらに，$\tau(n)$ の素因数の個数に関する二つの結果があるので合わせて紹介しておく:

Theorem 1.3 ([3])**.** $n \geq 1$ が $p \mid \tau(p)$ (このような素数 p を non-ordinary という) を満たすような素数 p で割れないとき，

$$\Omega(\tau(n)) \geq \sum_{i=1}^{r} (\sigma_0(d_i) - 1) \geq \omega(n)$$

が成り立つ．ただし，$\sigma_0(m)(= \sum_{0<d|m} 1)$ は約数の個数，$\omega(m)$ は m の素因数の個数，$\Omega(m)$ は重複を含む素因数の総数を表すものとする．

Remark 1.4. 不等式

$$\Omega(\tau(n)) \geq \omega(n)$$

は non-ordinary な素数で割れる場合でも成り立つことに注意する．これは，τ の乗法性および (1.2) より容易に従う．

Proposition 1.5 ([3, Theorem 1.1])**.** $n \geq 1$ に対し，$\tau(n) = \pm\ell$ であるとする．ただし，ℓ は奇素数である．このとき，二つの奇素数 p, d を用いて，$n = p^{d-1}$ となり，d は $d \mid \ell(\ell^2 - 1)$ を満たす．

本研究では，上記の動機のもとで，τ 関数や重さ 8，レベル 2 の newform φ_8 の Fourier 係数の取り得ない値をさらに調べた．特に，奇素数 $\ell < \underline{1000}$ について $\pm\ell, \pm 2\ell, \pm 4\ell, \pm 8\ell$ の形の値が Fourier 係数として現れるかどうかについて考察し，ごく一部の例外を除いてこれらの値にはなり得ないことを示した:

定理 A (G. [12], 2024)**.** $n \geq 1$ に対し，

$$\tau(n) = \varepsilon t \ell$$

とする．ただし，奇素数 $\ell < 1000$，符号 $\varepsilon = \pm$ および $t \in \{1, 2, 4, 8\}$ である．このとき，次が成り立つ:

(a) (奇数) $t=1$ のとき, $n=p^4$ となる素数 p が存在し, $\ell \in L(\Delta)_1^{\varepsilon}$ となる.

(b) (偶数) $t \in \{2,4,8\}$ のとき, 次のいずれか一つのみが成り立つ:

(1) n 自身が素数であって, $\ell \in L(\Delta)_t^{\varepsilon}$ となる.

(2) n を一回のみ割る素数 p が存在して, $\tau(p)=2$ となる.

ただし,

$$\begin{aligned} L(\Delta)_1^+ &:= \{461\}, & L(\Delta)_1^- &:= \{599\}, \\ L(\Delta)_2^+ &:= \emptyset, & L(\Delta)_2^- &:= \{587\}, \\ L(\Delta)_4^+ &:= \{23,449,569,863\}, & L(\Delta)_4^- &:= \{241,397,811\}, \\ L(\Delta)_8^+ &:= \{457\}, & L(\Delta)_8^- &:= \{3,293,983\} \end{aligned}$$

である.

先行研究との比較のため, 定理 A から直ちに得られる次の系を述べておく:

Corollary 1.6. 次が成り立つ:

(a) (奇数)

$$\tau(n) \notin \{\pm\ell \mid \ell < 1000, \text{奇素数}\} \setminus \{461,-599\}$$

(b) (偶数) $t=2,4,8$ および $\varepsilon=\pm$ に対し,

$$\frac{\tau(n)}{\varepsilon t} = \ell \notin \{\ell \mid \ell < 1000, \text{奇素数}\} \setminus (L(\Delta)_t^{\varepsilon} \cup L(\Delta)_{t/2}^{\varepsilon} \cup \cdots).$$

ここで, 和集合は $t/2^k$ が $\varepsilon 1$ になるまでとるものとする.

実際に, Corollary 1.6 の (b) を得る議論を $\tau(n)=-4\ell$ の場合に行う. まず, 定理 A (b) より,

(1) n 自身が素数であって, $\ell \in L(\Delta)_4^-$ となる.

(2) n を一回のみ割る素数 p_1 が存在して, $\tau(p_1)=2$ となる.

のいずれか一つのみが成り立つ. この (2) の場合, τ の乗法性から, $\tau(n/p_1)=-2\ell$ であることが従う. このとき, 再び定理 A (b) より,

(2-1) n/p_1 が素数 p_2 であって, $\ell \in L(\Delta)_2^-$ となる.

(2-2) n/p_1 を一回のみ割る素数 p_2 が存在して, $\tau(p_2)=2$ となる.

のいずれか一つのみが成り立つ. この (2-2) の場合は, 同様に τ の乗法性から, $\tau(n/(p_1p_2))=-\ell$ である. ここで, 定理 A の (a) より, $n/(p_1p_2)=p_3^4$ となる素数 p_3 が存在し, $\tau(p_3^4)=-599$ となる. 以上をまとめると, $\tau(n)=-4\ell$ とすると, 素数 p,p_1,p_2,p_3 を用いて

$$n = \begin{cases} p & \text{s.t.} \ \ \tau(p)=-4\ell \text{ かつ } \ell \in L(\Delta)_4^- = \{241,397,811\}, \\ p_1p_2 & \text{s.t.} \ \ \tau(p_1)=2 \text{ かつ } \tau(p_2)=-2\ell \text{ かつ } \ell \in L(\Delta)_2^- = \{587\}, \\ p_1p_2p_3^4 & \text{s.t.} \ \ \tau(p_1)=\tau(p_2)=2 \text{ かつ } \tau(p_3^4)=-599 \end{cases}$$

の形となる. 従って, ℓ の可能性としては $L(\Delta)_4^- \cup L(\Delta)_2^- \cup L(\Delta)_1^- = \{241,397,587,599,811\}$ のみとなり, $t=4, \varepsilon=-$ のときの Corollary 1.6 の (b) を得る.

Remark 1.7. $\ell \in L(\Delta)_t^{\varepsilon}$ に対し, 実際に $\tau(n) = \varepsilon t\ell$ となる n が存在するかどうかはわからない. そのような n の存在が確認できているのは, $3 \in L(\Delta)_8^-$ のみである. ($\tau(2) = -24 = -8\cdot 3$.)

さらに, 重さ 8, レベル 2 の唯一つの newform φ_8 に関しても同様の結果を得た. φ_8 は Δ と同様に無限積表示

$$\varphi_8(z) := q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^8(1-q^{2n})^8, \quad q := e^{2\pi iz}$$

で定義される. また, この n 番目の Fourier 係数を $\tau_8(n)$ あるいは $a_{\varphi_8}(n)$ とする (前者は一般的な記号ではないかもしれない). このとき, 定理 A と同様に次が成り立つ:

定理 B (G., to appear)**.** $n \geq 1$ に対し,

$$\tau_8(n) = \varepsilon t\ell$$

とする. ただし, 奇素数 $\ell < 1000$, 符号 $\varepsilon = \pm$ および $t \in \{1, 2, 4, 8\}$ である. このとき, 次が成り立つ:

(a) (奇数) $t = 1$ のとき, $n = p^{d-1}$ となる素数 p が存在し, $(\ell, d) \in LD(\varphi_8)_1^{\varepsilon}$ となる.

(b) (偶数) $t \in \{2, 4, 8\}$ のとき, 次のいずれか一つのみが成り立つ:

(1) n 自身が素数であって, $\ell \in L(\varphi_8)_t^{\varepsilon}$ となる.

(2) n を一回のみ割る素数 p が存在して, $\tau_8(p) = 2, -4$ となる.

ただし,

$$\begin{aligned}
LD(\varphi_8)_1^+ &:= \{(\ell, d) \mid d \in C(\ell) \setminus \{7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37\}\},\\
LD(\varphi_8)_1^- &:= \{(\ell, d) \mid d \in C(-\ell) \setminus \{7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37\}\},\\
L(\varphi_8)_2^+ &:= \{3, 13, 31, 43, 61, 73, 103, 151, 163, 181, 193, 211, 223, 241, 271, 283, 313, 331,\\
&\qquad 373, 421, 433, 463, 523, 541, 571, 601, 613, 631, 643, 661, 673, 691, 733, 751,\\
&\qquad 811, 823, 853, 883, 991\},\\
L(\varphi_8)_2^- &:= \{7, 31, 37, 61, 67, 97, 127, 151, 157, 181, 211, 241, 271, 277, 307, 331, 337, 367,\\
&\qquad 397, 421, 457, 487, 541, 547, 571, 577, 601, 607, 631, 661, 691, 727, 751, 757,\\
&\qquad 787, 811, 877, 907, 937, 967, 991, 997\},\\
L(\varphi_8)_4^+ &:= \{3, 5, 23, 29, 53, 59, 83, 89, 113, 149, 173, 179, 233, 239, 263, 269, 293, 353, 359,\\
&\qquad 383, 389, 419, 443, 449, 479, 503, 509, 563, 569, 593, 599, 653, 659, 683, 719,\\
&\qquad 743, 773, 809, 839, 863, 929, 953, 983\},\\
L(\varphi_8)_4^- &:= \{7, 31, 37, 61, 67, 97, 127, 151, 157, 181, 211, 241, 271, 277, 307, 331, 337, 367,\\
&\qquad 397, 421, 457, 487, 541, 547, 571, 577, 601, 607, 631, 661, 691, 727, 751, 757,\\
&\qquad 787, 811, 877, 907, 937, 967, 991, 997\},\\
L(\varphi_8)_8^+ &:= \{7, 19, 37, 67, 79, 97, 109, 127, 139, 157, 199, 229, 277, 307, 337, 349, 367, 379,\\
&\qquad 397, 409, 439, 457, 487, 499, 547, 577, 607, 619, 709, 727, 739, 757, 769, 787,\\
&\qquad 829, 859, 877, 907, 919, 937, 967, 997\},\\
L(\varphi_8)_8^- &:= \{3, 5, 11, 23, 41, 53, 71, 83, 101, 113, 131, 173, 191, 233, 251, 263, 281, 293, 311,
\end{aligned}$$

$353, 383, 401, 431, 443, 461, 491, 503, 521, 563, 593, 641, 653, 683, 701, 743,$
$761, 773, 821, 863, 881, 911, 941, 953, 971, 983\}$

であり, $C(\pm\ell)$ は $d \mid (\ell^2-1)$ を満たすような奇素数 d であって, Lemma 4.1 (1) に現れる合同式をすべて満たすもので構成される集合である.

証明のおおまかな流れは次の通りである:

- newform $f=\Delta$ あるいは φ_8 に対し, $a_f(n)=\varepsilon t\ell$ とし, 乗法性などを利用して, n が素数べき $p^{d-1}, d \geq 1$ の場合に帰着する.
- newform の Fourier 係数が素数冪に対して Lucas 数列を成すことを利用し, d が小さい (有限個に絞られる) ことを示す (これにより Bilu-Hanrot-Voutier [7], Abouzaid [1] の結果などが使える). このステップの詳細は 2 章で扱う.
- Ramanujan の合同式を適用して d の候補を絞る.
- Thue 方程式の解法や Dembner-Jain の手法により残る有限個の場合を個別に処理する.

2 Lucas 数列

Lucas 対とは, 代数的整数の組 (α, β) であって, $\alpha+\beta$ および $\alpha\beta$ が 0 でない互いに素な整数であり, さらに α/β が 1 の冪根でないときをいう. Lucas 対 (α, β) に対して, 次のように定義される数列

$$u_n(\alpha, \beta) := \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}, \quad n \geq 1$$

を, その Lucas 対に対応する *Lucas* 数列と呼ぶ. Lucas 数列 $\{u_n(\alpha, \beta)\}_{n=1}^{\infty}$ は次の性質を満たす:

(1) $u_1(\alpha, \beta) = 1$,

(2) すべての $n \geq 1$ に対して

$$u_{n+1}(\alpha, \beta) = (\alpha+\beta)u_n(\alpha, \beta) - \alpha\beta\, u_{n-1}(\alpha, \beta)$$

が成り立つ.

例えば, $\alpha = (1+\sqrt{5})/2$ および $\beta = (1-\sqrt{5})/2$ とすれば, 対応する Lucas 数列 $\{u_n(\alpha, \beta)\}_{n=1}^{\infty}$ は Fibonacci 数列に一致する.

Lucas 対 (α, β) を固定し, 対応する数列 $\{u_n(\alpha, \beta)\}_{n=1}^{\infty}$ を考える. 素数 p が $u_n(\alpha, \beta)$ を割り, かつ p が $(\alpha-\beta)^2 u_1 \cdots u_{n-1}$ を割らないとき, p を u_n の原始的素因数 (primitive prime divisor) と呼ぶ. $n > 2$ で, $u_n(\alpha, \beta)$ がいかなる原始的素因数も持たない場合, $u_n(\alpha, \beta)$ を *defective term* という. 例として, Fibonacci 数列の場合,

$$1, 1, 2, 3, \underline{5}, \underline{8}, 13, 21, 34, 55, 89, \underline{144}, \ldots$$

において, 下線を付した項が defective term である.

Lucas 数列の理論における古典的な問題は次の通りである:

問題. すべての defective term を分類せよ.

この問題は Bilu-Hanrot-Voutier [7] および Abouzaid [1] によって完全に解決された. その結果, Lucas 数列の defective term は完全に分類されている.

2.1 Hecke 固有形式から得られる Lucas 数列

$k \geq 4$ を偶数とし, $f \in M_k(\Gamma_0(N))$ を整数の Fourier 係数をもつ newform とする．ただし, $M_k(\Gamma_0(N))$ は重さ k の $\Gamma_0(N)$ 上のモジュラー形式のなす空間を表すものとする．素数 p が $a_f(p)N$ を割らないとき, 数列 $\{a_f(p^{n-1})\}_{n=1}^{\infty}$ は Lucas 数列をなす．実際, 次の多項式の根を α, β とする:

$$X^2 - a_f(p)X + p^{k-1} = (X-\alpha)(X-\beta).$$

このとき, (α, β) が Lucas 対であることがわかり, すべての $n \geq 1$ について

$$a_f(p^{n-1}) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

が成り立つ.

Proposition 2.1. 素数 p は ordinary であるとする．すなわち, $p \nmid \tau(p)$ である．次の整係数多項式

$$X^2 - \tau(p)X + p^{11} = (X-\alpha)(X-\beta)$$

の根を α, β とする．このとき, すべての $i \geq 1$ について

$$u_i(\alpha, \beta) = \tau(p^{i-1})$$

が成り立ち, 数列 $\{u_i(\alpha, \beta)\}$ は次の性質を満たす:

(1) ([2, Lemma 2.1]) $n > 2$ のとき, $u_n(\alpha, \beta) \neq \pm 1$ である．もし

$$u_n(\alpha, \beta) \in \{\pm \ell \mid \ell \text{ は奇素数 }\}$$

ならば, $u_n(\alpha, \beta)$ は原始的素因数を持つ (defective term ではない).

(2) ([4, Lemma 2.1]) $n > 2$ のとき, もし

$$u_n(\alpha, \beta) \in \{\pm 2\ell^j \mid \ell \text{ は奇素数},\ j \geq 0\}$$

ならば, $u_n(\alpha, \beta)$ は原始的素因数を持つ.

(3) ([12, Proposition 2.10]) $n > 2$ のとき, もし

$$u_n(\alpha, \beta) \in \{\pm 4\ell^j,\ \pm 8\ell^j \mid \ell \text{ は奇素数},\ j \geq 0\}$$

ならば, $u_n(\alpha, \beta)$ は原始的素因数を持つ.

Proposition 2.2. 素数 p を $p \nmid \tau_8(p)$ を満たすものとし, 次の整係数多項式

$$X^2 - \tau_8(p)X + p^7 = (X-\alpha)(X-\beta)$$

の根を α, β とする．このとき, すべての $i \geq 1$ について

$$u_i(\alpha, \beta) = \tau_8(p^{i-1})$$

が成り立ち, 数列 $\{u_i(\alpha, \beta)\}_{i=1}^{\infty}$ は次の性質を満たす:

(1) $n > 2$ のとき, $u_n(\alpha, \beta) \neq \pm 1$ である. もし

$$u_n(\alpha, \beta) \in \{\pm \ell \mid \ell \text{ は } \underline{10000} \text{ 未満の奇素数 }\}$$

ならば, $u_n(\alpha, \beta)$ は原始的素因数 (すなわち ℓ) を持つ.

(2) ([4, Lemma 2.1]) $n > 2$ のとき, もし

$$u_n(\alpha, \beta) \in \{\pm 2\ell^j \mid \ell \text{ は奇素数},\ j \geq 0\}$$

ならば, $u_n(\alpha, \beta)$ は原始的素因数を持つ.

(3) $n > 2$ のとき, もし

$$u_n(\alpha, \beta) \in \{\pm 4\ell^j,\ \pm 8\ell^j \mid \ell \text{ は奇素数},\ j \geq 0\}$$

ならば, $u_n(\alpha, \beta)$ は原始的素因数を持つ.

3 その他の手法

3.1 節で紹介する Thue 方程式は方程式 (1.1) における a が奇数のときに有効なものである. 以下では簡単のため, 主に τ 関数の場合について述べることにする. 他にも Dembner-Jain による方法もあるが, 講演中に扱ったのでここでは省略する. 詳細は, [10] を見ていただきたい.

3.1 Thue 方程式

$a = \pm \ell$ の場合を考える. このとき次の方程式を考える:

$$\tau(p^{d-1}) = \pm \ell.$$

命題 1.5 により, (奇素数) d の取り得る値は有限個しかない. そのような各 d について, 合同式 (補題 4.1) を適用することで, 多くの (ℓ, d) の組を排除することができる. 合同式によって (ℓ, d) を排除できない場合には, 一つ一つの場合について Thue 方程式を解くことに帰着させる.

$F(X, Y)$ を次数 ≥ 3 の斉次多項式, $a \in \mathbb{Z}$ とする. 次の形の方程式

$$F(X, Y) = a$$

を *Thue* 方程式と呼ぶ.

Δ 関数の L-関数の Euler 積展開は

$$L(s, \Delta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s} = \prod_{p:\text{prime}} \frac{1}{1 - \tau(p)p^{-s} + p^{11}p^{-2s}},$$

と書ける. これと比較し, 次のように定義する:

$$\frac{1}{1 - \sqrt{Y}T + XT^2} = \sum_{m=0}^{\infty} F_m(X, Y)T^m = 1 + \sqrt{Y}T + (Y - X)T^2 + \cdots.$$

すると, 簡単な計算により, 非負整数 m に対して, $F_{2m}, F_{2m+1}/\sqrt{Y} \in \mathbb{Z}[X,Y]$ は次数 m の斉次多項式であり,

$$\tau(p^{2m}) = F_{2m}(p^{11}, \tau(p)^2)$$

が成り立つ. その最初のいくつかは次の通りである:

$$F_1(X,Y) = \sqrt{Y}, \quad F_2(X,Y) = Y - X,$$
$$F_3(X,Y) = \sqrt{Y}(Y-2X), \quad F_4(X,Y) = X^2 - 3XY + Y^2, \ldots.$$

Proposition 3.1 ([3, Lemma 5.1])**.** $(k,N,f) = (12,1,\Delta)$ あるいは $(8,2,\varphi_8)$ とし, p を $p \nmid N$ を満たす素数とする. もし, $a_f(p^4) = a$ ならば, $(x,y) = (p, 2a_f(p)^2 - 3p^{k-1})$ は次の方程式の整数解である:

$$y^2 = 5x^{2(k-1)} + 4a.$$

PARI/GP を用いた計算により, $d > 5$ の場合, Thue 方程式

$$F_{d-1}(X,Y) = \pm\ell$$

が $(X,Y) = (p^{11}, \tau(p)^2)$ の形の解をもつか否かを判定することができる.

Lemma 3.2. p を素数とする. もし, $(\ell,d) \in LD_1^{\varepsilon}$ ならば,

$$\tau(p^{d-1}) \neq \varepsilon\ell$$

が成り立つ. ただし,

$$LD_1^{+} := \{(277,23),(421,7),(631,79),(827,23),(827,59),(967,7),(967,11),(967,23)\},$$
$$LD_1^{-} := \{(367,23),(443,17),(643,23),(643,107),(827,59),(829,23),(829,83),(919,17)\}.$$

4 合同式

Lemma 4.1. f を Δ および φ_8 のいずれかとし, d を正の奇数とする.

(1) 奇素数 p に対し, 次のような合同式が成り立つ:

$$a_f(p^{d-1}) \underset{(3)}{\equiv} 0, 1, d,$$

$$a_f(p^{d-1}) \underset{(16)}{\equiv} \begin{cases} 1 & \text{if } d \equiv 1 \bmod 16, \\ 1,3,5,7,9,11,13,15 & \text{if } d \equiv 3,7,11,15 \bmod 16, \\ 1,5,9,13 & \text{if } d \equiv 5,13 \bmod 16, \\ 1,9 & \text{if } d \equiv 9 \bmod 16, \end{cases}$$

$$a_f(p^{d-1}) \underset{(5)}{\equiv} \begin{cases} 0,1,d & \text{if } d \underset{(4)}{\equiv} 1, \\ 0,1,2,3,d & \text{if } d \underset{(4)}{\equiv} 3. \end{cases}$$

(2) さらに $f=\Delta$ ならば,

$$a_\Delta(p^{d-1}) = \tau(p^{d-1}) \underset{(7)}{\equiv} \begin{cases} 0,1,d & \text{if } d \underset{(6)}{\equiv} 1, \\ 0,1,2,4,d,2d,4d & \text{if } d \underset{(6)}{\equiv} 3,5, \end{cases}$$

$$a_\Delta(p^{d-1}) = \tau(p^{d-1}) \underset{(23)}{\equiv} \begin{cases} 1,d & \text{if } d \underset{(6)}{\equiv} 1, \\ 0,1,d & \text{if } d \underset{(6)}{\equiv} 3, \\ 1,-1,d & \text{if } d \underset{(6)}{\equiv} 5 \end{cases}$$

が ($p=2$ も許し) 任意の素数 p について成り立つ.

Lemma 4.2. f を Δ および φ_8 のいずれかとし, d を正の偶数とする.

(1) 奇素数 p に対し, 次のような合同式が成り立つ:

$$a_f(p^{d-1}) \underset{(3)}{\equiv} 0,d,$$

$$a_f(p^{d-1}) \underset{(16)}{\equiv} \begin{cases} 0,2,4,6,8,10,12,14 & \text{if } d \equiv 2,6,10,14 \bmod 16, \\ 0,4,8,12 & \text{if } d \equiv 4,12 \bmod 16, \\ 0,8 & \text{if } d \equiv 8 \bmod 16, \end{cases}$$

$$a_f(p^{d-1}) \underset{(5)}{\equiv} \begin{cases} 0,d & \text{if } d \underset{(4)}{\equiv} 0, \\ 0,1,2,d & \text{if } d \underset{(4)}{\equiv} 2. \end{cases}$$

(2) さらに $f=\Delta$ ならば,

$$a_\Delta(p^{d-1}) = \tau(p^{d-1}) \underset{(7)}{\equiv} \begin{cases} 0,d,2d,4d & \text{if } d \underset{(6)}{\equiv} 0,2, \\ 0,d & \text{if } d \underset{(6)}{\equiv} 4 \end{cases}$$

が ($p=2$ も許し) 任意の素数 p について成り立ち,

$$a_\Delta(p^{d-1}) = \tau(p^{d-1}) \underset{(23)}{\equiv} \begin{cases} 0,d & \text{if } d \underset{(6)}{\equiv} 0, \\ 0,-1,d & \text{if } d \underset{(6)}{\equiv} 2, \\ 0,1,d & \text{if } d \underset{(6)}{\equiv} 4 \end{cases}$$

が素数 $p \neq 23$ について成り立つ. $p=23$ のときは, すべての整数 $d \geq 1$ について $\tau(p^{d-1}) \underset{(23)}{\equiv} 1$ である.

5 証明の概略

講演では $\tau(n)=-101$ という方程式に解が存在しないことを示した. ここでは, 偶数の場合である

$$\tau(n) = -4 \cdot 101$$

とし, すなわち, $\varepsilon=-, t=4, \ell=101$ のときに, 定理 A の (b) が成り立つことを示そう.

Proof. τ の乗法性, $\tau(n) \neq \pm 1, n > 1$ より, n の素因数の個数は 3 以下である. また, $\tau(p^k)$ が $\pm 2^j, j = 1, 2, 3$ となるならば, $k = 1$ かつ $\pm 2^j = 2$ でなければならないことが合同式 (4 章) や τ 関数の満たす漸化式 (Ramanujan 予想 (2)) からわかる. このことから, n の素因数の個数が 2 または 3 であれば, n を一回のみ割る素数 p が存在し, $\tau(p) = 2$ であることが従う.

n の素因数が p のみであるとすると, $n = p^{d-1}$, $d > 1$ とかける. ここで, p が ordinary であることが τ 関数の満たす漸化式を用いることでわかる. 従って, $\{\tau(p^{i-1})\}_{i=1}^{\infty}$ は Lucas 数列をなす.

Proposition 2.1 より, $\tau(p^{d-1})$ は原始的素因数 q を持つ. 再び, τ 関数の満たす漸化式を用いれば, p は奇素数であることがわかり, (1.3) より, d は偶数でなければならない. ここで, $d > 2$ とする. $q = 2$ なら, $2 \nmid \tau(p)$ でなければならないが, これは (1.3) に矛盾する. $q = 101$ ならば, $101 \nmid \tau(p) \cdot \tau(p^{d-1})$ である. $m = d/2$ とすると, Lucas 数列の事実

$$n \mid m \Longrightarrow u_n \mid u_m$$

から, $\tau(p^{m-1}) \mid \tau(p^{d-1}) = -4 \cdot 101$ がわかる. $\tau(p^{m-1}) \mid -4$ となり, 上で行った議論より, $m = 2$, $\tau(p) = 2$ とならなければならない. このとき, $d = 2m = 4$ であるから, $-4 \cdot 101 = \tau(p^{d-1}) = \tau(p^3) = \tau(p)(\tau(p)^2 - 2p^{11}) = 2(4 - 2p^{11})$ となるが, このような奇素数 p は存在しない. よって, $d = 2$ でなければならない. □

6 表

次の表では, 各奇素数 $\ell < 1000$ に対して, $\ell^2 - 1$ を割る奇素数 d を第 2 列に示す. 第 3 列 (resp. 第 4 列) には, $a_f(p^{d-1}) = \ell$ (resp. $a_f(p^{d-1}) = -\ell$) の場合に補題 4.1 の合同式条件 (1) を満たす値を示している. アスタリスク $(*)$ は, $\tau(p^{d-1}) = \pm\ell$ に対する補題 4.1 の条件 (2) も同時に満たされていることを示す.

表 1: congruence

ℓ	$d \mid (\ell^2 - 1)$	$C(\ell)$	$C(-\ell)$
3	[]	[]	[]
5	[3]	[]	[3]
7	[3]	[3]	[]
11	[3, 5]	[]	[]
13	[3, 7]	[3, 7]	[]
17	[3]	[]	[3]
19	[3, 5]	[]	[5]
23	[3, 11]	[11]	[3*, 11]
29	[3, 5, 7]	[]	[3, 7]
31	[3, 5]	[3]	[]
37	[3, 19]	[3, 19]	[]
41	[3, 5, 7]	[5]	[]
43	[3, 7, 11]	[3, 7, 11]	[11]
47	[3, 23]	[23]	[3, 23*]

ℓ	$d \mid (\ell^2-1)$	$C(\ell)$	$C(-\ell)$
53	[3, 13]	[]	[3]
59	[3, 5, 29]	[]	[3, 5, 29]
61	[3, 5, 31]	[3, 5, 31]	[]
67	[3, 11, 17]	[3, 11]	[11]
71	[3, 5, 7]	[]	[]
73	[3, 37]	[3]	[]
79	[3, 5, 13]	[]	[5]
83	[3, 7, 41]	[]	[3, 7]
89	[3, 5, 11]	[]	[3^*, 11]
97	[3, 7]	[3, 7]	[]
101	[3, 5, 17]	[5]	[]
103	[3, 13, 17]	[3]	[]
107	[3, 53]	[]	[3, 53]
109	[3, 5, 11]	[]	[11]
113	[3, 7, 19]	[]	[3, 7, 19]
127	[3, 7]	[3, 7]	[]
131	[3, 5, 11, 13]	[11]	[]
137	[3, 17, 23]	[23^*]	[3^*, 23]
139	[3, 5, 7, 23]	[]	[5^*, 23^*]
149	[3, 5, 37]	[]	[3]
151	[3, 5, 19]	[3, 19]	[]
157	[3, 13, 79]	[3, 79]	[]
163	[3, 41]	[3]	[]
167	[3, 7, 83]	[83]	[3, 7, 83]
173	[3, 29, 43]	[]	[3, 43]
179	[3, 5, 89]	[]	[3, 5^*]
181	[3, 5, 7, 13]	[3, 5, 7, 13]	[]
191	[3, 5, 19]	[]	[19]
193	[3, 97]	[3]	[]
197	[3, 7, 11]	[11]	[3, 7, 11]
199	[3, 5, 11]	[]	[5, 11]
211	[3, 5, 7, 53]	[3, 7]	[]
223	[3, 7, 37]	[3, 7]	[]
227	[3, 19, 113]	[]	[3^*, 19]
229	[3, 5, 19, 23]	[19]	[23^*]
233	[3, 13, 29]	[]	[3]
239	[3, 5, 7, 17]	[]	[3, 5, 7, 17]
241	[3, 5, 11]	[3, 5, 11]	[]
251	[3, 5, 7]	[]	[]
257	[3, 43]	[]	[3, 43]
263	[3, 11, 131]	[11, 131]	[3, 11, 131]

ℓ	$d \mid (\ell^2-1)$	$C(\ell)$	$C(-\ell)$
269	[3, 5, 67]	[]	$[3, 67]$
271	[3, 5, 17]	$[3]$	[]
277	[3, 23, 139]	$[3^*, 23^*, 139]$	$[23]$
281	[3, 5, 7, 47]	$[5^*, 47]$	[]
283	[3, 47, 71]	$[3, 47, 71]$	$[47, 71]$
293	[3, 7, 73]	[]	$[3, 7]$
307	[3, 7, 11, 17]	$[3, 7, 11]$	$[11]$
311	[3, 5, 13, 31]	[]	[]
313	[3, 13, 157]	$[3, 13]$	[]
317	[3, 53, 79]	[]	$[3, 79]$
331	[3, 5, 11, 83]	$[3, 11, 83]$	[]
337	[3, 7, 13]	$[3, 7]$	[]
347	[3, 29, 173]	[]	$[3, 173]$
349	[3, 5, 7, 29]	$[29]$	[]
353	[3, 11, 59]	$[11, 59]$	$[3, 11, 59]$
359	[3, 5, 179]	$[179]$	$[3, 5, 179]$
367	[3, 23, 61]	$[3, 23]$	$[23^*]$
373	[3, 11, 17, 31]	$[3, 11, 31]$	$[11]$
379	[3, 5, 7, 19]	$[19]$	$[5]$
383	[3, 191]	$[191]$	$[3, 191]$
389	[3, 5, 13, 97]	[]	$[3]$
397	[3, 11, 199]	$[3, 11, 199]$	$[11]$
401	[3, 5, 67]	$[5]$	[]
409	[3, 5, 17, 41]	[]	[]
419	[3, 5, 7, 11, 19]	[]	$[3, 5, 7, 11, 19]$
421	[3, 5, 7, 211]	$[3, 5, 7^*, 211]$	[]
431	[3, 5, 43]	[]	[]
433	[3, 7, 31]	$[3, 7, 31]$	[]
439	[3, 5, 11, 73]	[]	$[5, 11]$
443	[3, 13, 17, 37]	[]	$[3, 37]$
449	[3, 5, 7]	[]	$[3, 7]$
457	[3, 19, 229]	$[3, 19]$	[]
461	[3, 5, 7, 11, 23]	$[5^*, 11, 23]$	[]
463	[3, 7, 11, 29]	$[3^*, 7, 11]$	$[11]$
467	[3, 13, 233]	[]	$[3, 13]$
479	[3, 5, 239]	$[239]$	$[3, 5, 239]$
487	[3, 61]	$[3]$	[]
491	[3, 5, 7, 41]	[]	[]
499	[3, 5, 83]	[]	$[5, 83]$
503	[3, 7, 251]	$[251]$	$[3^*, 7, 251]$
509	[3, 5, 17, 127]	[]	$[3, 127]$

ℓ	$d \mid (\ell^2 - 1)$	$C(\ell)$	$C(-\ell)$
521	[3, 5, 13, 29]	$[5, 29]$	$[]$
523	[3, 29, 131]	$[3, 131]$	$[131]$
541	[3, 5, 271]	$[3, 5, 271]$	$[]$
547	[3, 7, 13, 137]	$[3, 7]$	$[]$
557	[3, 31, 139]	$[]$	$[3, 31, 139]$
563	[3, 47, 281]	$[47]$	$[3, 47]$
569	[3, 5, 19, 71]	$[]$	$[3, 19, 71]$
571	[3, 5, 11, 13, 19]	$[3, 11, 19]$	$[]$
577	[3, 17]	$[3, 17]$	$[]$
587	[3, 7, 293]	$[]$	$[3, 7, 293]$
593	[3, 11, 37]	$[11]$	$[3, 11]$
599	[3, 5, 13, 23]	$[]$	$[3, 5^*, 13, 23]$
601	[3, 5, 7, 43]	$[3^*, 5, 7, 43]$	$[]$
607	[3, 19, 101]	$[3, 19]$	$[]$
613	[3, 17, 307]	$[3, 307]$	$[]$
617	[3, 7, 11, 103]	$[11]$	$[3, 7, 11, 103]$
619	[3, 5, 31, 103]	$[]$	$[5]$
631	[3, 5, 7, 79]	$[3, 7, 79^*]$	$[]$
641	[3, 5, 107]	$[5, 107]$	$[]$
643	[3, 7, 23, 107]	$[3, 7, 23, 107]$	$[23^*, 107^*]$
647	[3, 17, 19]	$[]$	$[3, 19]$
653	[3, 109, 163]	$[]$	$[3, 163]$
659	[3, 5, 7, 11, 47]	$[]$	$[3, 5, 7, 11, 47]$
661	[3, 5, 11, 331]	$[3, 5, 11, 331]$	$[]$
673	[3, 7, 337]	$[3, 7]$	$[]$
677	[3, 13, 113]	$[]$	$[3]$
683	[3, 11, 19, 31]	$[11]$	$[3, 11, 19, 31]$
691	[3, 5, 23, 173]	$[3^*, 23]$	$[]$
701	[3, 5, 7, 13]	$[5]$	$[]$
709	[3, 5, 59, 71]	$[59]$	$[59, 71]$
719	[3, 5, 359]	$[359]$	$[3, 5, 359]$
727	[3, 7, 11, 13]	$[3, 7, 11]$	$[11]$
733	[3, 61, 367]	$[3, 367]$	$[]$
739	[3, 5, 37, 41]	$[]$	$[5]$
743	[3, 7, 31, 53]	$[]$	$[3, 7, 31]$
751	[3, 5, 47]	$[3, 47]$	$[]$
757	[3, 7, 379]	$[3, 7, 379]$	$[]$
761	[3, 5, 19, 127]	$[5]$	$[19]$
769	[3, 5, 7, 11]	$[]$	$[11]$
773	[3, 43, 193]	$[]$	$[3, 43]$
787	[3, 131, 197]	$[3, 131]$	$[131]$

ℓ	$d \mid (\ell^2-1)$	$C(\ell)$	$C(-\ell)$
797	[3, 7, 19, 199]	[]	$[3, 7, 19, 199]$
809	[3, 5, 101]	[]	$[3]$
811	[3, 5, 7, 29]	$[3, 7]$	$[29]$
821	[3, 5, 41, 137]	$[5]$	[]
823	[3, 103, 137]	$[3, 103]$	$[137]$
827	[3, 7, 23, 59]	$[23^*, 59^*]$	$[3^*, 7, 23, 59^*]$
829	[3, 5, 23, 83]	[]	$[23^*, 83^*]$
839	[3, 5, 7, 419]	$[419]$	$[3, 5, 7, 419]$
853	[3, 7, 61, 71]	$[3, 7, 71]$	$[71]$
857	[3, 11, 13, 107]	$[11, 107]$	$[3, 11, 107]$
859	[3, 5, 11, 13, 43]	[]	$[5, 11]$
863	[3, 431]	$[431]$	$[3, 431]$
877	[3, 73, 439]	$[3^*, 439]$	[]
881	[3, 5, 7, 11]	$[5, 11]$	[]
883	[3, 7, 13, 17]	$[3, 7]$	[]
887	[3, 37, 443]	$[443]$	$[3, 443]$
907	[3, 151, 227]	$[3, 151, 227]$	$[227]$
911	[3, 5, 7, 13, 19]	[]	$[19]$
919	[3, 5, 17, 23]	[]	$[5^*, 23]$
929	[3, 5, 29, 31]	$[29]$	$[3, 31]$
937	[3, 7, 13, 67]	$[3, 7, 67]$	[]
941	$[3, 5, 47, 157]$	$[5, 47]$	[]
947	$[3, 11, 43, 79]$	$[11]$	$[3, 11, 43, 79]$
953	$[3, 7, 17, 53]$	$[53]$	$[3, 7]$
967	$[3, 7, 11, 23]$	$[3^*, 7^*, 11^*, 23^*]$	$[11, 23]$
971	$[3, 5, 97]$	[]	[]
977	$[3, 61, 163]$	[]	$[3, 163]$
983	$[3, 41, 491]$	$[491]$	$[3, 491]$
991	$[3, 5, 11, 31]$	$[3, 11, 31]$	[]
997	$[3, 83, 499]$	$[3, 83, 499]$	$[83]$

参考文献

[1] Mourad Abouzaid, Les nombres de Lucas et Lehmer sans diviseur primitif, J. Theor. Nombres Bordeaux **18** (2006), no. 2, 299–313.

[2] J. S. Balakrishnan, W. Craig and K. Ono, Variations of Lehmer's conjecture for Ramanujan's tau-function, J. Number Theory **237** (2022), 3–14.

[3] J. S. Balakrishnan, W. Craig, K. Ono and W.-L. Tsai, Variants of Lehmer's speculation for newforms, Adv. Math. **428** (2023), 109141.

[4] J. S. Balakrishnan, K. Ono and W.-L. Tsai, Even values of Ramanujan's tau-function, Matematica **1** (2022), no. 2, 395–403.

[5] T. Barnet-Lamb, D. Geraghty, M. Harris and R. Taylor, A family of Calabi-Yau varieties and potential automorphy. II, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **47** (2011), no. 1, 29–98.

[6] M. A. Bennett, A. Gherga, V. Patel and S. Siksek, Odd values of the Ramanujan tau function, Math. Ann. **382** (2022), no. 1-2, 203–238.

[7] Y. Bilu, G. Hanrot, and P. M. Voutier, Existence of primitive divisors of Lucas and Lehmer numbers, J. Reine Angew. Math. **539** (2001), 75–122.

[8] P. Deligne, La conjecture de Weil. I, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **43** (1974), 273–307.

[9] P. Deligne, La conjecture de Weil. II, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **52** (1980), 137–252.

[10] S. Dembner and V. Jain, Hyperelliptic curves and newform coefficients, J. Number Theory **225** (2021), 214–239.

[11] A. Gafni, J. Thorner and P.-J. Wong, Almost all primes satisfy the Atkin-Serre conjecture and are not extremal, Res. Math. Sci. **7** (2021), no. 2, Paper No. 31, 5 pp.

[12] A. Goto, On some values which do not belong to the image of Ramanujan's tau-function, preprint, arXiv:2405.16723v1.

[13] M. Hanada and R. Madhukara, Fourier coefficients of level 1 Hecke eigenforms, Acta Arith. **200** (2021), no. 4, 371–388.

[14] W. Lin and W. Ma, On values of Ramanujan's tau function involving two prime factors, Ramanujan J. **63** (2024), no. 1, 131–155.

[15] N. Lygeros and O. Rozier, Odd prime values of the Ramanujan tau function. Ramanujan J. **32** (2013), no. 2, 269–280.

[16] L. J. Mordell, On Mr. Ramanujan's empirical expansions of modular functions, Proc. Camb. Philos. Soc. **19** (1917), 117–124.

[17] M. R. Murty, V. K. Murty, and T. N. Shorey, Odd values of the Ramanujan τ-function, Bull. Soc. Math. France **115** (1987), 391–395.