閉測地線から定まるモジュラー曲線のホモロジー類

戸次 鵬人 (佐賀大学)

概 要

モジュラー曲線上の閉測地線たちは, 実 2 次体の数論やテータ対応などと関わる興味深い対象である. 本稿では, これらの閉測地線から定まるサイクルが生成するモジュラー曲線のホモロジー群の部分群の大きさと, 実 2 次体のゼータ関数値への応用について, Harder による Eisenstein 類の分母の研究との関連や, 最近得られた新たな観察なども含めて解説したい. 本稿の内容は, 第 17 回福岡数論研究集会における筆者の講演内容をまとめたものであり, 筑波大学の坂本龍太郎氏との共同研究 [1], [2] に基づく.

1 序 : 2 次形式に関するある合同式

本稿を通じて $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ とする. $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$, $\gamma \neq \pm 1$ に対し, 2 次形式 $Q_\gamma(X,Y)$ を以下で定める:

$$Q_\gamma(X,Y) := -\frac{\mathrm{sgn}(a+d)}{\gcd(c, a-d, b)}\bigl(cX^2 - (a-d)XY - bY^2\bigr).$$

閉測地線から定まるモジュラー曲線のホモロジー類について考察している際に, 我々は以下のような不思議な合同式に遭遇した.

不思議な合同式. $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $n_1, n_2, \ldots, n_r \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ に対し,

$$\gamma_i := \begin{pmatrix} n_i & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_{i+1} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} n_r & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} n_{i-1} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \Gamma,$$

$$Q_{\gamma_i}(X,Y) =: A_iX^2 + B_iXY + C_iY^2$$

とおく ($i = 1, \ldots, r$). このとき, 次が成立する:

$$\sum_{i=1}^{r}\bigl(B_i^4(A_i - C_i) + 3B_i^2(A_i^2C_i - A_iC_i^2) + B_i^2(A_i^3 - C_i^3)\bigr) \equiv 0 \pmod 5. \tag{1.1}$$

本合同式は一見非常に初等的なものであるが, 今の所, 我々は初等的な (2 次形式のみを使った直接的な) 証明は見つけられていない. しかしながら, すでに述べたように, この合同式は閉測地線から定まるモジュラー曲線のホモロジー類と関係しており, それを用いてホモロジー論的な証明を与えることができた.

本稿の目的は,

- 閉測地線から定まるモジュラー曲線のホモロジー類を考察した動機と経緯,
- 閉測地線から定まるモジュラー曲線のホモロジー類と合同式 (1.1) の関係,

を概説することである.

2　閉測地線から定まるモジュラー曲線のホモロジー類

以下, Poincaré 上半平面を $\mathbb{H}=\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Im}(z)>0\}$ で表し, $\overline{\Gamma}$ で $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})=\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$ を表す. Γ の元 γ について, $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ における像も γ で表す. また, $k\geq 0$ に対し Γ 加群 $\mathrm{Sym}^k(\mathbb{Z}^2)$ を $\mathcal{V}_k$ で表す. さらに, Γ 加群 $\mathcal{V}_k$ を $\mathbb{Z}$ 上の 2 変数斉次 k 次多項式全体と同一視する:

$$\mathcal{V}_k\simeq\{P(X,Y)\in\mathbb{Z}[X,Y]\mid \text{homogeneous of degree } k\}.$$

Γ の作用は $(\gamma P)(X,Y)=P((X,Y)^t\gamma^{-1})$ で定める. ($^t\gamma$ は γ の転置を表す.) k が偶数の場合は, $\mathcal{V}_k$ は $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ 加群になる. (本稿では k が偶数の場合しか考えない.)

双曲元 $\gamma\in\Gamma$, i.e., $|\,\mathrm{Tr}(\gamma)|>2$, に対し, α (resp. β) を γ の吸引的 (resp. 反発的) 固定点[1]とすると, 上半平面 $\mathbb{H}$ 上の β から α に向かう測地線 (半円) は, モジュラー曲線 $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ 上の閉測地線 C_γ を定める. (逆に $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ 上の全ての閉測地線はこのようにして得られる.) 特に, C_γ は, $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ のホモロジー群の元 $[C_\gamma]\in H_1(\Gamma\backslash\mathbb{H},\mathbb{Z})$ を定める. より一般に, $k\geq 0$ に対し, 双曲元 $\gamma\in\Gamma$ は $\mathcal{V}_{2k}$ を係数とするホモロジー群 $H_1(\Gamma\backslash\mathbb{H},\mathcal{V}_{2k})$ の元 $\mathfrak{z}_{2k}(\gamma)$ を定める.

以下, $\mathfrak{z}_{2k}(\gamma)$ の定義を述べる.

$$I:=\ker\left(\mathbb{Z}[\overline{\Gamma}]\longrightarrow\mathbb{Z};[\gamma]\mapsto 1\right)=\langle[\gamma]-1\mid\gamma\in\overline{\Gamma}\rangle_{\mathbb{Z}[\overline{\Gamma}]}$$

を augmentation イデアルとすると, モジュラー曲線 $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ の $\mathcal{V}_{2k}$ 係数 1 次ホモロジー群は, $\overline{\Gamma}$ の群ホモロジーを用いて

$$H_1(\Gamma\backslash\mathbb{H},\mathcal{V}_{2k}):=H_1(\overline{\Gamma},\mathcal{V}_{2k}):=\ker\left(I\otimes_{\overline{\Gamma}}\mathcal{V}_{2k}\longrightarrow\mathcal{V}_{2k};([\gamma]-1)\otimes P\mapsto\gamma P-P\right)$$

と書ける[2]. Γ の双曲元全体の集合を Γ^{hyp} で表す, i.e., $\Gamma^{\mathrm{hyp}}=\{\gamma\in\Gamma\mid|\,\mathrm{Tr}(\gamma)|>2\}$. このとき, $\gamma\in\Gamma^{\mathrm{hyp}}$ に対し, $\gamma Q_\gamma=Q_\gamma$ が成立することに注意する.

定義 2.1. (1) $k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し, 写像 $\mathfrak{z}_{2k}\colon\Gamma^{\mathrm{hyp}}\longrightarrow H_1(\Gamma\backslash\mathbb{H},\mathcal{V}_{2k})$ を

$$\mathfrak{z}_{2k}(\gamma):=([\gamma]-1)\otimes Q_\gamma(X,Y)^k\in H_1(\Gamma\backslash\mathbb{H},\mathcal{V}_{2k})$$

によって定義する.
(2) $\mathfrak{z}_{2k}(\gamma)$ $(\gamma\in\Gamma^{\mathrm{hyp}})$ で生成される $H_1(\Gamma\backslash\mathbb{H},\mathcal{V}_{2k})$ の部分群を $\mathfrak{Z}_{2k}$ で表す, i.e.,

$$\mathfrak{Z}_{2k}:=\langle\mathfrak{z}_{2k}(\gamma)\mid\gamma\in\Gamma^{\mathrm{hyp}}\rangle_{\mathbb{Z}}\subset H_1(\Gamma\backslash\mathbb{H},\mathcal{V}_{2k}).$$

本稿では, 以下の問いを論じる.

問題. 部分群 $\mathfrak{Z}_{2k}$ は $H_1(\Gamma\backslash\mathbb{H},\mathcal{V}_{2k})$ の中でどれくらい大きいか, あるいは小さいか？

3　動機：実 2 次体の部分ゼータ関数の特殊値

本節では, 上の問いを考える動機となった実 2 次体の部分ゼータ関数の特殊値の分母に関する研究 [1] について述べる. 詳細については, [1] を参照されたい.

[1] すなわち, 任意の点 $\tau\in\mathbb{H}$ に対し, $\lim_{m\to\infty}\gamma^m\tau=\alpha$, $\lim_{m\to\infty}\gamma^{-m}\tau=\beta$ となっている.
[2] $\overline{\Gamma}$ の $\mathbb{H}$ への作用が自由ではないため, 本来は少し注意を要するが, 本稿ではこれを $H_1(\Gamma\backslash\mathbb{H},\mathcal{V}_{2k})$ の定義とする.

定義 3.1. 双曲元 $\gamma \in \Gamma^{\mathrm{hyp}}$ に対し, $\gamma^* := {}^t\gamma^{-1} \in \Gamma^{\mathrm{hyp}}$ とおく. このとき, 双曲元 $\gamma \in \Gamma^{\mathrm{hyp}}$ に付随するゼータ関数 $\zeta_\gamma(s)$ を以下で定義する:

$$\zeta_\gamma(s) := \frac{1}{2} \sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2/\langle\gamma\rangle \\ Q_{\gamma^*}(m,n)>0}} \frac{1}{Q_{\gamma^*}(m,n)^s}, \quad \mathrm{Re}(s) > 1.$$

$\zeta_\gamma(s)$ は $\mathbb{C}$ 上の有理型関数に解析接続される. また, F を実 2 次体, $\mathcal{O} \subset F$ を F の整環, $\mathcal{A}$ を $\mathcal{O}$ の狭義イデアル類とした時, $(F, \mathcal{O}, \mathcal{A})$ に付随する部分ゼータ関数

$$\zeta_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}, s) := \sum_{\mathfrak{a} \in \mathcal{A}} \frac{1}{N\mathfrak{a}^s}$$

は, ある原始的双曲元 $\gamma \in \Gamma^{\mathrm{hyp}}$ (i.e., ある $\gamma' \in \Gamma$ に対し $\gamma = \gamma'^l$ ならば $l = 1$) に対する $\zeta_\gamma(s)$ に一致しており, 逆に原始的双曲元に付随する $\zeta_\gamma(s)$ は, ある $(F, \mathcal{O}, \mathcal{A})$ に付随する部分ゼータ関数となっていることが知られている[3].

例 3.2. $\gamma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ のとき, $\gamma^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $Q_{\gamma^*}(X, Y) = X^2 - XY - Y^2$ であり,

$$\zeta_\gamma(s) = \sum_{m>0, n\geq 0} \frac{1}{(m^2 + 3mn + n^2)^s} = \zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(s)$$

となっている. ただし, $\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(s)$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ の Dedekind ゼータ関数である.

以下本稿では, $\zeta_\gamma(s)$ を用いて議論を進める. 前節で述べた閉測地線から定まるモジュラー曲線のホモロジー類 $\mathfrak{z}_{2k}(\gamma)$ は 2 次体のゼータ関数の特殊値 $\zeta_\gamma(-k)$ を調べる際に重要となる. より正確には, 閉測地線から定まるモジュラー曲線のホモロジー類 $\mathfrak{z}_{2k}(\gamma)$ と, Eisenstein 級数から定まるコホモロジー類 Eis_{2k} を用いることで, $\zeta_\gamma(-k)$ を調べられる.

3.1 Eisenstein 類

$k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し,

$$E_{2k+2}(z) := \frac{1}{2} \sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \\ \text{coprime}}} \frac{1}{(mz+n)^{2k+2}}, \quad z \in \mathbb{H}$$

をレベル 1 重さ $2k+2$ の正則 Eisenstein 級数とする. すると, Eichler–Shimura 同型

$$r\colon M_{2k+2}(\Gamma) \oplus \overline{S_{2k+2}(\Gamma)} \xrightarrow{\sim} H^1(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \mathcal{V}_{2k}^\vee \otimes \mathbb{C})$$

によって, Eisenstein 級数 E_{2k+2} はモジュラー曲線のコホモロジー類

$$\mathrm{Eis}_{2k} := r(E_{2k+2}) \in H^1(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \mathcal{V}_{2k}^\vee \otimes \mathbb{C})$$

を定める. ただし, $M_{2k+2}(\Gamma)$ (resp. $S_{2k+2}(\Gamma)$) はレベル 1 重さ $2k+2$ のモジュラー形式 (resp. 尖点形式) の空間を表し, $\mathcal{V}_{2k}^\vee := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{V}_{2k}, \mathbb{Z})$ は $\mathcal{V}_{2k}$ の双対 Γ 加群を表す. そして, ホモロジーとコホモロジーの間の自然なペアリングを

$$\langle\ ,\ \rangle\colon H_1(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \mathcal{V}_{2k}) \times H^1(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \mathcal{V}_{2k}^\vee \otimes \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

[3] $\gamma = \gamma'^l$ の場合は $\zeta_\gamma(s) = l\,\zeta_{\gamma'}(s)$ となっている.

で表すことにすると, ホモロジー類 $\mathfrak{z}_{2k}(\gamma)$ とコホモロジー類 Eis_{2k} の間のペアリング $\langle \mathfrak{z}_{2k}(\gamma), \mathrm{Eis}_{2k}\rangle$ は閉測地線に沿った Eisenstein 級数の積分で与えられ, 以下が知られている.

定理 3.3 (Hecke's integral formula)**.** $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とし, $\tau \in \mathbb{H}$ を任意の点とする. このとき, 双曲元 $\gamma \in \Gamma^{\mathrm{hyp}}$ に対し以下が成り立つ:

$$\langle \mathfrak{z}_{2k}(\gamma), \mathrm{Eis}_{2k}\rangle = \int_{\tau}^{\gamma\tau} Q_\gamma(z,1)^k\, E_{2k+2}(z)\, dz = (-1)^{k+1}\frac{\zeta_\gamma(-k)}{\zeta(-1-2k)}.$$

ここで, $\zeta(-1-2k)$ は Riemann ゼータ関数の $s=-1-2k$ での値であり,

$$\zeta(-1-2k) = -\frac{B_{2k+2}}{2k+2} \in \mathbb{Q}^\times \quad (B_{2k+2} : (2k+2)\text{-th Bernoulli number})$$

となっていることが知られている.

これによって, ゼータ関数の特殊値 $\zeta_\gamma(-k)$ の代数的性質が, ホモロジー類 $\mathfrak{z}_{2k}(\gamma)$ とコホモロジー類 Eis_{2k} の代数的性質を通して調べられる.

例えば, Eisenstein 類 Eis_{2k} はアプリオリには $\mathbb{C}$ 上の Γ 加群 $\mathcal{V}_{2k}^\vee \otimes \mathbb{C}$ を係数とする類であるが, 次の有理性が古典的な結果として知られている.

定理 3.4 (Classical)**.** Eis_{2k} は有理的である. すなわち次が成り立つ:

$$\mathrm{Eis}_{2k} \in H^1(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \mathcal{V}_{2k}^\vee \otimes \mathbb{Q}) \subset H^1(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \mathcal{V}_{2k}^\vee \otimes \mathbb{C}).$$

この帰結として, Siegel による $\zeta_\gamma(-k)$ の有理性が導かれる.

系 3.5 (Siegel)**.** 双曲元 $\gamma \in \Gamma^{\mathrm{hyp}}$ および $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し, $\zeta_\gamma(-k) \in \mathbb{Q}$.

3.2 実 2 次体の部分ゼータ関数の特殊値の分母

[1] において我々は, 有理数 $\zeta_\gamma(-k)$ が, $\gamma \in \Gamma^{\mathrm{hyp}}$ を渡るときにどのくらい大きな分母を持つか, という問題を考察した. より正確には, $\zeta_\gamma(-k) \in \mathbb{Q}$ が生成する $\mathbb{Q}$ の部分 $\mathbb{Z}$ 加群

$$\left\langle \zeta_\gamma(-k) \mid \gamma \in \Gamma^{\mathrm{hyp}} \right\rangle_{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{Q}$$

を調べた. このような $\zeta_\gamma(-k)$ の分母の上界は, Zagier [6, p.149, (3.9)] によって, $\zeta_\gamma(-k)$ の明示的な公式を用いて一つ与えられていたが, [6] の上界は最良のものとはなっておらず, 近年 Duke [3] が次のより精密な上界を予想していた.

予想 3.6 (Duke [3])**.** $N_{2k+2}, J_{2k+2} \in \mathbb{Z}_{>0}$ をそれぞれ $\zeta(-1-2k) \in \mathbb{Q}^\times$ の分子と分母とする. すなわち, N_{2k+2} と J_{2k+2} は互いに素で, $\zeta(-1-2k) = \pm\frac{N_{2k+2}}{J_{2k+2}}$ を満たす. このとき, 次が成立する:

$$\left\langle \zeta_\gamma(-k) \mid \gamma \in \Gamma^{\mathrm{hyp}} \right\rangle_{\mathbb{Z}} \subset \frac{1}{J_{2k+2}}\mathbb{Z}.$$

我々は [1] で, 次節で述べる Harder による Eis_{2k} の分母の計算 (定理 3.4 の integral refinement) を用いて次を示した.

定理 3.7 ([1, Corollary 9.16])**.** Duke [3] の予想は正しく, また Duke の上界は最良の上界を与える. すなわち次が成り立つ:

$$\left\langle \zeta_\gamma(-k) \mid \gamma \in \Gamma^{\mathrm{hyp}} \right\rangle_{\mathbb{Z}} = \frac{1}{J_{2k+2}}\mathbb{Z}.$$

3.3 Eis_{2k} の分母

引き続き $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とし, N_{2k+2}, J_{2k+2} を $\zeta(-1-2k) \in \mathbb{Q}^{\times}$ の分子と分母とする. 定理 3.4 より, Eisenstein 類 Eis_{2k} とペアリングを取る写像は $\mathbb{Q}$ に値を持つ:

$$\langle\ ,\mathrm{Eis}_{2k}\rangle\colon H_1(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \mathcal{V}_{2k}) \longrightarrow \mathbb{Q};\ \sigma \mapsto \langle\sigma, \mathrm{Eis}_{2k}\rangle. \tag{3.1}$$

このとき, Harder は以下を示した.

定理 3.8 (Harder [5])**.** Eis_{2k} とペアリングを取る写像 (3.1) の像は $\frac{1}{N_{2k+2}}\mathbb{Z}$ に一致する:

$$\langle\ ,\mathrm{Eis}_{2k}\rangle\colon H_1(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \mathcal{V}_{2k}) \twoheadrightarrow \frac{1}{N_{2k+2}}\mathbb{Z};\ \sigma \mapsto \langle\sigma, \mathrm{Eis}_{2k}\rangle.$$

特に, Eis_{2k} の分母は N_{2k+2} となる. すなわち次が成立する:

$$\mathrm{denominator}(\mathrm{Eis}_{2k}) := \min\{\Delta \in \mathbb{Z}_{>0} \mid \Delta\,\mathrm{Eis}_{2k} \in H^1(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \mathcal{V}_{2k}^{\vee})/(\mathrm{torsion})\} = N_{2k+2}.$$

注意 3.9. [5] は Harder による未出版の本となるが, 定理 3.8 の証明は [1] にも解説したので証明についてはこちらも参照されたい.

Duke の予想 3.6 は, 定理 3.3 と定理 3.8 から直ちに従う. 実際,

$$\begin{aligned}\Big\langle \zeta_\gamma(-k) \mid \gamma \in \Gamma^{\mathrm{hyp}} \Big\rangle_{\mathbb{Z}} &= \zeta(-1-2k)\big\langle \mathfrak{z}_{2k}, \mathrm{Eis}_{2k} \big\rangle \\ &\subset \zeta(-1-2k)\big\langle H_1(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \mathcal{V}_{2k}), \mathrm{Eis}_{2k} \big\rangle = \frac{1}{J_{2k+2}}\mathbb{Z}\end{aligned}$$

となっていることから分かる.

以上の議論から, 定理 3.7 を示すためには

$$\big\langle \mathfrak{z}_{2k}, \mathrm{Eis}_{2k} \big\rangle = \big\langle H_1(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \mathcal{V}_{2k}), \mathrm{Eis}_{2k} \big\rangle \tag{3.2}$$

を示す必要があり, そのためには $\mathfrak{z}_{2k}$ が $H_1(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \mathcal{V}_{2k})$ の中で十分大きいことを言えれば良い. そこでまずは $k=5$ の場合に, $\mathfrak{z}_{2k}$ が $H_1(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \mathcal{V}_{2k})$ に一致するか数値実験をしてみたところ, $\mathfrak{z}_{10}$ は $H_1(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \mathcal{V}_{10})$ よりも真に小さいことを示唆する結果が得られた. では

- どのようにして $\big\langle \mathfrak{z}_{2k}, \mathrm{Eis}_{2k} \big\rangle = \big\langle H_1(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \mathcal{V}_{2k}), \mathrm{Eis}_{2k} \big\rangle$ を示すか, そして
- $\mathfrak{z}_{2k}$ は本当に $H_1(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \mathcal{V}_{2k})$ よりも真に小さいのか.

次節ではこの 2 点について [1] で得られた結果や, 最近得られた結果 [2] について述べる.

4 $\mathfrak{z}_{2k}$ の大きさ

4.1 Ordinary 部分, 定理 3.7 の証明

p を素数とし, T_p で $H_1(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \mathcal{V}_{2k})$, $H^1(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \mathcal{V}_{2k}^{\vee})$ への Hecke 作用素を表す. また,

$$e_p := \lim_{m\to\infty} T_p^{m!}$$

を $H_1(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \mathcal{V}_{2k}\otimes\mathbb{Z}_p)$, $H^1(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \mathcal{V}_{2k}^{\vee}\otimes\mathbb{Z}_p)$ へ作用する p-ordinary 射影子とし,

$$H_1^{\mathrm{ord}}(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \mathcal{V}_{2k}\otimes\mathbb{Z}_p) := e_p H_1(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \mathcal{V}_{2k}\otimes\mathbb{Z}_p)$$
$$H^1_{\mathrm{ord}}(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \mathcal{V}_{2k}^{\vee}\otimes\mathbb{Z}_p) := e_p H^1(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \mathcal{V}_{2k}^{\vee}\otimes\mathbb{Z}_p)$$

で p-ordinary 部分を表す. また, $\mathfrak{Z}_{2k}$ についても,

$$\mathfrak{Z}_{2k}^{p-\mathrm{ord}} := e_p\big(\mathfrak{Z}_{2k}\otimes\mathbb{Z}_p\big)$$

とおく.

いま, Eis_{2k} が p-ordinary であり,

$$T_p\,\mathrm{Eis}_{2k} = (1+p^{2k+1})\,\mathrm{Eis}_{2k}, \quad e_p\,\mathrm{Eis}_{2k} = \mathrm{Eis}_{2k}$$

を満たしていることに注意すると, (3.2) を示すためには ordinary 部分の一致を言えば良いことがわかる. 実際次が示せる.

定理 4.1 ([1, Theorem 9.22], [2])**.** $p\geq 5$ を素数とする. このとき次が成立する:

$$\mathfrak{Z}_{2k}^{p-\mathrm{ord}} = H_1^{\mathrm{ord}}(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \mathcal{V}_{2k}\otimes\mathbb{Z}_p).$$

実は, [1, Theorem 9.22] では合同部分群 $\Gamma_1(pN)$ の場合の定理 4.1 を $p\geq 2$ で示しており, それを用いて (3.2) および定理 3.7 が示される. 本稿の形の定理 4.1 は, 合同部分群 $\Gamma_1(pN)$ の場合へと帰着することで [2] にて証明される. 合同部分群 $\Gamma_1(pN)$ の場合には, 肥田の control theorem を用いて $k=0$ の場合に帰着することで証明する.

以上により, $\mathfrak{Z}_{2k}$ は各素数 $p\geq 5$ に対し p-ordinary 部分を生成する程度には大きい, ということが分かった.

4.2 $\mathfrak{Z}_{2k}$ と $H_1(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \mathcal{V}_{2k})$ の差

最後に, ordinary 部分には限らずに $\mathfrak{Z}_{2k}$ と $H_1(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \mathcal{V}_{2k})$ の差がどうなっているのか (真に小さいのか, もしそうならどのくらい小さいのか) について, 現在までに分かったことを述べる.

まず, ordinary 部分に関する定理 4.1 および Goldman-Millson [4] による有理数係数の場合の decomposable サイクルに関する結果を用いることで, $\mathfrak{Z}_{2k}$ が $H_1(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \mathcal{V}_{2k})$ の指数有限の部分群であることが分かる. そこで我々は, 商 $H_1(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \mathcal{V}_{2k})/\mathfrak{Z}_{2k}$ を小さな k に対し実験的に計算し, その構造を観察した. 具体的には, 双曲元のなすある程度大きな有限部分集合 $H\subset\Gamma^{\mathrm{hyp}}$ を固定し,

$$\mathfrak{Z}_{2k,H} := \langle \mathfrak{z}_{2k}(\gamma)\mid\gamma\in H\rangle_{\mathbb{Z}}\subset\mathfrak{Z}_{2k}, \quad H_1(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \mathcal{V}_{2k})/\mathfrak{Z}_{2k,H}$$

を計算した. 例えば $k=p$ ($p\geq 5$: 素数) の場合に, 表 1 のような結果が得られた.

表 1: $H_1(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}), \mathcal{V}_{2k})/\mathfrak{Z}_{2k,H}$

k	$H_1(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}), \mathcal{V}_{2k})/\mathfrak{Z}_{2k,H}$
5	$\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/720\mathbb{Z}$
7	$\mathbb{Z}/28\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/840\mathbb{Z}$
11	$\mathbb{Z}/44\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/660\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/1320\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/9313920\mathbb{Z}$
13	$\mathbb{Z}/52\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/1716\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/6864\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/2471040\mathbb{Z}$
17	$\mathbb{Z}/68\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/272\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/1632\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/42432\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/35642880\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/77630192640\mathbb{Z}$
$\vdots$	$\vdots$

このとき, 以下が観察できる.

観察 4.2. $p \geq 5$ を素数とすると,

$$\big(H_1(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \mathcal{V}_{2p})/\mathfrak{Z}_{2p}\big) \otimes \mathbb{Z}_p \overset{?}{\simeq} (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{2\dim_{\mathbb{C}} S_{2p+2}(\Gamma)}.$$

我々は以下を示すことができた.

定理 4.3 ([2])**.** $p \geq 5$ を素数とする. このとき次の全射が存在する:

$$\big(H_1(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \mathcal{V}_{2p})/\mathfrak{Z}_{2p}\big) \otimes \mathbb{Z}_p \twoheadrightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{2\dim_{\mathbb{C}} S_{2p+2}(\Gamma)}.$$

また, 素数 $5 \leq p \leq 61$ については上の全射は同型となる.

これによって特に, $\mathfrak{Z}_{2k}$ が実際に $H_1(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \mathcal{V}_{2k})$ より真に小さくなる場合があることも分かった. また, 実は §1 で述べた合同式 (1.1) は $p = 5$ の場合の定理 4.3 と同値であり, 定理 4.3 の証明を考察している際に得られたものとなる. 一般の p についての単射性は未だ分かっておらず, 今後の課題の一つである.

定理 4.3 の証明のアイデア. 以下 $p \geq 5$ を素数とする. $\mathcal{V}_{2p}$ の部分 Γ 加群 $\mathcal{W}_{2p}$ を次で定める:

$$\mathcal{W}_{2p} := p\mathcal{V}_{2p} + \langle X^{2p}, X^pY^p, Y^{2p}\rangle_{\mathbb{Z}} \subset \mathcal{V}_{2p}.$$

このとき, まず

$$\mathfrak{Z}_{2p} \subset \mathrm{image}\,\big(H_1(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \mathcal{W}_{2p}) \longrightarrow H_1(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \mathcal{V}_{2p})\big)$$

となっていることが確かめられ, さらに,

$$\begin{aligned}\mathrm{coker}\,\big(H_1(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \mathcal{W}_{2p}) \longrightarrow H_1(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \mathcal{V}_{2p})\big) \otimes \mathbb{Z}_p &\simeq H_1^!(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \mathcal{V}_{2p} \otimes \mathbb{F}_p) \\ &\simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{2\dim_{\mathbb{C}} S_{2p+2}(\Gamma)}\end{aligned}$$

と計算できる. ここで, $H_1^!(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \mathcal{V}_{2p} \otimes \mathbb{F}_p)$ は $H_1(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \mathcal{V}_{2p} \otimes \mathbb{F}_p)$ を $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ の境界上のホモロジーの像で割ったいわゆる内部ホモロジー群である. 従って,

$$\begin{aligned}\big(H_1(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \mathcal{V}_{2p})/\mathfrak{Z}_{2p}\big) \otimes \mathbb{Z}_p &\twoheadrightarrow \mathrm{coker}\,\big(H_1(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \mathcal{W}_{2p}) \to H_1(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \mathcal{V}_{2p})\big) \otimes \mathbb{Z}_p \\ &\simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{2\dim_{\mathbb{C}} S_{2p+2}(\Gamma)}\end{aligned}$$

が得られる. □

謝辞

本稿の内容は, 第 17 回福岡数論研究集会における筆者の講演内容に基づきます. 講演の機会を下さった, 世話人の金子昌信先生, 権寧魯先生, 岸康弘先生, 松坂俊輝先生に心より感謝申し上げます.

参考文献

[1] H. Bekki and R. Sakamoto, Harder's denominator problem for $SL_2(\mathbb{Z})$ and its applications, Essent. Number Theory **4** (2025), no. 2, 251–326.

[2] H. Bekki and R. Sakamoto, On the subgroups of the homology of modular curves generated by hyperbolic cycles, in preparation.

[3] W. D. Duke, Higher Rademacher symbols, Exp. Math. **33** (2024), no. 4, 624–643.

[4] W. M. Goldman and J. J. Millson, Eichler-Shimura homology and the finite generation of cusp forms by hyperbolic Poincaré series, Duke Math. J. **53** (1986), no. 4, 1081–1091.

[5] G. Harder, Cohomology of Arithmetic Groups, unpublished.

[6] D. Zagier, Valeurs des fonctions zêta des corps quadratiques réels aux entiers négatifs, In: Journées Arithmétiques de Caen (1976), 135–151, Astérisque, 41–42, Soc. Math. France, Paris, 1977.