On the Period of the Duke-Imamoḡlu-Ikeda-Yamana Lift for Unitary Group $U(n,n)$

東谷 仁 (京都大学)

概 要

本稿では, 第 17 回福岡数論研究集会での講演をもとに, n が奇数の場合の Duke-Imamoḡlu-池田-山名リフトにおける周期と L 関数の関係について報告する.

1 導入

保型表現の周期は保型表現の不変量として重要なもののひとつである. とくに保型表現のリフトを構成したとき, どのように周期が変化するかは重要なテーマのひとつである. 具体的にリフトの周期に関しては次のような形で問題が提起されている.

問. 保型表現 π とそのリフト Π とおく. このとき, Π の周期と π の周期の適切な比は π のある種の代数的 L 関数の積と数論的不変量の積によってあらわされる.

本研究では特に山名氏の構成したユニタリの場合の Duke-Imamoḡlu-池田リフトの拡張に当たるリフトの周期と元の保型表現の随伴 L 関数と数論的不変量の関係を示すことを目的とする. 本報告書ではそのリフトに関して上の問題への部分的解決となる結果を得たことを報告する. 以下, 山名氏の定義したリフトを池田-山名リフトと呼称する.

まず, 本稿の記述に必要な定義について書き下しておく.

F を総実代数体, E を F の 2 次 CM 拡大体とする. F の有限素点全体を $\mathbf{f}$ で表し, F の無限素点全体を $\mathbf{a}$ とする. 素点 $v \in \mathbf{f} \cup \mathbf{a}$ に対して E_v を $E \otimes_F F_v$ で定義する. さらに F_v の整数環を $\mathcal{O}_v$, 整数環 $\mathcal{O}_v$ の極大イデアルを $\mathfrak{p}_v$ とする. また, $\mathcal{O}_{E_v}$ を $\mathcal{O}_v$ の整閉包として定義する. $\mathfrak{q}_v$ を v が分裂していないとき, $\mathcal{O}_v$ の極大イデアルとし, v が分裂しているとき, $\mathcal{O}_{E_v}$ と $\mathcal{O}_v \oplus \mathcal{O}_v$ の自然な同一視の下で $\mathfrak{p}_v \oplus \mathfrak{p}_v$ と定義する.

さらに F_v の素元と $\mathfrak{q}_v$ の元の組 (ϖ_v, ϖ_{E_v}) を次の条件を満たすように一つ固定する. E_v が F_v の惰性拡大 (inert extension) のとき, $\varpi_{E_v} = \varpi_v$, E_v が F_v の分岐拡大のとき, $\varpi_v = N_{E_v/F_v}(\varpi_{E_v})$, $E_v = F_v \oplus F_v$ のとき, その同一視の元 $\varpi_{E_v} = (\varpi_v, \varpi_v)$ となる.

F のアデール環を $\mathbb{A}$ と表し, E のアデール環を $\mathbb{A}_E$ で表す. また, $\mathbb{A}_{\mathbf{f}}$ によりアデール $\mathbb{A}$ の有限素点部分, $\mathbb{A}_{E,\mathbf{f}}$ により $\mathbb{A}_E$ の有限素点部分, F_∞ により $F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$, E_∞ により $E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ を表す. さらに単位元を持つ代数 R に対して $R^\times$ を R の単元全体を表すことにする. $\mathcal{O}_v/\mathfrak{p}_v = q_v$ とする.

$v \in \mathbf{f}$ に対して ord_v を F_v の素元 x に対して $\mathrm{ord}_v(x) = 1$ を与える加法的付値とし, $x \in F_v$ に対して $\alpha_F(x) = q_v^{-\mathrm{ord}_v(x)}$ と定める. $v \in \mathbf{a}$ に対して $\alpha_F(x)$ を F_v と $\mathbb{R}$ の自然な同一視の元 $|x|_{\mathbb{R}}$ により定める. $N_{E/F}$ を $\mathrm{Res}_{E/F}\mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m$ へのノルム写像, $\mathrm{tr}_{E/F}$ を $\mathrm{Res}_{E/F}\mathbb{G}_a \to \mathbb{G}_a$ へのトレース写像とする. α_E を $\alpha_F \circ N_{E/F}$ により定める. さらに $v \in \mathbf{f}$ に対して $\varepsilon_{E_v/F_v} : F_v^\times \to \{\pm 1\}$

を $x \in F_v^\times \setminus N_{E/F}(E_v^\times)$ に対して $\varepsilon_{E/F}(x) = -1$, $x \in N_{E/F}(E_v^\times)$ に対して $\varepsilon_{E_v/F_v}(x) = 1$ となる指標と定める.

また, F の有理数上の次数を d_F, 類数を $\mathfrak{h}_F$, 基本単数を $\mathfrak{R}_F$, 判別式を D_F とする. さらに E の判別式を D_E とおく. $\mathfrak{D}_{E/F}$ を F における E の相対判別式, 有限素点 $v \in \mathbf{f}$ に対して $\mathfrak{f}_v = \mathrm{ord}_v(\mathfrak{D}_{E/F})$ とする. $v \in \mathbf{f}$ に対して $\mathfrak{d}_{E/F}$ を E の F における differential ideal とする.

$\sigma \in \mathrm{Gal}(E/F)$ を非自明な元とする. エルミート行列 Her_n を

$$\mathrm{Her}_n = \{X \in \mathrm{Res}_{E/F}\mathrm{M}_n | X = {}^tX^\sigma\}$$

により定める. さらに $\mathrm{Her}_n^{nd} = \{Z \in \mathrm{Her}_n | \det Z \neq 0\}$ と定義する. また, $\mathrm{Her}_n\mathrm{Res}_{E/F}\mathrm{GL}_n$ の Her_n への作用を $A \in \mathrm{Res}_{E/F}\mathrm{GL}_n$, $X \in \mathrm{Her}_n$ に対して ${}^tA^\sigma XA$ により定め, $X[A]$ と書く.

代数群 $\widetilde{\mathcal{G}}_n, \mathcal{G}_n$ を次で定義する:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{G}}_n &= \{g \in \mathrm{Res}_{E/F}\mathrm{GL}_{2n} | ({}^tg^\sigma)J_ng = \nu_n(g)J_n, \nu_n(g) \in \mathbb{G}_m\},\\
\mathcal{G}_n &= \{g \in \widetilde{\mathcal{G}}_n | \nu_n(g) = 1\}.
\end{aligned}$$

$A \in \mathrm{Res}_{E/F}\mathrm{GL}_n$, $t \in \mathbb{G}_m$, $Z \in \mathrm{Her}_n$ に対して

$$\boldsymbol{m}_n(A) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & {}^tA^{\sigma-1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{d}_n(t) = \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & t \cdot 1_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{n}_n(Z) = \begin{pmatrix} 1_n & Z \\ 0 & 1_n \end{pmatrix}$$

により $\widetilde{\mathcal{G}}_n$ の元を定める. このとき, 極大放物型部分群 $\widetilde{\mathcal{P}}_n$ を

$$\widetilde{\mathcal{P}}_n = \{\boldsymbol{n}_n(Z)\boldsymbol{m}_n(A)\boldsymbol{d}_n(t) | A \in \mathrm{Res}_{E/F}\mathrm{GL}_n, t \in \mathbb{G}_m, Z \in \mathrm{Her}_n\}$$

により定める. $\widetilde{\mathcal{P}}_n$ のユニポテント部分群を U, $\widetilde{\mathcal{P}}_n$ のレヴィ部分群を $\widetilde{\mathcal{M}}$ で表す.

また, 有限素点 $v \in \mathbf{f}$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathrm{Her}_{n,v} &= \mathrm{Her}_n(F_v) \cap M_n(\mathcal{O}_{E_v}),\\
\widehat{\mathrm{Her}}_{n,v} &= \{X \in \mathrm{Her}_n(F_v) | \text{任意の } Z \in \mathrm{Her}_{n,v} \text{ に対して } \mathrm{tr}(XZ) \in \mathcal{O}_v\},\\
\widetilde{\mathrm{Her}}_{n,v} &= \left\{ (a_{ij})_{1 \leqq i,j, \leqq m} \in \widehat{\mathrm{Her}}_n(F_v) \,\middle|\, \begin{matrix} a_{ij} \in \mathfrak{q}_v\mathfrak{d}_{E_v/F_v}^{-1} \text{ if } i \neq j, \\ a_{ii} \in \mathcal{O}_v \end{matrix} \right\}
\end{aligned}$$

により $\mathrm{Her}_n(F_v)$ の部分群を定める. また, $\mathrm{Her}_n(F_\infty)$ の正定値行列全体を $\mathrm{Her}_{n,\infty}^+$ と書き, $\mathrm{Her}_n^+ = \mathrm{Her}_n(F) \cap \mathrm{Her}_{n,\infty}^+$ と定める.

次に本研究で扱った池田-山名リフトについて簡単に説明する. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の保型表現 $\pi \cong \otimes_v'\pi_v$ に対して次の表現を定義する. ω_v を π_v の中心指標, χ_v を $E_v^\times$ の指標で $F_v^\times$ への制限が ω_v になる指標とする. π_v^E を base change リフトによって得られる $\mathrm{GL}_2(E_v)$ の表現, $\pi_v[\chi_v]$ を $\pi_v^E \otimes \chi_v^{-1}$ によって得られる $\mathrm{GL}_2(E_v)$ の表現とする. $\pi_v[\chi_v]$ の Whittaker モデルを $\mathcal{W}(\pi_v[\chi_v])$, π_v の Whittaker モデルを $\mathcal{W}(\pi_v)$ と書く. また, $\mathrm{GL}_2(F_v) \times E_v^\times/F_v^\times \cong \widetilde{\mathcal{G}}_1$ により $\mathcal{W}(\pi_v) \boxtimes \chi_v^{-1}$ を $\mathcal{G}_1$ の表現とみなす.

さらに $\widetilde{\mathcal{G}}_n$ の放物部分群 $\mathcal{B}_{\boldsymbol{e}}$ をレヴィ部分群が $\mathrm{Res}_{E/F}\mathrm{GL}_2^{(n-1)/2} \times \widetilde{\mathcal{G}}_1$ となるようなものを適切にとることができ, $A_n^\chi(\pi_v)$ を次の誘導表現の既約部分表現で定義する:

$$\mathrm{Ind}_{\mathcal{B}_{\boldsymbol{e}}}^{\widetilde{\mathcal{G}}_n}\delta_{\mathcal{B}_{\boldsymbol{e}}}^{-1/4} \otimes \{\mathcal{W}(\pi_v[\chi_v]) \boxtimes (\mathcal{W}(\pi_v) \boxtimes \chi_v^{-1})\}.$$

また, $A_n^{\chi_{\mathbf{f}}}(\pi_{\mathbf{f}})$ を $\otimes_{v\in\mathbf{f}}' A_n^{\chi_v}(\pi_v)$ により定める.

また, Archimedean Whittaker 関数を $B \in \mathrm{Her}^+_{n,\infty}, \kappa, w \in \mathbb{Z}^{\mathbf{a}}$ に対して

$$W_B^{\kappa,w}(g_\infty) = \prod_{v \in J(F)} |\det B|_v^{\kappa_v/2} \exp(2\pi \mathrm{tr}(B \cdot g_v(\sqrt{-1}))) \left(\frac{\det g_v}{\overline{\det g_v}}\right)^{w/2} j(g_v, \sqrt{-1})$$

により定める. ただし, j は保型因子を表す. このとき, 山名氏は適切な Shalika 汎関数 $\mathfrak{S}_B^\chi$ が $A_n^\chi(\pi)$ の上に存在することを示し, 次の定理によって池田-山名リフトを定義した.

定理 1.1. $\phi \in A_n^\chi(\pi_{\mathbf{f}})$ に対して, $\widetilde{\mathcal{G}}_n(\mathbb{A})$ 上の関数を次で定義する:

$$\mathrm{I}_n(\phi)(g) = \sum_{B \in \mathrm{Her}_n^+} \mathfrak{S}_B(\pi_v(g_{\mathbf{f}})\phi) W_B^{\kappa,w}(g_\infty), w = \frac{1}{2}(l(\chi) + \kappa + n - 1).$$

このとき, $\mathrm{I}_n(\phi)$ は重さが $\kappa + n - 1$ の総実代数体上のエルミート尖点形式になる.

本研究では特に $\pi_v \subset \mathrm{Ind}(\alpha_F^{\mathfrak{s}_v} \boxtimes \alpha_F^{-\mathfrak{s}_v})$, $\chi_v = 1$, ϕ が不分岐な場合に周期の計算を行った.

[20, Proposition 6.2, Corollary 6.4, Lemma 9.2] および [20] の Section 11 の結果により本研究で扱う場合により具体的に書き下すことができる.

$v \in \mathbf{f}, B \in \widehat{\mathrm{Her}}_{n,v}$, 実部の十分大きい複素数 s に対して, Siegel 級数 $b_v(B; s)$ を

$$b_v(B; s) = \sum_{Z \in \mathrm{Her}_n(F_v)/\mathrm{Her}_{n,v}} \psi(\mathrm{tr}(BZ))[Z\mathcal{O}_{E_v}^n + \mathcal{O}_{E_v}^n : \mathcal{O}_{E_v}^n]^{-s/2}$$

により定める. さらに $B \notin \widehat{\mathrm{Her}}_{n,v}$ に対して $b_v(B; s) = 0$ と定める. さらに定数 ξ_v を

$$\xi_v = \begin{cases} -1 & E_v/F_v \text{ が不分岐拡大} \\ 0 & E_v/F_v \text{ が分岐拡大} \\ 1 & \text{それ以外} \end{cases}$$

とする. このとき, [18] によりある多項式 $F_v(B; X)$ が存在して,

$$b_v(B; s) = F_v(B; q_v^{-s}) \times \prod_{i=0}^{[(n-1)/2]} (1 - q_v^{2i-s})^{-1} \prod_{i=1}^{[n/2]} (1 - \xi_v q_v^{2i-1-s})^{-1}$$

と書くことができる. さらに $B \in \widehat{\mathrm{Her}}_n$ に対して, ローラン多項式 $\widetilde{F}_v(B; X)$ を

$$\widetilde{F}_v(B; X) = X^{-e_v(B)} F_v(B; X), e_v(B) = \mathrm{ord}_v(\mathfrak{D}_{E_v/F_v}^{[n/2]} \det B)$$

で定める. このとき, n が奇数であれば, 次の等式を満たすことが [6] で示されている:

$$\widetilde{F}_v(B; X^{-1}) = \widetilde{F}_v(B; X).$$

ここで定めたローラン多項式を用いて次の局所 Whittaker 関数 $W_{v,B}$ を $v \in \mathbf{f}$, エルミート行列 $B \in \mathrm{Her}_n(F_v)^{nd}$ に対して定義する:

$$W_{v,B}(\boldsymbol{n}_n(Z)\boldsymbol{m}_n(A)\boldsymbol{d}_n(t)k) = \psi_v(\mathrm{tr}(BZ))\widetilde{F}_v(t^{-1}B[A]; q_v^{-\mathfrak{s}_v})\alpha_F^{-\mathfrak{s}_v+n/2}(\det(t^{-1}B[A])).$$

このとき, これらによって池田-山名リフトは次の形に書き換えられる. f, B にのみ依存する定数 $C(f, B)$ が存在して

$$\mathrm{I}_n(\phi)(g) = \sum_B C_n(f, B) \prod_{v \in \mathbf{f}} W_{v,B}(g_v) \times W_B^{\kappa,w}(g_\infty).$$

この ϕ を重さ κ でレベル 0 のヒルベルトモジュラー形式 f に対応する $A_n^{\chi_{\mathbf{f}}}(\pi_{\mathbf{f}})$ の元とみなすことができ, 以下 $\mathrm{I}_n(\phi)$ を $\mathrm{I}_n(f)$ と書くことにする.

2 主結果

$\widetilde{\mathcal{G}}_n(\mathbb{A})$ の保型形式 F_1, F_2 に対して周期 $\langle F_1, F_2\rangle$ を以下で定義する:

$$\langle F_1, F_2\rangle = \int_{Z(\mathbb{A})\widetilde{\mathcal{G}}_n(F)\backslash\widetilde{\mathcal{G}}_n(\mathbb{A})} F_1(g)\overline{F_2(g)}dg.$$

f を重さ κ, レベル 0 のヒルベルト保型形式とする. f の佐武パラメータを $\{q_v^{-\mathfrak{s}_v}\}_{v\in\mathbf{f}}$ とする. このとき, $l \in \{0,1\}$ に対して随伴 L 関数 $L(s, f, \mathrm{Ad}, \varepsilon^l_{E/F})$ およびディリクレ L 関数を以下で定義する:

$$\begin{aligned}
L_v(s, f, \mathrm{Ad}, \varepsilon^l_{E/F}) &= (1-\varepsilon^l_{E/F}(\varpi_v)q_v^{-2\mathfrak{s}_v-s})(1-\varepsilon^l_{E/F}(\varpi_v)q_v^{-s})(1-\varepsilon^l_{E/F}(\varpi_v)q_v^{-2\bar{\mathfrak{s}}_v-s}),\\
L(s, f, \mathrm{Ad}, \varepsilon^l_{E/F}) &= \prod_{v\in\mathbf{f}} L_v(s, f, \mathrm{Ad}, \varepsilon^l_{E/F}),\\
L_v(s, \varepsilon^l_{E/F}) &= (1-\varepsilon^l_{E/F}(\varpi_v)q_v^{-s}), L(s, \varepsilon^l_{E/F}) = \prod_{v\in\mathbf{f}} L_v(s, \varepsilon^l_{E/F}),\\
\Gamma_{\mathbb{R}}(s) &= \pi^{-s/2}\Gamma(s/2), \Gamma_{\mathbb{C}}(s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s),\\
\Lambda(s, \varepsilon^l_{E/F}) &= L(s, \varepsilon^l_{E/F})\Gamma_{\mathbb{R}}(s+l),\\
\Lambda(s, f, \mathrm{Ad}, \varepsilon^l_{E/F}) &= L(s, f, \mathrm{Ad}, \varepsilon^l_{E/F})\prod_{v\in\mathbf{a}}\Gamma_{\mathbb{C}}(s)\Gamma_{\mathbb{C}}(s+\kappa_v-1).
\end{aligned}$$

このとき, $\langle \mathrm{I}_n(f), \mathrm{I}_n(f)\rangle$ を f の随伴 L 関数の特殊値と E, F の数論的不変量を用いて以下のようにあらわされることを示した.

主定理. F を総実代数体とし, $f \in S_\kappa(\Gamma_{\mathfrak{o}})$ を Hilbert 尖点形式であって重さ $\boldsymbol{\kappa} = (\kappa_v)_{v\in\mathbf{a}}$ の Hecke 固有形式とし, $\kappa = \sum_{v\in\mathbf{a}}\kappa_v$ とする. このとき,

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{I}_n(f), \mathrm{I}_n(f)\rangle &= 2^{-\kappa n-(n^2+n+2)[E:\mathbb{Q}]/2} D_E^{-(n+2)(n-1)/4} D_F^{-n/2}\prod_{i=2}^{2n}\Lambda(i, \varepsilon^i_{E/F})^{-1}\\
&\times\left(\prod_{v\in\mathbf{a}}\prod_{i=1}^{n}\frac{\Gamma_{\mathbb{R}}(n+i)}{\Gamma_{\mathbb{C}}(i)\Gamma_{\mathbb{R}}(i)}\right)\prod_{i=1}^{n}\Lambda(i, \mathrm{Ad}, f, \varepsilon^{i-1}_{E/F}).
\end{aligned}$$

注意. これは一見, 先行研究の桂田氏の結果と異なるように見えるが, これは池田リフトと $F=\mathbb{Q}$ の場合の池田-山名リフトが定数倍ずれているためである. 詳しくは [20, Section 11] を参照のこと.

3 先行研究に関して

本節では $F=\mathbb{Q}$ の場合に示した桂田氏の結果に関して鍵となった級数の紹介および本研究に関する問題点を簡単に説明する. また, 本研究に拡張するにあたって重要な命題の証明部分についても簡単に触れる.

先行研究において桂田氏は $F=\mathbb{Q}$ の場合において池田リフトの周期と L 関数の特殊値の間に明示的な式を与えている. このとき, 鍵となった級数が Rankin-Selberg 級数と呼ばれるものである. ここにその定式化の一つを述べる.

定義 3.1. $F(Z)$ を full レベルの Siegel 尖点形式とし, そのフーリエ展開を

$$F(Z) = \sum_{B \in \mathrm{Her}_n(\mathbb{Q})^+} a_F(B) \exp(2\pi\sqrt{-1}\mathrm{tr}(BZ))$$

とする. このとき, Rankin-Selberg 級数 $R(s; F)$ は

$$R(s, F) = \sum_{B \in \mathrm{Her}_n(\mathbb{Q})^+/\mathrm{GL}_n(E)} \frac{|a_F(B)|^2}{\#(\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_E)_B)|\det B|^s}$$

である. ただし, $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_E)_B = \{h \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_E) | B[h] = B\}$ である.

このような Rankin-Selberg の大域的な表示と局所的な表示を比較し, 適切な留数をとることにより, 次の命題を示していた. 一方, この級数を総実代数体上の場合に拡張するのは類数などの観点から収束性に関する議論が煩雑になりやすく, 別の方法を考えたほうが適切である. ここで Rankin-Selberg 級数から周期を与える命題に関して振り返る.

命題 3.2 ([11, Proposition3.1, Corollary])**.** 定数 R_n を

$$R_n = \frac{2^{2ln+n-1}\prod_{k=2}^{n} L(k, \varepsilon_{E/F}^{k+1})}{D_E^{n(n-1)/2}\prod_{k=0}^{n-1} L(2n-k, \varepsilon_{E/F}^{k+1})\prod_{k=0}^{n-1}\Gamma_{\mathbb{C}}(k)\Gamma_{\mathbb{C}}(2l-k+1)},$$

$\mathcal{O}_E^{\times,1}$ を有理数へのノルム写像で 1 になる $\mathcal{O}_E^{\times}$ の元全体とおく. このとき, $R(s; F)$ は複素数全体に有理型に解析接続できる. さらに F の重さが $2l$ であるとき, $\Re s > 2l$ において正則であり, $s = 2l$ で留数が $\frac{R_n\langle F, F\rangle}{\#\mathcal{O}_E^{\times,1}}$ となる一位の極を持つ.

この命題において次の積分表示が重要な役割を担っている:

$$R(s; F)\prod_{k=1}^{n}\Gamma_{\mathbb{C}}(s+k-l)\Gamma(s) = \int_{\mathfrak{H}} F(Z)\overline{F(Z)\mathcal{E}_{2l}(Z)}|\det Y|^{s-2l}dXdY.$$

ここで Eisenstein 級数の解析接続と留数に関する計算を志村氏の結果 [19] を用いることにより証明している. これは表現論的には Rankin-Selberg integral との類似性があるためそこに着目し, 次の章で説明する証明を行った.

4 証明の概略

$\varphi^{(s)}(g) \in \mathrm{Ind}_{\widetilde{\mathcal{P}}}^{\widetilde{\mathcal{G}}_n}(\alpha_E^s, \alpha_F^{-ns})$ を $g = \boldsymbol{n}_n(Z)\boldsymbol{m}_n(A)\boldsymbol{d}_n(t)k$ のとき, $\varphi(g) = \alpha_E^s(\det A)\alpha_F^{-ns}(t)$ となるように置き, Eisenstein 級数 $E(g; \varphi^{(s)})$ を $E(g; \varphi^{(s)}) = \sum_{\gamma \in \widetilde{\mathcal{P}}_n(F)\backslash\widetilde{\mathcal{G}}_n(F)} \varphi^{(s)}(\gamma g)$ とおく. このとき,

定義 4.1 (Rankin-Selberg 積分)**.** F_1, F_2 を $\widetilde{\mathcal{G}}_n(\mathbb{A}_F)$ 上の automorphic cusp forms とする. このとき, Rankin-Series $\mathcal{R}(s; F_1, F_2)$ を

$$\mathcal{R}(s; F_1, F_2) = \int_{\mathcal{Z}(\mathbb{A})\widetilde{\mathcal{G}}_n(F)\backslash\widetilde{\mathcal{G}}_n(\mathbb{A})} F_1(g)\overline{F_2(g)}E(g, \varphi^{(s)})dg$$

とおく. また, $F = F_1 = F_2$ のとき, $\mathcal{R}(s; F, F)$ を $R(s; F)$ と書く.

このとき, 次の命題により Rankin-Selberg 積分の留数と周期の関係が示される.

命題 4.2. 定数 R_n を

$$R_n = \frac{2^{[F:\mathbb{Q}]-1}\mathfrak{h}_F\mathfrak{R}_F\prod_{k=1}^{n-1}\Lambda(k+1,\varepsilon_{E/F}^k)}{|D_F|^{(n+1)/2}|D_E|^{n(n-1)/4}\prod_{l=0}^{n-1}\Lambda(2n-l,\varepsilon_{E/F}^l)}$$

とおく. このとき, $R(s;F_1,F_2)$ は $s=n$ で 1 位の極をもち, 留数は $R_n\langle F_1,F_2\rangle$ となる.

この証明は Eisenstein 級数の解析的性質が定数項からの寄与で決定することと Gindkin-Karpelevich 公式を用いることにより Eisenstein 級数の $s=n$ での留数が計算されることにより上の命題が示される.

他方で L 関数の式を与えるためには池田-山名リフトの定義に基づいて簡約することにより局所的な積分表示を与える必要がある. 本稿では先行研究と同様に池田-山名リフトのフーリエ展開の具体的な形に基づいて計算している. $F=\mathrm{I}_n(f)$ としたとき, U 上の指標によりフーリエ展開ができることが定義によりわかり,

$$F(g)=\sum_{B\in\mathrm{Her}_n(F)^+}a_F(g;B)$$

により Fourier 展開を定めたとき, 次の性質を持つことがわかる. $Z\in\mathrm{Her}_n(\mathbb{A})$, $A_1\in\mathrm{GL}_n(E)$, $t\in F^\times$ に対して

$$a_F(\boldsymbol{n}_n(Z)\boldsymbol{m}_n(A)\boldsymbol{d}_n(t)g;B)=\psi(\mathrm{tr}(BZ))a_F(g;t^{-1}B[A]).$$

フーリエ係数の性質と Eisenstein 級数の定義などによる簡約化により以下の等式を得られる:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(s;F)&=\int_{\mathcal{Z}(\mathbb{A})\widetilde{\mathcal{P}}(F)\backslash\widetilde{\mathcal{G}}_n(\mathbb{A})}|F(g)|^2\varphi^{(s)}(g)dg\\&=\sum_{B\in\mathrm{Her}_n(F)^+}\int_{\mathcal{Z}(\mathbb{A})U(\mathbb{A})\widetilde{\mathcal{M}}(F)\backslash\widetilde{\mathcal{G}}_n(\mathbb{A})}|a_F(g;B)|^2\varphi^{(s)}(g)dg.\end{aligned}$$

さらに池田-山名リフトのフーリエ級数が局所的な積で表されているため, Euler 展開を考えることができる. $\mathcal{R}_v$ を次にように定義する.

定義 4.3 (局所 Rankin-Selberg 積分)**.**

$$\mathcal{R}_v(X,Y,q_v^{-s})=\int_{\mathrm{Her}_n(F_v)}\widetilde{F}_v(Z_v;X)\widetilde{F}_v(Z_v;Y)|\det Z_v|^s dZ_v.$$

定数 c を

$$c=2^{(n^2-1)d_F}D_E^{-(2n^2-n-1)/2}D_F^{n^2-n-1/2}\prod_{i=2}^{2n}\Lambda(i,\varepsilon_{E/F}^i)^{-1}$$

と定義する. このとき, フーリエ係数の性質により積分領域を局所的な領域の積にすることができ, $\mathcal{R}(s,\mathrm{I}_n(f))$ は $\mathcal{R}_v$ を用いて次にように表される:

$$\mathcal{R}(s,\mathrm{I}_n(f))=c\prod_{v\in\mathbf{f}}\mathcal{R}_v(q_v^{-\mathfrak{s}_v},q_v^{-\bar{\mathfrak{s}}_v},q_v^{-s})\times\left(2^{-(ns+n(n+1)/2)d_F-n\kappa}\prod_{v\in\mathbf{a}}\prod_{i=1}^{n}\Gamma_{\mathbb{C}}(s+\kappa_v-i)\right).$$

よって, $\mathcal{R}_v(X,Y,t)$ を局所 L 関数に対応するように分解を考える必要がある. そのためには先行研究に倣って, Siegel 級数と局所密度との関係に基づいて計算する. 以下, 素点 v が明らかに有限素点のとき, 省略する.

まず, 局所密度とは次で定義される量である.

定義および命題 4.4 (局所密度)**.** n, m を正の整数であって,$n \geqq m$ とする. S を $M_{nm}(\mathcal{O}_E)$ の開かつコンパクトな部分集合とする. このとき, エルミート行列 $A, B \in \widehat{\mathrm{Her}}_n$ および十分大きい正の整数 e に対して次の集合と量を定義する:

$$\mathcal{A}_e(A, B; S) = \{X \in S | A[X] - B \in \mathfrak{p}^e \widehat{\mathrm{Her}}_m\},$$
$$\overline{\mathcal{A}}_e(A, B; S) = \#\mathcal{A}_e(A, B; S)/\mathfrak{p}^e M_{nm}(\mathcal{O}_E).$$

このとき, A が非退化なら, $\lim_{e\to\infty} q^{-2mn+m^2}\overline{\mathcal{A}}_e(A, B; S)$ は収束する. ここで

$$\alpha(A, B; S) = \lim_{e\to\infty} q^{-2mn+m^2}\overline{\mathcal{A}}_e(A, B; S)$$

とおく. また, $S = M_{mn}(\mathcal{O}_E)$ のとき, $\alpha(A, B) = \alpha(A, B; S)$ とし, S が $M_n(\mathcal{O}_E)$ の原始的な元全体としたとき, $\beta(A, B) = \alpha(A, B; S)$ とおく. このとき, $\alpha(A, B)$ のことを A による B の局所密度といい, $\beta(A, B)$ のことを A による B の原始局所密度と呼ぶ.

ここでは, 局所密度と Siegel 級数の関係と局所計算を行うのに重要な命題について述べておく. とくにこれらは次の命題が知られている.

命題 4.5.

$$\Theta_2 = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & \varpi_E^{-\mathfrak{f}} \\ \overline{\varpi}^{-\mathfrak{f}} & 0 \end{pmatrix} & E \text{ が } F \text{ 上分岐しているとき} \\ 1_2 & \text{それ以外} \end{cases}$$

とし, Θ_{2k} を Θ_2 の k 回直和とする. このとき, A が非退化ならば $\alpha(\Theta_{2k}, A) = F(A; q^{-2k})$ である.

これにより Siegel 級数と局所密度の関係がわかる. また, 局所密度と原始局所密度に関しては次のようなことが知られている.

これに伴って, 原始的局所密度に対応する級数と計算上必要な級数を定義する:

$$G(A; X) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{W \in \mathcal{K}_{n,v}^0 \backslash M_n(\mathcal{O}_E)^{nd}} (Xq^n)^{\nu(\det W)} \Pi(W) F(A[W^{-1}]; X),$$
$$\widetilde{G}(A; X, t) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{W \in \mathcal{K}_{n,v}^0 \backslash M_n(\mathcal{O}_E)^{nd}} t^{\nu(\det W)} \Pi(W) \widetilde{F}(A[W^{-1}]; X),$$
$$\mathfrak{B}(A; t) = \frac{\prod_{j=0}^{n-1}(1 - \xi(n+j)q^{n+j}t^2)}{G(A, t^2)}.$$

ただし,

$$\xi(j) = \begin{cases} \xi & j \text{ が奇数} \\ 1 & j \text{ が偶数} \end{cases}$$

である. このとき次の級数の等式が示せる.

命題 4.6. $\mathfrak{L}(X, t)$ を次のように定義する:

$\mathfrak{L}(X, t)$

$$= \begin{cases} \prod_{i=1}^{n}(1 - q^{-n+2i-1}X^2t^2)^{-1}(1 - q^{-n+2i-1}X^{-2}t^2)^{-1} & E \text{ が } F \text{ 上の惰性拡大のとき} \\ \prod_{i=1}^{n}(1 - q^{-n/2+i-1/2}Xt)^{-2}(1 - q^{-n/2+i-1/2}X^{-1}t)^{-2} & E = F \oplus F \text{ のとき} \\ \prod_{i=1}^{n}(1 - q^{-n/2+i-1/2}Xt)^{-1}(1 - q^{-n/2+i-1/2}X^{-1}t)^{-1} & E \text{ が } F \text{ 上の分岐拡大のとき.} \end{cases}$$

非退化エルミート行列 $A \in \mathrm{Her}_n(F)$ に対して,

$$\sum_{W \in M_n(\mathcal{O}_E)^{nd}/\mathcal{K}^0_{n,v}} \widetilde{F}(A[W];X) t^{\mathrm{ord}(N_{E/F}(\det W))} = \mathfrak{B}(A, q^{-n/2}t)\widetilde{G}(A;X,t)\mathfrak{L}(X, q^{n/2-1/2}t)$$

が成立する.

これは [19] にある Eisenstein のフーリエ係数に関する事実と Hecke 固有値に関する比較により証明できる.

ここまでの補題と命題により $\mathcal{R}$ の計算を行うことができる. まず, 局所 Rankin-Selberg 積分を $\widetilde{G}$ の積分に書き換える. $S \subset \mathrm{Her}_n(F)$, $d \in F^\times$ に対して S_d を $\{Z \in S | \det Z \in dN_{E/F}(\mathfrak{d}_{E/F}) \setminus \{0\}\}$ により定める. このとき, 積分 $R(d;X,Y,q^{-s})$ を次で定める:

$$R(d;X,Y,q^{-s}) = \int_{\mathrm{Her}_n(F)_d} \widetilde{F}(Z;X)\widetilde{F}(Z;Y)|\det Z|^s dZ.$$

この積分により $\mathcal{R}$ は次の形の和に分解される:

$$\mathcal{R}(X,Y,t) = \begin{cases} R(d;X,Y,t) & E \text{ が } F \text{ の分岐拡大でないかつ } d \in \mathcal{O}^\times \\ \sum_{d \in \mathcal{O}^\times/N_{E/F}(\mathcal{O}_E)} R(d;X,Y,t) & E \text{ が } F \text{ の分岐拡大.} \end{cases}$$

さらに積分 R^0 を次で定義する:

$$R^0(d;X,Y,t) = \int_{\mathrm{Her}_n(F)^{nd}_d} G(Z;q^{-n-2y})|\det Z|^{s-y}\mathfrak{B}(Z;q^{-3n/2-y-s})\widetilde{G}(Z;q^{-x},q^{-n-y-s})dZ.$$

このとき, 命題 4.6 により次の等式が示される:

$$\mathcal{R}(d;X,Y,t) = q^{(n-1)y\mathfrak{f}/2}\mathcal{R}^0(d;X,Y,t)\mathfrak{L}(X, q^{-n/2-1/2}Yt).$$

次に, R^0 と次で定める Koecher-Maass 積分 P_r との関係を考える.

定義 4.7 (Koecher-Maass 積分)**.** $v \in \mathbf{f}$, $d \in F^\times$, 正の整数 r に対して次の積分により Koecher-Maass 積分 P_r を与える:

$$P_r(d;X,t) = \int_{\widehat{\mathrm{Her}}_{r,d}} \widetilde{F}(Z;X)|\det Z|^s dZ.$$

さらに P_r に関連する積分 $\widetilde{P}_r, Q_r$ を次で与える:

$$\widetilde{P}_r(d;X,Y,t) = \int_{\widehat{\mathrm{Her}}_{r,d}} \widetilde{G}(Z;X,tY)|\det Z|^{s-y}dZ,$$

$$Q_r(d;X,Y,t) = \int_{\widetilde{\mathrm{Her}}_{r,d}} \widetilde{G}(Z;X,tY)|\det Z|^{s-y}dZ.$$

以下の二つの命題を示すことにより R と P_r の関係が明示できる.

命題 4.8.

$$\mathfrak{l}(K;t,r) = \begin{cases} \prod_{i=1}^r (1 - t^4 q^{-2r-2+2i}) & E \text{ は } F \text{ の惰性拡大} \\ \prod_{i=1}^r (1 - t^2 q^{-r-1+i})^2 & E = F \oplus F \\ \prod_{i=1}^r (1 - t^2 q^{-r-1+i}) & E \text{ は } F \text{ の分岐拡大} \end{cases}$$

とおく. このとき, 次の等式を得る:

$$\widetilde{P}_r(d;X,Y,t) = P_r(d,X,tY^{-1})\mathfrak{l}(K;t,r).$$

命題 4.9. $\hat{\xi}$ を E が F の惰性拡大のときに $\sqrt{-1}$, $E = F \oplus F$ のとき, 1 とおく. このとき, $d \in F^{\times}$ について次の等式が成り立つ.

(1) E は F 上の分岐拡大でないとする. このとき, 次の等式を得る:

$$\widetilde{P}_m(d; \hat{\xi}^{-m}X, Y, \hat{\xi}^{-m}t) = \sum_{r=0}^{m} \frac{1}{\phi_{m-r}(\hat{\xi}q^{-1})} Q_r(d; \hat{\xi}^{-r}X, Y, \hat{\xi}^{-r}t).$$

(2) E を F 上分岐拡大とする. このとき, 次の等式を得る:

$$\begin{aligned}&(tY^{-1})^{-\mathfrak{f}\cdot[m/2]}\widetilde{P}_m((-\varpi^{\mathfrak{f}})^{[m/2]}d; X, Y, t)\\ &= \begin{cases} \displaystyle\sum_{r=0}^{(m-1)/2} \frac{1}{\phi_{(m-2r-1)/2}(q^{-2})}(tY^{-1})^{-r\mathfrak{f}} Q_{v,2r+1}((-\varpi^{\mathfrak{f}})^r d; X, Y, t) & m \text{ が奇数} \\ \displaystyle\sum_{r=0}^{m/2} \frac{1}{\phi_{(m-2r)/2}(q^{-2})}(tY^{-1})^{-r\mathfrak{f}} Q_{v,2r}((-\varpi^{\mathfrak{f}})^r d; X, Y, t) & m \text{ が偶数} \end{cases}\end{aligned}$$

上二つの命題を結びつけることで次の系の形にまとめることができる.

系. (1) E を F 上の惰性拡大と仮定する. このとき, 次の等式を得る:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^0(d; X, Y, t) = \sum_{r=0}^{n} (q^r \xi Y^2)^{n-r} P_r(d, \hat{\xi}^{n-r}X, \hat{\xi}^{n-r}tY^{-1}) \prod_{i=1}^{r}(1 - t^4 q^{-2r-2-2n+2i})\\ \times \frac{\prod_{i=1}^{n-r}(1-(\hat{\xi}q)^{-r-n-i}t^2)\prod_{i=0}^{r-1}(1-\hat{\xi}^n(\hat{\xi}q)^i Y^2)}{\phi_{n-r}(\hat{\xi}q^{-1})}.\end{aligned}$$

(2) $E = F \oplus F$ と仮定する. このとき, 次の等式を得る:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^0(d; X, Y, t) = \sum_{r=0}^{n} (q^r Y^2)^{n-r} P_r(d, X, tY^{-1}) \prod_{i=1}^{r}(1 - t^2 q^{-r-1-n+i})^2\\ \times \frac{\prod_{i=1}^{n-r}(1-q^{-r-n-i}t^2)\prod_{i=0}^{r-1}(1-q^i Y^2)}{\phi_{n-r}(q^{-1})}.\end{aligned}$$

(3) E を F 上分岐拡大であって, n が奇数と仮定する. このとき, 次の等式を得る:

$$\begin{aligned}&\mathcal{R}^0(d; X, Y, t)\\ &= \sum_{r=0}^{(n-1)/2} (tY^{-1})^{(n-2r-1)\mathfrak{f}/2} P_{v,2r+1}((-1)^{(n-2r-1)/2}d, X, tY^{-1}) \prod_{i=1}^{r}(1 - t^2 q^{-r-1-n+i})\\ &\quad \times \frac{(q^{2r+1}Y^2)^{(n-2r-1)/2}\prod_{i=1}^{(n-2r)/2}(1-q^{-2r-n-2i-1}t^2)\prod_{i=0}^{r-1}(1-q^{2i+1}Y^2)}{\phi_{(n-2r-1)/2}(q^{-2})}.\end{aligned}$$

同じように P_m に対しても $\widetilde{F}$ と $\widetilde{G}$ の関係式を用いた簡約化を用いることでエルミート行列の空間のゼータ関数と結びつけることができ, q^{-s} の有理多項式になることが計算できる. ここで, $\widetilde{F}$ の関数等式と零点および極の比較により次の等式を得ることができる.

定理 4.10. (1) E を F 上の惰性拡大と仮定する．このとき, $d \in \mathcal{O}^{\times}$ に対して,

$$P_m(d;X,t) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{m}(1+(-q)^{-i}tX^{-1})\prod_{i=1}^{m}(1+(-q)^{-i}tX)}$$

が成立する．

(2) $E = F \oplus F$ と仮定する．このとき, $d \in \mathcal{O}^{\times}$ に対して,

$$P_m(d;X,t) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{m}(1-q^{-i}tX^{-1})\prod_{i=1}^{m}(1-q^{-i}tX)}$$

が成立する．

(3) E を F 上の分岐拡大とする．このとき, $d \in \mathcal{O}^{\times}$ に対して, 次の等式が成立する．もし, m が偶数なら,

$$\begin{aligned} P_m(d;X,t) = \frac{t^{-\mathfrak{f}m/2}}{2}\Big(&\frac{1}{\prod_{i=1}^{m/2}(1-q^{-2i+1}tX^{-1})\prod_{i=1}^{m/2}(1-tXq^{-2i})} \\ &+ \frac{\varepsilon_{E/F}((-1)^{m/2}d)}{\prod_{i=1}^{m/2}(1-q^{-2i}tX^{-1})\prod_{i=1}^{m/2}(1-tXq^{-2i+1})}\Big) \end{aligned}$$

となる．もし m が奇数なら,

$$P_m(d;X,t) = \frac{t^{-\mathfrak{f}(m-1)/2}}{2\prod_{i=1}^{(m+1)/2}(1-q^{-2i+1}tX^{-1})\prod_{i=1}^{(m-1)/2}(1-tXq^{-2i+1})}$$

が成立する．

この定理と系を結び付け, 再度 $\widetilde{F}$ の関数等式および極と零点の比較を行うと次の定理を得る．

定理 4.11. (1) E は F 上惰性拡大と仮定する．このとき,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(d;X,Y,t) = \hat{\mathcal{R}}(X,Y,t) = &\prod_{i=1}^{n}(1-q^{-n+1}(-q)^{-(i-1)}t^2) \\ &\times \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(1+(-q)^{-i}XYt)(1+(-q)^{-i}XY^{-1}t)} \\ &\times \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(1+(-q)^{-i}X^{-1}Yt)(1+(-q)^{-i}X^{-1}Y^{-1}t)} \end{aligned}$$

が成り立つ

(2) E は F 上分裂していると仮定する．このとき,

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{R}}(X,Y,t) = \mathcal{R}(d;X,Y,t) = &\prod_{i=1}^{n}(1-q^{-n+1}q^{-(i-1)}t^2) \\ &\times \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(1-q^{-n+i-1}XYt)(1-q^{-n+i-1}XY^{-1}t)} \\ &\times \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(1-q^{-n+i-1}X^{-1}Yt)(1-q^{-n+i-1}X^{-1}Y^{-1}t)} \end{aligned}$$

が成り立つ

(3) E は F の分岐拡大と仮定する．このとき，

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(d;X,Y,t)=&\prod_{i=1}^{m+1}(1-q^{-n+1}q^{-(2i-2)}t^2)\\ &\times\frac{1}{\prod_{i=1}^{m+1}(1-q^{-n+2i-2}XYt)(1-q^{-n+2i-2}X^{-1}Y^{-1}t)}\\ &\times\frac{1}{\prod_{i=1}^{m}(1-q^{-n+2i-2}X^{-1}Yt)(1-q^{-n+2i-2}XY^{-1}t)}\end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{R}}(X,Y,t)=&\,q^{-s\mathfrak{f}(n-1)/2}\prod_{i=1}^{m+1}(1-q^{-n+1}q^{-(2i-2)}t^2)\\ &\times\frac{1}{\prod_{i=1}^{m+1}(1-q^{-n+2i-2}XYt)(1-q^{-n+2i-2}X^{-1}Y^{-1}t)}\\ &\times\frac{1}{\prod_{i=1}^{m+1}(1-q^{-n+2i-2}X^{-1}Yt)(1-q^{-n+2i-2}XY^{-1}t)}\end{aligned}$$

が成立する．

これにより Rankin-Selberg 積分の局所表示を得ることができる．これらをまとめて $\mathcal{R}(s,$ $\mathrm{I}_n(f))$ との等式にまとめると次の定理の形になる．

定理 4.12.

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(s,I_n(f))=&\,2^{(n(n-1)/2-ns-1)[E:\mathbb{Q}]}D_F^{-(n-1)s+(n^2-n)}D_E^{(n-1)s/2-(2n^2-n-1)/2}\prod_{i=2}^{2n}\Lambda(i,\varepsilon_{E/F}^{i})^{-1}\\ &\times\prod_{i=1}^{n}L(s-n+i,\mathrm{Ad},f,\varepsilon_{E/F}^{i-1})L(s-n+i,\varepsilon_{E/F}^{i-1})L(2s-n+i,\varepsilon_{E/F}^{i-1})^{-1}\\ &\times\left(\prod_{v\in\mathbf{a}}\prod_{i=1}^{n}\Gamma_{\mathbb{C}}(s+\kappa_v-n+i-1)\right).\end{aligned}$$

上の表示において $s=n$ の留数をとることにより次の主結果を得ることができた．

主定理. F を総実代数体とし，$f\in S_\kappa(\Gamma_{\mathfrak{o}})$ を Hilbert 尖点形式であって重さ $\boldsymbol{\kappa}=(\kappa_v)_{v\in\mathbf{a}}$ の Hecke 固有形式とし，$\kappa=\sum_{v\in\mathbf{a}}\kappa_v$ とする．このとき，

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{I}_n(f),\mathrm{I}_n(f)\rangle=&\,2^{-\kappa n-(n^2+n+2)[E:\mathbb{Q}]/2}D_E^{-(n+2)(n-1)/4}D_F^{-n/2}\prod_{i=2}^{2n}\Lambda(i,\varepsilon_{E/F}^{i})^{-1}\\ &\times\left(\prod_{v\in\mathbf{a}}\prod_{i=1}^{n}\frac{\Gamma_{\mathbb{R}}(n+i)}{\Gamma_{\mathbb{C}}(i)\Gamma_{\mathbb{R}}(i)}\right)\prod_{i=1}^{n}\Lambda(i,\mathrm{Ad},f,\varepsilon_{E/F}^{i-1}).\end{aligned}$$

5 今後の課題

現状ではいくつかの課題が残されている．

- n が奇数の場合に限っている．

- π が $\mathrm{Ind}_{B_{\mathrm{GL}_2}}^{\mathrm{GL}_2}(\alpha_F^{\mathfrak{s}_v} \boxtimes \alpha_F^{-\mathfrak{s}_v})$ に限定されている.
- 局所関数等式がフーリエ係数が $\widetilde{F}$ により定式化されていることと $\widetilde{F}$ の関数等式を用いることによって計算しており, 表現論的な側面が見えづらい.

この部分の解決案として現在, 前述の local Rankin-Selberg 積分と local Koecher-Maass 積分を表現論的な側面から見直し, Jacquet-Langlands の関数等式や Jacquet-Shalika の論文との類似が見られないかを模索中である.

謝辞

本研究集会において発表の機会を与えていただき, 世話人の金子 昌信 先生 (九州大学), 岸 康弘 先生 (愛知教育大学), 権 寧魯 先生 (九州大学), 松坂 俊輝 先生 (九州大学) に深く感謝申し上げます.

参考文献

[1] W. Casselman, Introduction to the theory of admissible representations of p-adic reductive groups, preprint, available at `https://personal.math.ubc.ca/~cass/research/publications.html`

[2] S. S. Gelbart, I. I. Piatetski-Shapiro and S. J. Rallis, Explicit constructions of automorphic L-functions, Lecture Notes in Mathematics, 1254, Springer, Berlin, 1987.

[3] T. Ibukiyama and H. Katsurada, Koecher-Maaß series for real analytic Siegel Eisenstein series, In: Automorphic forms and Zeta functions, Proceedings of the conference in memory of Tsuneo Arakawa, 170–197, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2006.

[4] T. Ibukiyama, H. Katsurada and H. Kojima, Period of the Ikeda-Miyawaki lift, J. Number Theory **269** (2025), 341–369.

[5] A. Ichino and T. Ikeda, On the periods of automorphic forms on special orthogonal groups and the Gross-Prasad conjecture, Geom. Funct. Anal. **19** (2010), no. 5, 1378–1425.

[6] T. Ikeda, On the lifting of Hermitian modular forms, Compos. Math. **144** (2008), no. 5, 1107–1154.

[7] T. Ikeda, On the lifting of elliptic cusp forms to Siegel cusp forms of degree $2n$, Ann. of Math. (2) **154** (2001), no. 3, 641–681.

[8] R. Jacobowitz, Hermitian forms over local fields, Amer. J. Math. **84** (1962), 441–465.

[9] H. Katsurada, Koecher-Maass series of the Ikeda lift for $U(m,m)$, Kyoto J. Math. **55** (2015), no. 2, 321–364.

[10] H. Katsurada, On the period of the Ikeda lift for $U(m,m)$, Math. Z. **286** (2017), no. 1-2, 141–178.

[11] H. Katsurada, Period of the adelic Ikeda lift for $U(m,m)$, Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. **88** (2018), no. 1, 67–86.

[12] H. Katsurada and H. Kawamura, Ikeda's conjecture on the period of the Duke-Imamoḡlu-Ikeda lift. Proc. Lond. Math. Soc. (3), **111** (2015), no. 2, 445–483.

[13] R. P. Langlands, On the functional equations satisfied by Eisenstein series, Lecture Notes in Mathematics, 544, Springer, Berlin, 1976.

[14] I. G. Macdonald, The volume of a compact Lie group, Invent. Math. **56** (1980), no. 2, 93–95

[15] A. Murase and T. Sugano, Inner product formula for Kudla lift, In: Automorphic forms and Zeta functions, Proceedings of the conference in memory of Tsuneo Arakawa, 280–313, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2006.

[16] H. Saito,, Explicit formula of orbital p-adic zeta functions associated to symmetric and Hermitian matrices, Comment. Math. Univ. St. Paul. **46** (1997), no. 2, 175–216.

[17] W. Scharlau, Quadratic and Hermitian forms, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 270, Springer, Berlin, 1985.

[18] G. Shimura, Euler products and Eisenstein series, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 93, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[19] G. Shimura, Arithmeticity in the theory of automorphic forms, Mathematical Surveys and Monographs, 82, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[20] S. Yamana, On the lifting of Hilbert cusp forms to Hilbert-Hermitian cusp forms, Trans. Amer. Math. Soc. **373** (2020), no. 8, 5395–5438.

[21] D. Zagier, Modular forms whose Fourier coefficients involve zeta functions of quadratic fields, In: Modular functions of one variable VI, 105–169, Lecture Notes in Mathematics, 627, Springer, Berlin, 1977.