荒川リフト

村瀬 篤 (京都産業大学) 成田 宏秋 (早稲田大学)

1 導入

「荒川リフト」という題名は立教大学の教授であった荒川恒男先生の名前に由来する．荒川先生と言えば多重ゼータ値の研究などで若手世代には知られているかもしれないが, 実は正則Siegel保型形式やヤコビ形式の研究でも有名である．しかし, 荒川氏には非正則保型形式の研究業績があるのを御存知であろうか？これに関する出版論文として [1], [2] があるが, これらは四元数ユニタリー群 $Sp(1,q)$ (不定符号斜交群) 上に正則保型形式と同じような扱いで研究できる非正則実解析的保型形式があることを教えているものである．もっと言えばこれは次元公式 (跡公式) に関する論文で, 正則保型カスプ形式の場合の Godement の積分核に当たるものが, 正則保型形式の場合のように保型因子を用いて簡明な表示で表せて, これが正則保型形式との一つの類似性を示している．しかし, これだけでは荒川氏がどれだけこの $Sp(1,q)$ 上の保型形式の正則保型形式との類似性に迫る研究を行ったか, その全貌は分からない．実はこの荒川氏の研究には未発表の研究ノートというのがある．本研究はこの未発表ノートからの示唆が出発点となったものである．この原稿のタイトルの「荒川リフト」とは, 荒川氏がこの保型形式の研究を行っていた 1980 年代に, 様々な 1 変数保型形式から多変数正則保型形式へのテータリフトによる構成が与えられたが, その類似を $Sp(1,q)$ の場合で考えたもので勿論非正則保型形式である．正確には荒川氏は楕円カスプ形式から $Sp(1,q)$ を含む行列サイズの大きい直交群へのテータリフトを考え, それを $Sp(1,q)$ に制限してリフトを与えている．荒川氏が研究した保型形式は無限素点の表現論の観点から Gross と Wallach[4] が導入した「四元数離散系列表現 (quaternionic discrete series representation)」を生成する保型形式と理解されるもので, 最近 [9] が基礎となって発展している Aaron Pollack 氏等による研究が有名であるが, 実は荒川氏が既に 80 年代にこの保型形式の面白い特徴を (特別な場合でということになるが) 発見していたのである．更にコメントとして荒川氏のこの制限を使うアイデアは Pollack 氏の論文 [10] に影響を与えたことを述べておく．

本研究は発表者の成田が若手であった時期に, 村瀬氏から共同研究の誘いを受けてはじまったもので, この荒川リフトをアデール的に再定式化し, 荒川氏が与えたように楕円保型形式からのリフトとして見るのではなく, dual pair $(Sp(1,q), O^*(4))$ に対するテータ対応として定式化するのが自然であるという観点に立脚している．ここに $O^*(4)$ は四元数環係数の 2 次歪エルミート形式によって定義される直交群の内部形式である．この群上の保型形式として定符号四元数環上の保型形式と楕円カスプ形式の積を取り, そのテータリフトとして我々は定式化する．この定式化で Hecke 作用素に関するよい交換関係式 (Commutation relation) を満たすことを示したのが [5] である．しかし [5] では, 技術的な事情から dual pair の群を相似変換の因子 (similitude factor) で太らせて Hecke 作用素を考えていたが, 今回の研究でこの技術的問題は解消された．また [5] にはなかった成果として, 「Godement の核関数を用いた交換関係式」を導いたが, これは Hecke 作用素の交換関係式の「無限素点類似」と呼ぶべきもので, このよ

うな結果は聞いたことがない．Godement 核とはこの場合正確には, $Sp(1,1)$ の四元数離散系列と $O^*(4)$ の正則離散系列表現の行列係数のことである．また数論的な成果としてこのテータリフトの内積公式の明示式を与えることで, 四元数離散系列表現を生成する保型形式が荒川リフトの像であるかどうかの判定条件を L 関数の 0 での特殊値の非自明性の観点から与えたのがある．これは Hecke 作用素の交換関係式の詳細な理解から得られた成果である．

2　記号と基本的な設定

2.1　群と対称空間

保型形式は複素上半平面, Siegel 上半空間などの対称空間上で定義する方法と, 対称空間に対応する Lie 群または簡約代数群のアデール群上の関数として定義する方法があるが, この研究では後者を採用している．そのために $\mathbb{Q}$ 上の定符号四元数環 B を導入する．d_B をその判別式とする．このとき $\mathbb{Q}$ 上の 2 つの単純代数群 $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ を次の通りに定義する:

$$\mathcal{G}(\mathbb{Q}) := \{g \in M_2(B) \mid {}^t\bar{g}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} g = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\},$$
$$\mathcal{H}(\mathbb{Q}) := \{h \in M_2(B) \mid {}^t\bar{h}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} h = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\}.$$

ここに $\bar{g}$, $\bar{h}$ と言うのは g, h の各係数に B の主対合を作用させたものである．これらは共に「四元数ユニタリー群」と呼べるものであるが, $\mathcal{G}$ の実数値点の群 $\mathcal{G}(\mathbb{R})$ は「不定符号斜交群 (シンプレクティック群)」と呼ばれるもので $Sp(1,1)$ という記号がよく使われる．Siegel 保型形式が定義される斜交群の内部形式の例である．正確には次数 4 の行列で定義される斜交群 $Sp(2)$ (または $Sp(4)$) のコンパクトでない内部形式である．一方 $\mathcal{H}$ の実数値点の群 $\mathcal{H}(\mathbb{R})$ は $O^*(4)$ との記されるもので, これも次数 4 の直交群の内部形式として知られコンパクトでない．

後者の群上には正則保型形式がある．実際, 対応する対称空間は実は複素上半空間であることから容易に分るであろう．しかしここで導入で $O^*(4)$ 上の保型形式として「定符号四元数環上の保型形式と (複素上半平面上の) 楕円保型形式の積」と述べたことを思い出して欲しい．群 $O^*(4)$ は $SL_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{H}^{(1)}$ と偶発的同種 (accidental isogeny) であり, Hamilton の四元数環 $\mathbb{H}$ の被役ノルム 1 の元の成す群 $\mathbb{H}^{(1)}$ の因子がある．つまり上半平面上の保型形式は $SL_2(\mathbb{R})$) の保型形式と見れるが, これは $O^*(4)$ 上の保型形式と一緒ではない．ここに荒川氏が楕円保型形式からのリフトを考えた一方で, 我々は定符号四元数環上の保型形式と楕円保型形式の積からのテータリフトで考えるという定式化の違いが生じた背景がある．

一方, 前者の群に対応する対称空間は 4 次元実双曲空間で Hamilton の四元数環 $\mathbb{H}$ 上に次のように実現できる:

$$\{\tau \in \mathbb{H} \mid \tau + \bar{\tau} > 0\}.$$

注意したいのは, この対称空間は複素解析的構造を持たず複素解析が使えない．つまりこの上には正則関数が存在せず, これは群 $\mathcal{G}$ 上には正則保型形式が存在しないことに対応している．

2.2　$Sp(1,1)$ 上の保型形式

ここで「荒川リフト」によって構成する保型形式について定義を与える．まず定義するにあたり, 正則保型形式の場合, その解析的条件は Cauchy-Riemann 条件という 1 階の微分作用素

を使って記述されるが, この非正則な設定でも, このような都合の良い階数 1 の微分作用素があるかということを問うてみる. 実は四元数離散系列表現を含む一般の離散系列表現は群上に幾何学的に実現できて, 「Dirac-Schmid 作用素」という 1 階の微分作用素 ([11, Section 7], [14, Section 2.1] 参照) を使う. これが Cauchy-Riemann 条件の類似を与える. 実際, 離散系列表現の中でも正則離散系列があり, このときの Dirac-Schmid 作用素は本質的に Cauchy-Riemann 作用素になる.

この節ではまず四元数離散系列表現を生成する保型形式を, 実 Lie 群としての四元数ユニタリー群 $Sp(1,q)$ を選び与えてみる. そのために $K \simeq Sp^*(1) \times Sp^*(q)$ を $Sp(1,q)$ の極大コンパクト群とする. $Sp^*(1)$, $Sp^*(q)$ は定符号の斜交群を表しコンパクトである. 正の整数 κ に対し K の表現 (τ_κ, V_κ) を, $Sp^*(1) \simeq \mathbb{H}^{(1)} \simeq SU(2)$ 上では 2 次元標準表現の κ 回対称テンソル表現とし $Sp^*(q)$ 上では自明表現として, これらの外部テンソル表現により定義する.

離散系列表現は極大コンパクト群への制限を考えた時に生じる「極小 K タイプ (minimal K-type)」という特別な極大コンパクト群の表現によってかなり特徴付けられるが, $Sp(1,q)$ の四元数離散系列表現は (τ_κ, V_κ) という少々「やせた」極大コンパクト群の表現を極小 K タイプとして持つことが特徴的である. この四元数離散系列表現に対する Dirac-Schmid 作用素を D_κ と記す. この微分作用素は拙著 [7, Section 5] で具体的に記述されている.

定義 2.1. $\kappa > 2q-1$ とし, $Sp(1,q) \supset \Gamma$ を数論的部分群とする. C^∞ 関数 $f : Sp(1,q) \to V_\kappa$ が以下の条件を満たすとき f は四元数離散系列表現を生成する Γ に関する保型形式と呼ぶ.

1. $Sp(1,q)$ の数論的部分群 Γ に関して左不変で K に関し τ_κ による右同変性を満たす, つまり
$$f(\gamma g k) = \tau_\kappa(k)^{-1} f(g) \ \ \forall(\gamma, g, k) \in \Gamma \times Sp(1,q) \times K.$$
2. $D_\kappa \cdot f = 0$.
3. $q = 1$ の時は緩増加条件を課す.

ここで $q > 1$ のとき条件 1,2 より緩増加条件 3 が自動的に成り立つことが [7, Theorem 7.1] で証明されていることを注意する. 多変数の正則保型形式でも同様の事実が知られており, 正則の場合の名称に倣って Köcher 原理と呼んでいる.

ここで四元数離散系列表現の「Godement の再生核」を用意する. この原稿では $q = 1$ の場合のみを扱う. $\mathbb{H}$ の被役ノルムを N とし σ_κ を $Sp^*(1)$ の κ 回対称テンソル表現とするとこれは $\mathbb{H}^\times$ の表現に自然に伸びる. このとき $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sp(1,1)$ に対して $\Delta_g := \frac{1}{2}(a+b+c+d) \in \mathbb{H}^\times$ とすると
$$\Omega_\kappa(g) := \sigma_\kappa(\Delta_g)^{-1} N(\Delta_g)^{-1}$$
は $Sp(1,1)$ 上の $\mathrm{End}(V_\kappa)$ に値を取る関数で, これは四元数離散系列表現の行列係数と呼ばれ Godement の核関数に相当するものである. 荒川氏の保型形式の定義は 2 番目の条件を Dirac-Schmid 作用素ではなく, この再生核を使って定義している. ただしそのためには再生核との畳み込み積の積分が収束する必要があるため $\kappa > 4$ という条件が必要でこれは「離散系列表現が可積分」という条件を意味する. 離散系列表現の同値な定義の一つに「表現の行列係数が 2 乗可積分」というのがあるが, これよりも強い条件である. それから追加の注意として, 正則離散系列以外の離散系列表現の行列係数は一般にこのような簡明な形に掛けることはまず期待できない. 荒川氏は高橋礼司氏の直交群上の球関数論 ([12] 参照) から独力でこのような簡明

な表示を持つ再生核を見つけたようである．実際 $Sp(1,1)$ は直交群 $O(1,4)$ と局所同型である．荒川氏は一般の q に対しても, 四元数離散系列表現の行列係数の簡明な表示を与えている．これらの行列係数の「保型因子を用いた簡明な表示」については [1, Section 1], [2, Section 3.2] を参照されたい．

3　荒川リフトの定式化と結果

3.1　荒川リフトの定式化

荒川リフトの定式化のために Weil 表現を導入する．$B_{\mathbb{A}}^{(2,1)}$ を B のアデール化 $B_{\mathbb{A}}$ を成分とする次数 2 の縦ベクトルの空間を表し, $\mathcal{S}(B_{\mathbb{A}}^{(2,1)})$ を $B_{\mathbb{A}}^{(2,1)}$ 上の Schwartz-Bruhat 関数の空間とする．通常 Weil 表現はこの空間を表現空間とするが, 構成したい保型形式は V_κ 値であることから, 表現空間は $\mathcal{S}(B_{\mathbb{A}}^{(2,1)})\otimes \mathrm{End}(V_\kappa)$ に取る．このとき $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$ の標準的な非自明指標 ψ を与え, $\mathcal{G}(\mathbb{A})\times\mathcal{H}(\mathbb{A})$ の Weil 表現 r を以下で定義する:

- $r(h,1)\varphi(X)=\varphi({}^t\bar{h}X)\ \ (h\in\mathcal{H}(\mathbb{A}),$
- $r(1,\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \bar{\alpha}^{-1}\end{pmatrix})\varphi(X)=N(\alpha)^2\varphi(X\alpha)\ \ (\alpha\in B_{\mathbb{A}}^{\times}),$
- $r(1,\begin{pmatrix}1 & \beta\\ 0 & 1\end{pmatrix})\varphi(X)=\psi(-\mathrm{tr}(\beta{}^t\bar{X}JX)\varphi(X)\quad(\beta\in B_{\mathbb{A}}\ \ \text{s.t.}\ \ \beta+\bar{\beta}=0).$

ここに tr は四元数環 b の被役トレースを表し $J=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ である．

次にテータリフトを与えるためのテータ積分核を与える．そのために B_p を B の素数 p (または有限素点 p) での p 進完備化とし, B の極大整環 $\mathcal{O}$ の p 進完備化を $\mathcal{O}_p$ とする．これは $p|d_B$ のとき, 極大イデアル $\mathfrak{P}_p$ を一意的に持つ．このとき $B_p^{(2,1)}$ の局所極大格子 L_p を

$$L_p:=\begin{cases}(\mathcal{O}_p)^{(2,1)} & (p\nmid d_B)\\ {}^t(\mathcal{O}_p\oplus\mathfrak{P}_p^{-1}) & (p\mid d_B)\end{cases}$$

で与える． 以上の準備のもと $\varphi_0\in\mathcal{S}(B_{\mathbb{A}}^{(2,1)})\otimes\mathrm{End}(V_\kappa)$ を $X=X_fX_\infty\in B_{\mathbb{A}}^{(2,1)}$ $(X_f\in\prod_{p<\infty}L_p,\ X_\infty\in\mathbb{H}^{(2,1)})$ に対して,

$$\varphi_0(X):=\mathrm{char}_{L_f}(X_f)\exp(-2\pi{}^t\overline{X_\infty}X_\infty)\sigma_\kappa((1,-\sqrt{-1})\bar{X_\infty})$$

と定義する．これを試験関数としてテータ積分核を以下で与える:

$$\theta(h,g):=\sum_{X\in B^{(2,1)}}r(h,g)\varphi(X).$$

このテータ積分核により荒川リフトを以下のように定義する．

定義 3.1. $\mathcal{H}(\mathbb{A})(O^*(4)$ に対応) 上の保型形式 f を, 重さ κ でレベル 1 の楕円カスプ形式と $B_{\mathbb{A}}^{\times}$ の中心指標が自明な右 $\prod_{p<\infty}\mathcal{O}_p^{\times}$ 不変の重さ σ_κ の保型形式の積とする．このとき荒川リフト $\mathcal{L}(f)$ を

$$\mathcal{L}(f)(g):=\int_{\mathcal{H}(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{H}(\mathbb{A})}\theta(h,g)f(h)dh$$

で定義する．

以下の結果は先行研究において証明されている.

命題 3.2. $\kappa > 4$ とのき, $\mathcal{L}(f)$ は無限素点で四元数離散系列表現を生成する保型形式である.

荒川氏は $q = 1$ の場合に, 未発表ノートにおいて非アデール的な文脈で, 再生核の条件を示すことで証明している. $q \geq 1$ の場合で荒川氏の証明を拡張したのは [8] で, これは四元数離散系列を生成する保型形式の Fourier-Jacobi 展開の理論 [7] を使う. アデール的定式化での証明は [6] で与えられている.

3.2 結果

まず荒川リフトが各有限素点 p において, $\mathcal{H}(\mathbb{Q}_p)$ の Hecke 環から $\mathcal{G}(\mathbb{Q}_p)$ の Hecke 環への環としての準同型写像を引き起こすことの結果を述べる. そのために $\mathcal{G}$ と $\mathcal{H}$ の各有限素点 p での Hecke 環を定義するために各有限素点での極大コンパクト群を

$$K_p := \{g \in \mathcal{G}(\mathbb{Q}_p) \mid gL_p = L_p\},$$
$$U_p := \{h \in \mathcal{H}(\mathbb{Q}_p) \mid hL'_p = L'_p\},$$

により定める. ここに $L'_p := \mathcal{O}_p^{(2,1)}$ である. 上の定義は分岐素点 $p \mid d_B$ に対しても与えられていることを注意する. $\mathcal{H}(\mathcal{G}(\mathbb{Q}_p), K_p)$ を両側 K_p 不変性で定義される $\mathcal{G}$ の p での Hecke 環とし, $\mathcal{H}(\mathcal{H}(\mathbb{Q}_p), U_p)$ の両側 U_p 不変性で定義される $\mathcal{H}$ の p での Hecke 環とする. 以下の結果は古典的な Eichler によるテータ級数への Hecke 作用素の作用の研究 ([3] 参照) を原型と考え「Eichler commutation relation (交換関係式)」と呼んでいる.

定理 3.3. 全ての素数 (有限素点)p に対して, 荒川リフト $f \mapsto \mathcal{L}(f)$ は環準同型写像

$$\nu : \mathcal{H}(\mathcal{H}(\mathbb{Q}_p, U_p) \to \mathcal{H}(\mathcal{G}(\mathbb{Q}_p), K_p)$$

を引き起こす. しかも生成元のレベルでの像が具体的に記述できる.

Hecke 作用素は当然, 保型 L 関数の研究に自然に応用される.

定理 3.4. f が全ての有限素点において Hecke 同時固有形式なら, 荒川リフト $\mathcal{L}(f)$ と f の標準 L 関数 (それぞれ $p \nmid d_B$ での次数が 5 と 4) について

$$L_p(s, \mathcal{L}(f), \mathrm{std}) = \zeta_p(s) L_p(s, f, \mathrm{std})$$

が全ての有限素点 p で成り立つ.

更に我々は Eichler commutation relation の無限素点類似を得ていることもここに言明すべきであろう. そのために $\mathcal{H}(\mathbb{R})(= (O^*(4))$ の正則保型形式の重さ κ の再生核を

$$\omega_\kappa(h) := \sigma_\kappa(\delta_h)^{-1} N(\delta_h)^{-1} \quad (h \in \mathcal{H}(\mathbb{R}))$$

で与える. ここに $h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{H}(\mathbb{R})$ に対して $\delta_h := \frac{1}{2}(a + d + \sqrt{-1}(-b + c)) \in \mathbb{H} \otimes \mathbb{C}$ と定義している. 以下の結果を述べるために $\theta^*(h, g)$ という $\theta(h, g)$ の $\mathcal{G}(\mathbb{A})$ 上の保型形式と $\mathcal{H}(\mathbb{A})$ 上の保型形式に関する随伴 (adjoint) を導入する.

定理 3.5. $\kappa > 8$ とする.「離散系列の形式次数」の観点から理解される明示的定数 c_κ^G, c_κ^H を用いて以下が得られる:

$$c_\kappa^H \int_{\mathcal{H}(\mathbb{R})} \theta(hx, g)\omega_\kappa(x)dx = c_\kappa^G \int_{\mathcal{G}(\mathbb{R})} \Omega_\kappa(y)\theta(f, gy^{-1})dy,$$
$$c_\kappa^H \int_{\mathcal{H}(\mathbb{R})} \omega_\kappa(x)\theta^*(hx^{-1}, g)dx = c_\kappa^G \int_{\mathcal{G}(\mathbb{R})} \theta^*(h, gy)\Omega_\kappa(y).$$

この関係式は荒川リフトが四元数離散系列表現を生成することの別証明への応用がある.積分の収束性の事情から $\kappa > 8$ という強めの制約が必要であるが, テータリフトの研究でこのような成果は見たことがない.

最後の成果を述べるために, 四元数離散系列表現を生成するカスプ形式 F に対して θ の随伴 θ^* を用いた $\mathcal{H}(\mathbb{A})$ へのテータリフティング $\mathcal{L}^*(F)$ が考えられる.以下の通り定理を述べる.

定理 3.6. 判別式 d_B は素数であるとする.

1. 具体的に書ける 0 でない定数 c により以下が成り立つ:

$$\mathcal{L}(\mathcal{L}^*(F))(g) = cL(0, F, \mathrm{std})F(g) \quad (g \in \mathcal{G}(\mathbb{A})),$$
$$||\mathcal{L}^*(F)||^2 = cL(0, F, \mathrm{std})||F||^2.$$

2. $L(0, F, \mathrm{std}) \neq 0$ ならば F は荒川リフトである.

この定理の 1 の主張の証明には, 山名俊介氏の四元数ユニタリー群の dual pair に対する Siegel-Weil 公式 [13] を使っている.

3.3 今後の課題

残された課題を 2 つ挙げておく.

- 本研究において $\mathcal{G}(\mathbb{Q}_p)$ の極大コンパクト群 K_p は, 所謂分岐素点全てで "non-principal genus" 型になる大域的な格子を場合を選んでおり, "principal genus" 型, つまり全ての分岐素点で $L_p = \mathcal{O}_p^{(2,1)}$ となる大域極大格子, あるいはそれを緩めて少なくとも 1 つの分岐素点でこの局所極大格子となる場合も研究を進展させるべきであるが, 今のところ研究は進んでいない.既存研究 [5], [6] では全ての大域極大格子の極大コンパクト群の場合を考えているが, 等長群 (isometry group) の場合を扱っている本研究ではまだ十分研究が進んでいない.

- 定理 3.6 の判別式 d_B が素数という条件は, そうでないと山名氏の Siegel-Weil 公式において, Eisenstein 級数と等しくなるテータ級数の積分が 1 個でなく複数個の和になるということが生じ, これは四元数ユニタリー群の dual pair の場合に生じる独特の性質のようである.これから生じる困難を避けるために d_B を素数と仮定している.

謝辞

講演の機会を与えて頂いた権寧魯先生等, 世話人の皆様に心より感謝の意を表します.

参考文献

[1] T. Arakawa, On automorphic forms of a quaternion unitary group of degree two, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **28** (1981), no. 3, 547–566.

[2] T. Arakawa, On certain automorphic forms of $Sp(1,q)$, In: Automorphic forms of several variables (Katata, 1983), 1–48, Progr. Math., 46, Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 1984.

[3] M. Eichler, Quadratische Formen und Modulfunktionen, Acta Arith. **4** (1958), 217–239.

[4] B. Gross and N. Wallach, On quaternionic discrete series representations, and their continuations, J. Reine. Angew. Math. **481** (1996), 73–123.

[5] A. Murase and H. Narita, Commutation relation of Hecke operators for Arakawa lifting, Tohoku Math. J. **60** (2008), no. 2, 227–251.

[6] A. Murase and H. Narita, Fourier expansion of Arakawa lifting I: An explicit formula and examples of non-vanishing lifts, Israel J. Math. **187** (2012) 317-369.

[7] H. Narita, Fourier-Jacobi expansion of automorphic forms on $Sp(1,q)$ generating quaternionic discrete series, J. Funct. Anal. **239** (2006), no. 2, 638–682.

[8] H. Narita, Theta lifting from elliptic cusp forms on automorphic forms on $Sp(1,q)$, Math. Z. **259** (2008), no. 3, 591–615.

[9] A. Pollack, The Fourier expansion of modular forms on quaternionic exceptional groups, Duke Math. J. **169** (2020), no. 7, 1209–1280.

[10] A. Pollack, A quaternionic Saito-Kurokawa lift and cusp forms on G_2, Algebra Number Theory **15** (2021), no. 5, 1213–1243.

[11] W. Schmid, Homogeneous complex manifolds and representations of semisimple Lie groups, In: Representation theory and harmonic analysis on semisimple Lie groups, 223–286, Math. Surveys Monogr., 31, American Mathematical Society, Providence, RI, 1989

[12] R. Takahashi, Sur les représentations unitaires des groupes de Lorentz généralisés, Bull. Soc. Math. France **91** (1963), 289–433.

[13] S. Yamana, On the Siegel-Weil formula for quaternion unitary groups, Amer. J. Math. **135** (2013) no. 5, 1383–1432.

[14] H. Yamashita, Embeddings of discrete series into induced representations of semisimple Lie groups I. General theory and the case of $SU(2,2)$, Japan. J. Math. (N.S.) **16** (1990), no. 1, 31–95.