

Theta lifts to certain cohomological representations of indefinite orthogonal groups

齋藤 陽平 (慶應義塾大学)

1 Introduction

本稿は福岡数論研究集会において行われた著者の発表について概要をまとめたものである. 特に, ここでは発表で紹介した正則保型形式の theta lift における観察 (Theorem 4.3) に焦点を当て, 最近の研究で得た証明を紹介したい.

L を even lattice, p を $V = L \otimes \mathbb{R}$ 上の多項式とする. このとき Borchers [Bo98] は $\tau \in \mathbb{H}_1$ と $g \in O(V)$ に対し, theta 級数

$$\begin{aligned} & \theta_{L+\gamma}(\tau, g; p, v_0) \\ &= y^{\frac{b^-}{2}} \sum_{\lambda \in L+\gamma} \left[\exp \left(-\frac{\Delta_b}{8\pi y} \right) p \right] (v_0(g^{-1}\lambda)) \mathbf{e}(\tau Q(v_0^+(g^{-1}\lambda)) + \bar{\tau} Q(v_0^-(g^{-1}\lambda))) \end{aligned}$$

を定義した. このとき L に対応して定まる離散群 $\Gamma_L \subset O(V)$ が存在し, $\theta_{L+\gamma}(\tau, g; p, v_0)$ は Γ_L の左作用で不変な関数をなす. また $\theta_{L+\gamma}(\tau, g; p, v_0)$ を用いて, ベクトル値の theta function $\Theta_L(\tau, g; p, v_0) = \sum \theta_{L+\gamma}(\tau, g; p, v_0) \mathbf{e}_\gamma$ を定義すれば, これは楕円保型形式と同様の関数等式を満たす. すなわち, $\Theta_L(\tau, g; p)$ は $\mathbb{H}_1 \times O(V)$ 上の $\mathrm{Mp}_{2n}(\mathbb{Z}) \times \Gamma_L$ に対応する保型形式となる. そのため, 上半空間上の保型形式 f を一つとり, $\Theta_L(\tau, g; p, v_0)$ との Petersson 内積を考えれば, $O(V)$ 上の保型形式 $\vartheta_L(f; p)$ を構成することができる. このように定義された $O(V)$ 上の保型形式を f の theta lift という.

著者は [MS24] において正則カスプ形式 f と調和多項式 $h(x)$ に対して, その theta lift $\vartheta_L(f; h)$ を計算し, Fourier 展開の明示式を得た. さらに, Fourier 展開に現れる特殊関数が, 導来関手加群と呼ばれる表現の Bessel 模型であることを証明することで, 導来関手加群との関係を示した. Li [Li90] の実素点における表現論的な研究から $\mathrm{Mp}_{2n}(\mathbb{R})$ の正則離散系列表現は局所 theta 対応の下で $O(V)$ の導来関手加群と対応することが知られており, 著者の結果はそれと整合するものである.

ここで, 上述の計算において重要な役割を果たしたのは次の結果である.

Theorem 1.1 ([MS24, Corollary 4.3]). f を weight $k + \frac{b^+ - b^-}{2}$ の正則保型形式, p を k 次斉次多項式とする. このとき,

$$\vartheta_L(f; p)(g) = \vartheta_L(f; Hp)$$

が成り立つ. ただし, Hp は p の調和多項式成分を表す.

この結果は, 正則保型形式の theta lift $\vartheta_L(f; p)$ が多項式 p の調和多項式成分 Hp にしか依らないということを示す. この性質から, 調和多項式成分を保っていれば p を自由に取り替える

ことが可能になる. [MS24] においてはこの性質と Borchers の手法 [Bo98] を組み合わせることで, lifting の Fourier 展開を得た.

一方で, この結果は $\vartheta_L(f; p)$ が導来関手加群を生成することからの帰結とみなすこともできる. そのため [Li90] の結果より, 他の dual pair における類似の性質が成り立つことが期待される. 本稿の目的は, [MS24] の研究の一般化の準備として, Theorem 1.1 の関係式を dual pair $\mathrm{Mp}_{2n}(\mathbb{R}) \times \mathrm{O}(V)$ の間の theta lift へと拡張することである (Theorem 4.3).

2 Vector-valued Siegel modular forms of genus n

この節では, even lattice L の Weil 表現に付随する genus n の vector-valued Siegel modular form について紹介する. これは, Borchers [Bo98] によって定義された vector-valued modular form を genus n に拡張したものである.

まず, even lattice に付随する $\mathrm{Mp}_{2n}(\mathbb{Z})$ の Weil 表現を定義する. (L, q) を even lattice, すなわち, free $\mathbb{Z}$ -module L であって二次形式 $q : L \rightarrow \mathbb{Z}$ が定義されているものであるとする. このとき, その実拡大 $V = L \otimes \mathbb{R}$ を考え, $q(rx) = r^2 q(x)$ ($x \in L, r \in \mathbb{R}$) となるように二次形式を拡張すると, (V, q) は $\mathbb{R}$ 上の quadratic space となる. $b^+, b^- \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し, $b = b^+ + b^-$ とし, b 次ユークリッド空間 $\mathbb{R}^b$ で二次形式

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{b^+} x_i^2 - \sum_{j=b^++1}^b x_j^2$$

が定義された quadratic space を $\mathbb{R}^{b^+, b^-}$ とする. 任意の $\mathbb{R}$ 上の quadratic space は $\mathbb{R}^{b^+, b^-}$ のいずれかと同型であり, そのとき (b^+, b^-) をその quadratic space の signature という. 本稿では (V, q) の signature (b^+, b^-) を (L, q) の signature と呼び, $\mathrm{sig}(L) = b^+ - b^-$ と書くことにする.

次に, L に対しその dual lattice L' を

$$L' = \{\lambda \in L \otimes \mathbb{Q} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{Z} \text{ for any } \mu \in L\}$$

で定義する. このとき $L \subset L'$ である. q は L 上で整数値であるため, $\gamma \in D_L = L'/L$ に対し, $q(\gamma) \bmod 1$ を考えれば, D_L 上の well-defined な $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ -値二次形式を定める. このように誘導された D_L 上の二次形式も同様に q と書くことにする. このとき, (D_L, q) を discriminat group という.

$\mathrm{Mp}_{2n}(\mathbb{R})$ を $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ の非自明な double covering group とする. このとき $\mathrm{Mp}_{2n}(\mathbb{R})$ の元は, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ と $\phi(\tau)^2 = \det(C\tau + D)$ を満たす $\mathbb{H}_n = \{\tau \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{C}) \mid \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$ 上の正則関数 $\phi : \mathbb{H}_n \rightarrow \mathbb{C}$ を用いて, $(M, \phi(\tau))$ で表される. このとき $\mathrm{Mp}_{2n}(\mathbb{R})$ の合成は $(M_1, \phi_1(\tau))(M_2, \phi_2(\tau)) = (M_1 M_2, \phi_1(M_2 \tau) \phi_2(\tau))$ ($M\tau = (a\tau + b)(c\tau + d)^{-1}$) によって与えられる. いま, $\mathrm{Mp}_{2n}(\mathbb{Z})$ を $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z})$ の被覆写像による逆像とする. このとき, $\mathrm{Mp}_{2n}(\mathbb{Z})$ の even lattice L に付随する Weil 表現 $\rho_{L,n}$ が次のように定義される.

Definition 2.1 ([Zh09]). $\{\mathbf{e}_{\gamma}\}_{\gamma \in D_L^n}$ を $\mathbb{C}[D_L^n]$ の standard basis とする. このとき $\mathrm{Mp}_{2n}(\mathbb{Z})$ の even lattice L に付随する Weil 表現 $\rho_{L,n} : \mathrm{Mp}_{2n}(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{C}(D_L^n))$ は $\mathrm{Mp}_{2n}(\mathbb{Z})$ の生成元に

対する以下の関係式で定義される:

$$\begin{aligned}\rho_{L,n}((\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & {}^tA^{-1} \end{smallmatrix}), (\det A)^{1/2})\mathbf{e}_{\underline{\gamma}} &= (\det A)^{-\text{sig}(L)/2}\mathbf{e}_{\underline{\gamma}A^{-1}} \quad (A \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})), \\ \rho_{L,n}((\begin{smallmatrix} I_n & X \\ 0 & I_n \end{smallmatrix}), 1)\mathbf{e}_{\underline{\gamma}} &= \mathbf{e}(\text{tr}(q(\underline{\gamma})X))\mathbf{e}_{\underline{\gamma}} \quad (X \in \text{Sym}_n(\mathbb{Z})), \\ \rho_{L,n}((\begin{smallmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{smallmatrix}), (\det \tau)^{1/2})\mathbf{e}_{\underline{\gamma}} &= \frac{\mathbf{e}\left(-\frac{n \text{sig}(L)}{8}\right)}{|D_L|^{n/2}} \sum_{\underline{\delta} \in D_L^n} \mathbf{e}(-\text{tr}(\underline{\gamma}, \underline{\delta}))\mathbf{e}_{\underline{\delta}}.\end{aligned}$$

ただし, $\underline{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, $\underline{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_n) \in D_L^n$ に対し, $(\underline{\gamma}, \underline{\delta}) = ((\gamma_i, \delta_j))_{1 \leq i, j \leq n}$, $q(\underline{\gamma}) = \frac{1}{2}(\underline{\gamma}, \underline{\gamma})$ としている. また, $\mathbf{e}(\tau) = \exp(2\pi i \tau)$ である.

Remark 2.1. $\mathbb{C}[D_L^n]$ の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ を

$$\left\langle \sum_{\underline{\gamma} \in D_L^n} a_{\underline{\gamma}} \mathbf{e}_{\underline{\gamma}}, \sum_{\underline{\delta} \in D_L^n} b_{\underline{\delta}} \mathbf{e}_{\underline{\delta}} \right\rangle_L = \sum_{\underline{\gamma} \in D_L^n} a_{\underline{\gamma}} \overline{b_{\underline{\gamma}}}$$

で定義する. このとき Weil 表現 $\rho_{L,n}$ は $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ に対してユニタリ表現をなす.

ここで, Weil 表現に付随する genus n の vector-valued Siegel modular form を定義する

Definition 2.2. ν を非負整数, (ρ, V_ρ) を $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ の (有限次元) 有理表現とする. $(\tilde{\gamma} = ((\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}), \phi(\tau)) \in \text{Mp}_{2n}(\mathbb{Z}))$ に対し, $V_\rho \otimes \mathbb{C}[D_L^n]$ -値正則関数 $f: \mathbb{H}_n \rightarrow V_\rho \otimes \mathbb{C}[D_L^n]$ が関係式

$$f(\gamma \cdot \tau) = \phi^\nu(\tau) \rho(c\tau + d) \boxtimes \rho_{L,n}(\gamma) f(\tau)$$

を満たすとき, f を weight $\delta^\nu \otimes \rho$, type $\rho_{L,n}$ の Siegel modular form という.

Siegel modular form $f(\tau)$ は正則性と $\text{Mp}_{2n}(\mathbb{Z})$ に関数する不変性から次のような Fourier 展開を持つ:

$$f(\tau) = \sum_{\underline{\gamma} \in D_L^n} \sum_{\substack{T \in \text{Sym}_n(\mathbb{Z}) + q(\underline{\gamma}) \\ T \geq 0}} C_f(\underline{\gamma}, T) \mathbf{e}(\text{tr} T \tau).$$

ここで $C_f(\underline{\gamma}, T) \in V_\rho$ である. 特に, f が正定値でない全ての T に対し $C_f(\underline{\gamma}, T) = 0$ を満たすならば, f を cusp form と呼び, weight $\delta^\nu \otimes \rho$, type $\rho_{L,n}$ の cusp form 全体の空間を $S_{\delta^\nu \otimes \rho}(D_L^n)$ と書く.

V_ρ 上の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_\rho$ を, 任意の $v, w \in V_\rho$, $N \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ に対し, $\langle \rho(N)v, w \rangle_\rho = \langle v, \rho({}^t\overline{N})w \rangle_\rho$ を満たすように定める. さらに, $V_\rho \otimes \mathbb{C}[D_L^n]$ 上の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\rho, L}$ を $\langle v \otimes \lambda, w \otimes \mu \rangle_{\rho, L} = \langle v, w \rangle_\rho \langle \lambda, \mu \rangle_L$ によって定める. ここで, weight ρ , type $\rho_{L,n}$ の Siegel modular form f, g に対し,

$$\int_{Sp_{2n}(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}_n} \langle f(\tau), \rho(y)g(\tau) \rangle_{\rho, L} \det y^{\frac{\nu}{2}} \frac{dx dy}{\det y^{n+1}} \quad (2.1)$$

が収束するとき, この積分を $(f, g)_\tau$ と表す. 特に, f, g のどちらか一方が cusp form であるときには積分 (2.1) は常に収束する.

3 Siegel theta function and theta lifts

この節では, even lattice L に付随する genus n の vector-valued Siegel theta function $\Theta_{L^n}(\tau, g; p, v_0)$ を定義し, それを用いて $f \in S_\rho(D_L^n)$ に対する theta lift $\vartheta_{L^n}(f; p)(g)$ を構成する. この Siegel theta function は [Bo98] の Siegel theta function $\Theta_L(\tau, g; p, v_0)$ の一般化と言えるものである. genus n の scalar-valued theta function については, [Ro21] によって構成が与えられており, 本稿での構成はその結果を基にしたものである.

3.1 The genus n Siegel theta function

まず, L を signature (b^+, b^-) の even lattice とし, $O(V)$ で $V = L \otimes \mathbb{R}$ の直交群を表す. isometry $V \rightarrow \mathbb{R}^{b^+, b^-}$ を一つ固定する. このとき, 直交分解 $\mathbb{R}^{b^+, b^-} = \mathbb{R}^{b^+} \oplus \mathbb{R}^{b^-}$ に対し, 各成分への射影を $pr_+, pr_-,$ とかき, $pr_\pm$ と v_0 との合成を $v_0^\pm = pr_\pm \circ v_0$ と書く. さらに, 記号の濫用を許し, v_0 で V^n から $(\mathbb{R}^{b^+, b^-})^n$ への isometry $v_0 : \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto (v_0(\lambda_1), \dots, v_0(\lambda_n))$ を表すことにする. また, v_0^+, v_0^- についても同様に, 同じ記号で V^n から $(\mathbb{R}^{b^+})^n, (\mathbb{R}^{b^-})^n$ への写像を表すことにする.

$(\mathbb{R}^{b^+, b^-})^n$ を $b \times n$ 行列全体の空間 $M_{b \times n}(\mathbb{R})$ と同一視し, $x \in (\mathbb{R}^{b^+, b^-})^n$ の座標を $x = (x_{ij})_{1 \leq i \leq b, 1 \leq j \leq n}$ と書くことにする. このとき $M_{b \times n}$ の Laplacian を

$$\Delta_b = (\Delta_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}, \quad \Delta_{ij} = \sum_{k=1}^b \frac{\partial^2}{\partial x_{ki} \partial c_{kj}}$$

で定義する. いま, $f \in C^\infty(M_{b \times n}), c \in \mathbb{C}$ に対し, Laplacian Δ_b と n 次正定値行列 $y \in \text{Sym}_n(\mathbb{R})$ で定まる $M_{b \times n}$ 上の微分作用素を定義しておく:

$$[\exp(c \text{tr} \Delta_b) f](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k}{k!} (\text{tr} \Delta_b)^k (f(x)) \quad (c \in \mathbb{C}).$$

Lemma 3.1. $N \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ に対し次が成り立つ:

$$[\exp(c \text{tr} \Delta_b) f(xN)] = [(\exp(c \text{tr}(N \Delta_b {}^t N)) f](xN).$$

次に $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ の既約表現 (ρ, V_ρ) に対し, 対応する変換則を満たす $(V^+)^n \cong M_{b^+ \times n}(\mathbb{R})$ 上の V_ρ -値多項式の空間 $P^\rho(M_{b^+ \times n})$ を定義する. $P^\rho(M_{b^+ \times n})$ は Siegel theta function が weight $\rho \otimes \delta^{\text{sig} L}$ の modular form と同様の保形性を満たすために必要となる. $M_{b^+ \times n}(\mathbb{R})$ 上の複素数値多項式全体の空間を $P(M_{b^+ \times n})$ とおく. また, 任意のベクトル空間 W に対し, W -値多項式全体の空間を $P(M_{b^+ \times n}, W)$ とおく. このとき, $P(M_{b^+ \times n}, W) = P(M_{b^+ \times n}) \otimes W$ となることに注意する.

Definition 3.2. (ρ, V_ρ) を $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ の既約表現とし, $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ の $P(M_{b^+ \times n}, V_\rho)$ への作用を

$$N \cdot p(x) = p(xN), \quad N \in \text{GL}_n(\mathbb{C}), p \in P(M_{b^+ \times n}, V_\rho), x \in M_{b^+ \times n}(\mathbb{R})$$

によって定める. このとき $P^\rho(M_{b^+ \times n})$ の部分空間 $P(M_{b^+ \times n}, V_\rho)$ を

$$P^\rho(M_{b^+ \times n}) = \{p \in P(M_{b^+ \times n}, V_\rho) \mid N \cdot p(x) = \rho({}^t N) p(x) \text{ for any } N \in \text{GL}_n(\mathbb{C})\}$$

で定義する.

Remark 3.1. $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ の作用は $O(V^+)$ の作用と可換であるため $P^\rho(M_{b^+ \times n})$ は $O(V^+)$ -module をなす.

ここで, [Ro21] の構成にならない, [Bo98] の theta function の一般化となる vector-valued Siegel theta function $\Theta_{L^n}(\tau, g; t_1, t_2, v_0)$ を定義する.

Definition 3.3. (ρ, V_ρ) を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の既約表現とし, $p \in P^\rho(M_{b \times n})$ とする. $\underline{\gamma} \in D_L^n$, $t_1, t_2 \in V^n$ に対し,

$$\begin{aligned} & \vartheta_{L^n + \underline{\gamma}}(\tau, g; t_1, t_2; p, v_0) \\ &= \det y^{\frac{b^-}{2}} \sum_{\underline{\lambda} \in L^n + \underline{\gamma}} \left[\exp \left(-\frac{\mathrm{tr}(\Delta_b y^{-1})}{8\pi} \right) p \right] (v_0^+(g^{-1}(\underline{\lambda} + t_2))) \\ & \quad \times \mathbf{e} \left(\mathrm{tr} (q(v_0^+(g^{-1}(\underline{\lambda} + t_2)))\tau) + \mathrm{tr} (q(v_0^-(g^{-1}(\underline{\lambda} + t_2)))\bar{\tau}) - \left(\underline{\lambda} + \frac{t_2}{2}, t_1 \right) \right) \\ & \quad (\tau = x + iy \in \mathbb{H}_n, g \in \mathrm{O}(V)) \end{aligned}$$

とおく. このとき, L に付随する $V_\rho \otimes \mathbb{C}[D_L^n]$ -valued Siegel theta function は次のように定義される:

$$\Theta_{L^n}(\tau, g; t_1, t_2; p, v_0) = \sum_{\underline{\gamma} \in D_L^n} \vartheta_{L^n + \underline{\gamma}}(\tau, g; t_1, t_2; p, v_0) \mathbf{e}_{\underline{\gamma}}. \quad (3.1)$$

$t_1 = t_2 = 0$ の場合には, 記号を省略し, $\Theta_{L^n}(\tau, g; p, v_0)$ と書く.

$\mathrm{O}(L)$ と L の自己同型群とすると, $\mathrm{O}(L)$ は $\mathrm{O}(V)$ の離散部分群をなす. $\mathrm{SO}^+(V)$ で $\mathrm{O}(V)$ の identity component を表し, $\mathrm{SO}^+(L) = \mathrm{O}(L) \cap \mathrm{SO}^+(V)$ とおく. このとき, discriminant kernel $\Gamma_L \subset \mathrm{SO}^+(L)$ を

$$\Gamma_L = \{g \in \mathrm{SO}^+(L) \mid g\lambda - \lambda \in L \text{ for all } \lambda \in L\}$$

で定義する. Γ_L は D_L^n に自明に作用するため, (3.1) より, $\Theta_{L^n}(\tau, g; p, v_0)$ は Γ_L の左作用に対して保形性を持つ. すなわち, 任意の $\gamma \in \Gamma_L$, $g \in \mathrm{O}(V)$ に対し,

$$\Theta_{L^n}(\tau, \gamma g; p, v_0) = \Theta_{L^n}(\tau, g; p, v_0)$$

が成り立つ.

3.2 Fourier transforms on $M_{b \times n}(\mathbb{R})$

ここでは, $\Theta_{L^n}(\tau, g; t_1, t_2; p, v_0)$ が $\mathrm{Mp}_{2n}(\mathbb{Z})$ の作用に対して, Siegel modular form と同様の保形性を満たすことを示すために, $M_{b \times n}(\mathbb{R})$ 上の Fourier 変換について思い出す.

$(\mathbb{R}^{b^+, b^-})^n$ を $M_{b \times n}(\mathbb{R})$ と同一視し, $v = (v_1, \dots, v_n), w = (w_1, \dots, w_n) \in (\mathbb{R}^{b^+, b^-})^n \cong M_{b \times n}(\mathbb{R})$ に対し, $(v, w) = ((v_i, w_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ で内積の行列を表すことにする. このとき, $M_{b \times n}(\mathbb{R})$ 上の急減少関数 $f : M_{b \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ に対し, f の Fourier 変換 $\hat{f} : M_{b \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$\hat{f}(w) = \int_{M_{b \times n}} f(v) \mathbf{e}(\mathrm{tr}(w, v)) dv$$

と定義する. ここで, dv は $M_{b \times n}(\mathbb{R})$ の Lebesgue 測度である. 以下は Fourier 変換についてよく知られた性質である.

Lemma 3.4. $f : M_{b \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ を $M_{b \times n}(\mathbb{R})$ 上の急減少関数とする. このとき $u \in M_{b \times n}(\mathbb{R})$ に対し, 以下が成り立つ:

- (i) $f(v) \mathbf{e}(\mathrm{tr}(u, v))$ の Fourier 変換は $\hat{f}(w + u)$ である.

(ii) $f(v - u)$ の Fourier 変換は $\mathbf{e}(\mathrm{tr}(u, w))\hat{f}(w)$ である.

Lemma 3.5 ([Ro21, Lemma 4.5]). $b^- = 0$ と仮定する. $p \in P(M_{b \times n}, W)$, $\tau \in \mathbb{H}_n$ に対し, $f(v) = p(v)\mathbf{e}(\mathrm{tr}(q(v)\tau))$ とする. このとき f の Fourier 変換は

$$\hat{f}(w) = \det(-i\tau^{-1})^{\frac{b^+}{2}} \left[\exp\left(\frac{i\mathrm{tr}(\Delta_b \tau^{-1})}{4\pi}\right) p \right] (w(-\tau^{-1}))\mathbf{e}(\mathrm{tr}(q(w)(-\tau^{-1}))).$$

ここで次は [Bo98, Corollary 3.4], [Ro21, Lemma 4.6] の V_ρ -値多項式への一般化である.

Lemma 3.6 ([Sa]). $b^- = 0$ と仮定する. (ρ, V_ρ) を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の既約表現とし, $p \in P(M_{b \times n}, V_\rho)$ とする. このとき, $\tau \in \mathbb{H}_n$ に対し,

$$f_\tau(v) = \left[\exp\left(-\frac{\mathrm{tr}(\Delta y^{-1})}{8\pi}\right) p \right] (v)\mathbf{e}(\mathrm{tr}(q(v)\tau))$$

とすると

$$\hat{f}_\tau(w) = \mathbf{e}\left(-\frac{nb^+}{8}\right) \det(-\tau^{-1})^{\frac{b^+}{2}} \rho(-\tau^{-1}) \left[\exp\left(-\frac{\mathrm{tr}(\Delta \tilde{y}^{-1})}{8\pi}\right) p \right] (w)\mathbf{e}(-\mathrm{tr}(q(v)\tau^{-1}))$$

が成り立つ. ただし, $\tilde{y} = \mathrm{Im}(-\tau^{-1})$ である.

Proof. Lemma 3.5 より $f_\tau(v)$ の Fourier 変換を計算し, 整理すると,

$$\begin{aligned} \hat{f}_\tau(w) &= \mathbf{e}\left(-\frac{nb^+}{8}\right) \det(-\tau^{-1})^{\frac{b^+}{2}} \\ &\quad \times \left[\exp\left(-\frac{\mathrm{tr}((-\tau^{-1})\Delta^t(-\tau^{-1})\tilde{y}^{-1})}{8\pi}\right) p \right] (w(-\tau^{-1}))\mathbf{e}(-\mathrm{tr}(q(v)\tau^{-1})) \end{aligned}$$

となる. ここで Lemma 3.1 より, 右辺は

$$\mathbf{e}\left(-\frac{nb^+}{8}\right) \det(-\tau^{-1})^{\frac{b^+}{2}} \left[\exp\left(-\frac{\mathrm{tr}(\Delta \tilde{y}^{-1})}{8\pi}\right) p(w(-\tau^{-1})) \right] \mathbf{e}(-\mathrm{tr}(q(v)\tau^{-1}))$$

と変形でき, $P^\rho(M_{b^+ \times n})$ の定義より, Lemma 3.6 が従う. $\square$

Corollary 3.7. (ρ, V_ρ) を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の既約表現とし, $p \in P(M_{b^+ \times n}, V_\rho)$ とする. このとき, $\tau \in \mathbb{H}_n$ に対し,

$$f_\tau(v) = \left[\exp\left(-\frac{\mathrm{tr}(\Delta y^{-1})}{8\pi}\right) p \right] (pr^+(v))\mathbf{e}(\mathrm{tr}(q(pr^+(v))\tau) + \mathrm{tr}(q(pr^-(v))\bar{\tau}))$$

とすると

$$\begin{aligned} \hat{f}_\tau(w) &= \mathbf{e}\left(-\frac{n(\mathrm{sig}(L))}{8}\right) \det(-\tau^{-1})^{\frac{b^+}{2}} \det(-\bar{\tau}^{-1})^{\frac{b^-}{2}} \rho(-\tau^{-1}) \\ &\quad \times \left[\exp\left(-\frac{\mathrm{tr}(\Delta \tilde{y}^{-1})}{8\pi}\right) p \right] (pr^+(w))\mathbf{e}\left(-\mathrm{tr}(q(pr^+(v))\tau^{-1}) - \mathrm{tr}(q(pr^-(v))\bar{\tau}^{-1})\right) \end{aligned}$$

が成り立つ.

Proof. 直交分解 $M_{b \times n}(\mathbb{R}) = M_{b^+ \times n}(\mathbb{R}) \oplus M_{b^- \times n}(\mathbb{R})$ を考え, 各成分上の Fourier 変換に対し, Lemma 3.6 を適応すれば, Corollary の結果を得る. $\square$

3.3 modularity of theta functions

前節の Fourier 変換の議論を応用し, $\Theta_{L^n}(\tau, g; t_1, t_2; p, v_0)$ の $\mathrm{Mp}_{2n}(\mathbb{Z})$ の作用に対する保形性を示す.

Theorem 3.8. $p \in P^\rho(M_{b^+ \times n})$, $t_1, t_2 \in V^n$ とする. このとき, 任意の $\gamma = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \phi(\tau)\right) \in \mathrm{Mp}_{2n}(\mathbb{Z})$ に対して,

$$\begin{aligned} & \Theta_{L^n}(\gamma\tau, g; t_1 {}^t a + t_2 {}^t b, t_1 {}^t c + t_2 {}^t d; p, v_0) \\ &= \phi(\tau)^{\mathrm{sig} L} \rho(c\tau + d) \boxtimes \rho_{L,n}(\gamma) \Theta_{L^n}(\tau, g; t_1, t_2; p, v_0) \end{aligned} \quad (3.2)$$

が成り立つ.

Remark 3.2. 特に, $\Theta_{L^n}(\tau, g; p, v_0)$ は τ に関して $f \in S_{\delta \mathrm{sig} L \otimes \rho}(D_L^n)$ と同じ等式を満たす.

Proof. まず,

$$T_X = \left(\begin{pmatrix} I_n & X \\ 0 & I_n \end{pmatrix}, 1 \right) \quad (X \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{Z})), \quad S = \left(\begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \det(\tau)^{\frac{1}{2}} \right)$$

は $\mathrm{Mp}_{2n}(\mathbb{Z})$ の生成元をなす ([Fr83, A 5.4 Satz] 参照). そのため, T_X, S のそれぞれについて (3.2) が成り立つことを示せば十分である. まず, T_X ($X \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{Z})$) の作用を考える. 直接計算から,

$$\begin{aligned} & \vartheta_{L^n + \underline{\gamma}}(\tau + X, g; t_1 + t_2 X, t_2; p, v_0) \\ &= \det y^{\frac{b^-}{2}} \sum_{\underline{\lambda} \in L^n + \underline{\gamma}} \left[\exp \left(-\frac{\mathrm{tr}(\Delta_b y^{-1})}{8\pi} \right) p \right] (v_0^+(g^{-1}(\underline{\lambda} + t_2))) \\ & \quad \times \mathbf{e} \left(\mathrm{tr} (q(v_0^+(g^{-1}(\underline{\lambda} + t_2)))\tau) + \mathrm{tr} (q(v_0^-(g^{-1}(\underline{\lambda} + t_2)))\bar{\tau}) - \left(\underline{\lambda} + \frac{t_2}{2}, t_1 \right) \right) \\ & \quad \times \mathbf{e}(\mathrm{tr}(q(\underline{\lambda})X)) \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで $\underline{\lambda} \in L^n + \underline{\gamma}$ より, $\mathbf{e}(\mathrm{tr}(q(\underline{\lambda})X)) = \mathbf{e}(\mathrm{tr}(q(\underline{\gamma})X))$ である. よって

$$\vartheta_{L^n + \underline{\gamma}}(\tau + X, g; t_1 + t_2 X, t_2; p, v_0) = \mathbf{e}(\mathrm{tr}(q(\underline{\gamma})X)) \vartheta_{L^n}(\tau, g; t_1, t_2; p, v_0)$$

となり, T_X に対して (3.2) が成り立つ. 次に, S の作用を考え,

$$\begin{aligned} & \vartheta_{L^n + \underline{\gamma}}(-\tau^{-1}, g; -t_2, t_1; p, v_0) \\ &= (\det \tau)^{\frac{\mathrm{sig}(L)}{2}} \rho(\tau) \frac{\mathbf{e} \left(-\frac{n \mathrm{sig}(L)}{2} \right)}{|D_L|^{n/2}} \sum_{\underline{\delta} \in D_L^n} \mathbf{e}(-\mathrm{tr}(\underline{\gamma}, \underline{\delta})) \vartheta_{L^n + \underline{\delta}}(\tau, g; t_1, t_2; p, v_0) \end{aligned}$$

が成り立つことを示す. ここで

$$\begin{aligned} f_{-\tau^{-1}}(v) &= \left[\exp \left(-\frac{\mathrm{tr}(\Delta \tilde{y}^{-1})}{8\pi} \right) p \right] (pr^+(v)) \\ & \quad \times \mathbf{e} \left(\mathrm{tr}(q(pr^+(v))(-\tau)^{-1}) + \mathrm{tr}(q(pr^-(v))(-\bar{\tau})^{-1}) \right) \end{aligned}$$

とおくと Corollary 3.7 より,

$$\widehat{f_{-\tau^{-1}}}(v) = \mathbf{e}\left(-\frac{n \operatorname{sig}(L)}{8}\right) \det \tau^{\frac{b^+}{2}} \det \bar{\tau}^{\frac{b^-}{2}} \rho(\tau) \left[\exp\left(-\frac{\operatorname{tr}(\Delta y^{-1})}{8\pi}\right) p \right] (pr^+(v)) \\ \times \mathbf{e}\left(\operatorname{tr}(q(pr^+(v))\tau) + \operatorname{tr}(q(pr^-(v))\bar{\tau})\right)$$

となる. さらに, Lemma 3.4 より $f_{-\tau^{-1}}(v + \gamma + t_1)\mathbf{e}(-\operatorname{tr}(v + t_2/2, t_1))$ の Fourier 変換は

$$\mathbf{e}\left(-\frac{n \operatorname{sig}(L)}{8}\right) \det \tau^{\frac{b^+}{2}} \det \bar{\tau}^{\frac{b^-}{2}} \rho(\tau) \left[\exp\left(-\frac{\operatorname{tr}(\Delta y^{-1})}{8\pi}\right) p \right] (pr^+(v + t_2)) \\ \times \mathbf{e}\left(\operatorname{tr}(q(pr^+(v + t_2))\tau) + \operatorname{tr}(q(pr^-(v + t_2))\bar{\tau}) - \left(v + \frac{t_2}{2}, t_1\right)\right)$$

で与えられる. ここで, Poisson の和公式

$$\sum_{\lambda \in L^n} f(\lambda) = |D_L|^{-\frac{n}{2}} \sum_{\lambda \in L'^n} \widehat{f}(\lambda)$$

より,

$$\vartheta_{L^n+\underline{\gamma}}(-\tau^{-1}, g; -t_2, t_1; p, v_0) \\ = \det \tilde{y}^{\frac{b^-}{2}} \sum_{\lambda \in L^n} f_{-\tau^{-1}}(v_0(g^{-1}(\underline{\lambda} + \underline{\gamma} + t_1))) \mathbf{e}\left(-\operatorname{tr}\left(\underline{\lambda} + \frac{t_2}{2}, t_1\right)\right) \\ = (\det \tau^{-1} y \bar{\tau}^{-1})^{\frac{b^-}{2}} \sum_{\lambda \in L'^n} \widehat{f_{-\tau^{-1}}}(v_0(g^{-1}\lambda + t_2)) \mathbf{e}\left(-\operatorname{tr}\left(v + \underline{\gamma} \frac{t_2}{2}, t_1\right) - \operatorname{tr}(\underline{\lambda}, \underline{\lambda})\right) \\ = (\det \tau)^{\frac{\operatorname{sig}(L)}{2}} \rho(\tau) \frac{\mathbf{e}\left(-\frac{n \operatorname{sig}(L)}{2}\right)}{|D_L|^{n/2}} \sum_{\underline{\delta} \in D_L^n} \mathbf{e}(-\operatorname{tr}(\underline{\gamma}, \underline{\delta})) \vartheta_{L^n+\underline{\delta}}(\tau, g; t_1, t_2; p, v_0)$$

が成り立つ. 以上より Theorem 4.3 が示された. $\square$

3.4 Theta lifts of genus n cusp forms

いま, $p \in P^\rho(M_{b^+ \times n})$ とする. このとき, Theorem 3.8 より, $\Theta_{L^n}(\tau, g; p, v_0)$ は正則ではないが weight $\delta^{\operatorname{sig}(L)} \otimes \rho$, type ρ_L の Siegel modular form と同様の変換公式を満たす. そのため, 任意の $f \in S_\nu(D_L)$ と $p(x) \in \mathcal{P}^{k,0}(V)$ に対し, 積分 (2.1) は well-defined であり,

$$\vartheta_L(f; p)(g) = (f(\tau), \Theta_L(\tau, g; p))_\tau$$

を考えることができる. このようにして定義される $O(V)$ の関数 $\vartheta_L(f; p)(g)$ を f の theta lift と呼ぶ. ここで $\Theta_L(\tau, g; p)$ の Γ_L に関する保形性から, $\vartheta_L(f; p)(g)$ は同様に Γ_L の左作用で不変な $O(L_\mathbb{R})$ 上の保型形式を与える.

4 Differential operators and harmonic polynomials

この節では, 志村 [Sh00] の微分作用素の理論を思い出し, Siegel modular form の theta lift に関する主定理を証明する.

4.1 Pluriharmonic polynomials

G を群, X をその完全可約な有限次元表現とする. このとき X 上の多項式環 $\mathcal{S}$ は G の作用に関する不変式環 $\mathcal{J}$ と G -harmonic polynomial 全体 $\mathcal{H}$ を用いて,

$$\mathcal{S} = \mathcal{J}\mathcal{H}$$

とかけることが知られている [Ko63]. ここでは $G = \mathrm{SO}(b^+)$, $X = \mathrm{M}_{b^+ \times n}(\mathbb{R})$ の場合にこの結果を思い出す ([To76] を参照).

$g \in \mathrm{SO}(b^+)$, $p \in P(\mathrm{M}_{b^+ \times n}(\mathbb{R}))$ に対し, $g \cdot p(x) = p(g^{-1}x)$ で $\mathrm{SO}(b^+)$ の作用を定義する. このとき $\mathrm{SO}(b^+)$ の作用に関する不変式環を $\mathcal{J} = \{p \in P(\mathrm{M}_{b^+ \times n}) \mid (g \cdot p)(x) = p(x) \ (\forall g \in \mathrm{SO}(b^+))\}$ で定義し, さらに $\mathcal{J}^* = \{p \in \mathcal{J} \mid p(0_{b^+ \times n}) = 0\}$ とおく. $\mathcal{J}^*$ は定数項を持たない不変式全体である. ここで, $r_{ij}(x) = ({}^t x x)_{ij}$, すなわち $r_{ij}(x) = \sum_{k=1}^{b^+} x_{ki} x_{kj}$ とおくと, $\mathcal{J}^*$ の任意の元は r_{ij} の多項式として与えられる.

Definition 4.1 (多重調和多項式). 多項式 $p \in P(\mathrm{M}_{b^+ \times n})$ が任意の $1 \leq i, j \leq n$ に対して

$$\Delta_{ij}p = 0$$

を満たすとき, p を多重調和多項式 (pluriharmonic polynomial) と呼ぶ. ここで多重調和多項式全体を $\mathcal{H}(\mathrm{M}_{b^+ \times n})$ とおく.

Lemma 4.2. [Ko63] $\mathcal{J}$ を不変式環, $\mathcal{H}(\mathrm{M}_{b^+ \times n})$ を多重調和多項式全体とする. このとき,

$$P(\mathrm{M}_{b^+ \times n}) = \mathcal{J}\mathcal{H}(\mathrm{M}_{b^+ \times n})$$

が成り立つ. ここで右辺は $\mathcal{H}(\mathrm{M}_{b^+ \times n})$ で生成される $\mathcal{J}$ -module を表す.

Remark 4.1. 特に $2n < b^+$ をならば, 同型

$$P(\mathrm{M}_{b^+ \times n}) \cong \mathcal{J} \otimes \mathcal{H}(\mathrm{M}_{b^+ \times n})$$

が成り立つことが知られている ([To76, Theorem 2.5]).

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の既約表現 (ρ, V_ρ) の対し, $\mathcal{H}(\mathrm{M}_{b^+ \times n}, V_\rho) = \{h \in P(\mathrm{M}_{b^+ \times n}, V_\rho) \mid \Delta_{ij}h = 0, (0 \leq i, j \leq n)\}$ とおく. このとき, $P(\mathrm{M}_{b^+ \times n}, V_\rho) = P(\mathrm{M}_{b^+ \times n}) \otimes V_\rho$, $\mathcal{H}(\mathrm{M}_{b^+ \times n}, V_\rho) = \mathcal{H}(\mathrm{M}_{b^+ \times n}) \otimes V_\rho$ であるため Lemma 4.2 より,

$$P(\mathrm{M}_{b^+ \times n}, V_\rho) = \mathcal{J}\mathcal{H}(\mathrm{M}_{b^+ \times n}, V_\rho)$$

が成り立つ. さらに, $\mathcal{J} = \mathcal{J}^* \oplus \mathbb{C}$ であるため, 分解

$$P(\mathrm{M}_{b^+ \times n}, V_\rho) = \mathcal{J}^*\mathcal{H}(\mathrm{M}_{b^+ \times n}, V_\rho) \oplus \mathcal{H}(\mathrm{M}_{b^+ \times n}, V_\rho) \quad (4.1)$$

が成り立つ. ここで, (4.1) は $\mathrm{O}(b^+) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ -module としての直和分解を与えている. (4.1) における, $P(\mathrm{M}_{b^+ \times n}, V_\rho)$ から $\mathcal{H}(\mathrm{M}_{b^+ \times n}, V_\rho)$ への射影を $H : P(\mathrm{M}_{b^+ \times n}, V_\rho) \rightarrow \mathcal{H}(\mathrm{M}_{b^+ \times n}, V_\rho)$ と書くことにする. ここで,

$$P^\rho(\mathrm{M}_{b^+ \times n}) = (P^\rho(\mathrm{M}_{b^+ \times n}) \cap \mathcal{J}^*\mathcal{H}(\mathrm{M}_{b^+ \times n})) \oplus (P^\rho(\mathrm{M}_{b^+ \times n}) \cap \mathcal{H}(\mathrm{M}_{b^+ \times n})) \quad (4.2)$$

が成り立つため, $p \in P^\rho(\mathrm{M}_{b^+ \times n})$ ならば, Hp も再び $P^\rho(\mathrm{M}_{b^+ \times n})$ の元となる.

次が本稿の主定理である.

Theorem 4.3 ([Sa]). $f \in S_{\delta^{\text{sig}(L)} \otimes \rho}(D_L^n)$, $p \in P^{\rho}(M_{b^+ \times n})$ とする. このとき,

$$\vartheta_{L^n}(f; p)(g) = \vartheta_{L^n}(f, Hp)(g)$$

が成り立つ.

この結果は [MS24, Corollary 4.3] の一般化である. [MS24] においては, Poincaré 級数と呼ばれる, $S_k(D_L)$ の生成元について, その lifting を直接計算することで, Corollary 4.3 を示した. その証明では, $n = 1$ の場合に H の明示式を用いている. 一般には H の明示式は知られておらず, genus n の場合には同様の手法では証明が困難であった. そこで本稿では, 志村の微分作用素の理論を用いた新たな証明を紹介する.

4.2 Holomorphic differential operators

ここでは, 志村 [Sh00] の概正則保型形式における微分作用素の定義と基本的な性質を思い出す.

$T = \text{Sym}_n(\mathbb{C})$ とし, $P^l(T)$ で T 上の l 次多項式全体を表すとする. このとき, $q \in P^l(T)$, $N \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ に対し, $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ の表現 $\tau^l : \text{GL}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Aut}(P^l(T))$ を $(\tau^l(N)q)({}^tNuN) = q$ で定義しておく.

$1 \leq j, k \leq n$ に対し, $C^\infty(\mathbb{H}_n)$ 上の微分作用素 $\frac{\partial}{\partial \tau_{jk}}$ を

$$\frac{\partial}{\partial \tau_{jk}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_{jk}} - i \frac{\partial}{\partial y_{jk}} \right)$$

と定める. 任意のベクトル空間 W をとする. このとき, $f \in C^\infty(\mathbb{H}_n, W)$, $u \in T$ に対して $Df, Cf \in C^\infty(\mathbb{H}_n, P^1(T) \otimes W)$ を

$$(Df)(u) = \sum_{j,k=1}^n u_{jk} \frac{\partial}{\partial \tau_{jk}} f, \quad C(f)(u) = (Df)(yuy)$$

で定義する. また, $0 \leq e \in \mathbb{Z}$ に対し, $D^e f, C^e f \in C^\infty(\mathbb{H}_n, P^e(T) \otimes W)$ を $D^e f = DD^{e-1}f$, $C^e f = CC^{e-1}f$ によって帰納的に定める. (ρ, V_ρ) を $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ の有限次元既約表現とする. $f \in C^\infty(\mathbb{H}_n, V_\rho)$ に対し, D_ρ^e を

$$(D_\rho^e f)(u) = \rho \otimes \tau^e(y)^{-1} C^e[\rho(y)f](u)$$

で定義する. $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ の有限次元表現 (V_σ, σ) , ν を非負整数とする. $(M, \phi) \in \text{Mp}_{2n}(\mathbb{R})$, $f \in C^\infty(\mathbb{H}, V_\sigma)$ に対して, slash operator $\|_{\delta^\nu \otimes \sigma}$ を

$$f \|(M, \phi)(\tau) = \phi^{-\nu}(\tau) \sigma(c\tau + d)^{-1} f(M \cdot \tau)$$

で定義する. このとき, 微分作用素 D_ρ^e と slash operator $\|_{\delta^\nu \otimes \rho}$ に対し以下の関係が成り立つ.

Lemma 4.4. (ρ, V_ρ) を $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ の既約表現, ν を非負整数とする. このとき, $f \in C^\infty(\mathbb{H}_n, V_\rho)$, 微分作用素 D_ρ^e , $(M, \phi) \in \text{Mp}_{2n}(\mathbb{R})$ に対して

$$D_\rho^e(f \|_{\delta^\nu \otimes \rho}(M, \phi)) = (D_\rho^e f) \|_{\delta^\nu \otimes \rho \otimes \tau^e}(M, \phi)$$

が成り立つ.

Remark 4.2. f が weight $\delta^\nu \otimes \rho$, type $\rho_{L,n}$ の Siegel modular form ならば

$$f \|_{\delta^\nu \otimes \rho} \tilde{\gamma}(\tau) = \rho_{L,n}(\tilde{\gamma})f(\tau) \quad (\tilde{\gamma} \in \mathrm{Mp}_{2n}(\mathbb{Z})) \quad (4.3)$$

を満たすことに注意する. 特に, このとき Lemma 4.4 より

$$(D_\rho^e f \|_{\delta^\nu \otimes \rho \otimes \tau^e} \tilde{\gamma})(\tau) = \rho_{L,n}(\tilde{\gamma}) D_\rho^e f(\tau)$$

が成り立つ.

次に, Siegel modular form の $\mathrm{Mp}_{2n}(\mathbb{R})$ への持ち上げと微分作用素の関係について議論する. (V_ρ, ρ) を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の有限次元表現, ν を非負整数とする. $f \in C^\infty(\mathbb{H}_n, V_\rho \otimes \mathbb{C}[D_L^n])$, $\tilde{g} \in \mathrm{Mp}_{2n}(\mathbb{R})$ に対し, f の $\mathrm{Mp}_{2n}(\mathbb{R})$ への持ち上げ F_f を $F_f(\tilde{g}) = f \|_{\delta^\nu \otimes \rho}(\tilde{g})(iI_n)$ で定義する. このとき, f が任意の $\tilde{\gamma} \in \mathrm{Mp}_{2n}(\mathbb{Z})$ に対し (4.3) を満たすならば, F_f は,

$$F_f(\tilde{\gamma}\tilde{g}) = \rho_{L,n}(\tilde{\gamma})F_f(\tilde{g}) \quad (4.4)$$

を満たす. いま, $\mathfrak{g} = \{X \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{R}) \mid {}^t XJ + JX = 0, J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}\}$ を考え, $X \in \mathfrak{g}$ の $F \in C^\infty(\mathrm{Mp}_{2n}(\mathbb{R}), V_\rho \otimes \mathbb{C}[D_L^n])$ への作用を

$$(X \cdot F)(\tilde{g}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F(\tilde{g} \exp(tX))$$

により定義する.

Lemma 4.5 ([Sh94, Proposition A.1]). $F, G \in C^\infty(\mathrm{Mp}_{2n}(\mathbb{R}), V_\rho \otimes \mathbb{C}[D_L^n])$ は (4.4) を満たすと仮定する. このとき, $X \in \mathfrak{g}$ に対し, $\langle F, G \rangle_{\rho,L}$, $\langle X \cdot F, G \rangle_{\rho,L}$, $\langle F, X \cdot G \rangle_{\rho,L}$ がそれぞれ $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z}) \backslash \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ 上可積分であるとき,

$$\int_{\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z}) \backslash \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})} \langle X \cdot F, G \rangle_{\rho,L} dg = - \int_{\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{Z}) \backslash \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})} \langle F, X \cdot G \rangle_{\rho,L} dg$$

が成り立つ.

$\mathfrak{g}_\mathbb{C} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$ の Cartan 分解を考え, $\mathfrak{g}_\mathbb{C} = \mathfrak{k}_\mathbb{C} \oplus \mathfrak{p}_\mathbb{C} = \mathfrak{k}_\mathbb{C} \oplus \mathfrak{p}^+ \oplus \mathfrak{p}^-$ とおく. このとき, $\mathfrak{p}^\pm = \{\iota^\pm(u) = \begin{pmatrix} u & \mp iu \\ \pm iu & -u \end{pmatrix} \in M_{2n \times 2n}(\mathbb{C}) \mid u \in T\}$ である.

Lemma 4.6 ([Sh90]). ν を非負整数, (ρ, V_ρ) を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の既約有理表現とする. このとき (4.3) を満たす $f \in C^\infty(\mathbb{H}_n, V_\rho)$ と $u \in T$ に対し, 以下が成り立つ:

- (i) $\iota^+(u)^e F_f(\tilde{g}) = 2F_{D_{\delta^\nu \otimes \rho}^e f(u)}(\tilde{g})$.
- (ii) f が正則関数ならば $\iota^-(u)F_f = 0$.

4.3 The proof of Theorem 4.3

最後に $p \in \mathcal{J}^* \mathcal{H}(\mathrm{M}_{b^+ \times n})$ に対する $\Theta_L(\tau, g; p, v_0)$ と上で定義した微分作用素との関係を示し, その結果を用いて Theorem 4.3 を証明する.

まず, Definition 3.3 の定義をそのまま拡張し, $p \in P(\mathrm{M}_{b^+ \times n}, V_\rho)$ に対しても同様に $\Theta_{L^n}(\tau, g; p, v_0)$ を定義する. このとき, 直接の計算から以下が従う.

Proposition 4.7 ([Sa]). $h \in \mathcal{H}^\rho(M_{b^+ \times n})$ とする. このとき, 非負整数 e と $u \in T$ に対し

$$\Theta_{L^n}(\tau, g; (u^*)^e h, v_0) = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^e (D_{\delta^{\text{sig}(L)} \otimes \rho}^e \Theta_{L^n}(\tau, g; h, v_0))(u)$$

が成り立つ. ここで $u^*(x) = \text{tr}(u {}^t x x) \in P(M_{b^+ \times n})$ である.

$p \in P(M_{b^+ \times n}, V_\rho)$ に対し, $\Phi_p \in C^\infty(\text{Mp}_{2n}(\mathbb{R}), V_\rho \times \mathbb{C}[D_L^n])$ を

$$\Phi_p((M, \phi)) = \phi^{-\text{sig}(L)}(M \cdot iI_n) \Theta_{L^n}(M \cdot iI_n, g, (c\tau + d)^{-1} \cdot p, v_0) \quad ((M, \phi) \in \text{Mp}_{2n}(\mathbb{R}))$$

で定義する. このとき, $p \in P^\rho(M_{b^+ \times n})$ ならば $F_{\Theta_{L^n}(*, g; p, v_0)}((M, \phi)) = \Phi_p((M, \phi))$ であることに注意する.

Corollary 4.8. $h \in \mathcal{H}(M_{b^+ \times n}, V_\rho)$ とする. このとき $u \in T$, $e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し, 次が成り立つ:

$$\iota^+(u)^e \Phi_h = \Phi_{(u^*)^e h}. \quad (4.5)$$

Proof. $\mathcal{H}(M_{b^+ \times n}, V_\rho) = \mathcal{H}(M_{b^+ \times n}) \otimes V_\rho$ であり, V_ρ 成分は $\mathfrak{g}$ の作用とは無関係であるため, $h \in \mathcal{H}(M_{b^+ \times n})$ の場合に (4.5) が成り立つことを示せば十分である. まず,

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_\rho \mathcal{H}^\rho(M_{b^+ \times n}) \otimes \overline{V}_\rho & \cong & \mathcal{H} \\ \downarrow & & \downarrow \\ h \otimes v & \longmapsto & \langle h, v \rangle_\rho \end{array}$$

は $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ -module としての同型を与える. ここで $\overline{V}_\rho$ は V_ρ の共役表現である. よって, 証明は $\langle h, v \rangle_\rho$ ($f \in \mathcal{H}^\rho(M_{b^+ \times n})$, $v \in \overline{V}_\rho$) の場合に帰着される. ここで, Proposition 4.7 と Lemma 4.6 (i) より, $h \in \mathcal{H}^\rho(M_{b^+ \times n})$ ならば

$$\begin{aligned} \iota^+(u)^e \Phi_h((M, \phi)) &= F_{D_{\delta^{\text{sig}(L)} \otimes \rho}^e \Theta_{L^n}(*, g; h, v_0)}((M, \phi)) \\ &= \Theta_{L^n}(*, g; (u^*)^e h, v_0) \|_{\delta^{\text{sig}(L)} \otimes \rho \otimes \tau^e} (M, \phi)(iI_n) \\ &= \phi^{-\text{sig}(L)}(M \cdot iI_n) \Theta_{L^n}(M \cdot iI_n, g, (c\tau + d)^{-1} \cdot ((u^*)^e h), v_0) \\ &= \Phi_{(u^*)^e h}((M, \phi)) \end{aligned}$$

となるため, (4.5) が成り立つことが示される. $\square$

Corollary 4.9. 任意の $p \in \mathcal{J}^* \mathcal{H}(M_{b^+ \times n}, V_\rho)$ に対し, $u_i \in T$, $h_i \in \mathcal{H}(M_{b^+ \times n}, V_\rho)$, $e_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ が存在し,

$$\Phi_p = \sum_i \iota^+(u_i)^{e_i} \Phi_{h_i} \quad (4.6)$$

が成り立つ.

Proof. $p = rh$ ($r \in \mathcal{J}^*$, $h \in \mathcal{H}(M_{b^+ \times n}, V_\rho)$) の場合に (4.6) を満たす $\{u_i\}_i$, $\{h_i\}_i$, $\{e_i\}_i$ が存在することを示せばよい. 前述のとおり, $\mathcal{J}^*$ の任意の元は r_{ij} の多項式として与えられるため, $q \in P(T)$ が存在して,

$$r(x) = q({}^t x x)$$

が成り立つ. ここで, 多項式環は一次式の冪で生成されるため, $q = \sum_i (f_i)_i^e$ を満たす, $f_i \in P^1(T)$, $e_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ が存在する. u^* の定義より, $u_i^*(x) = f_i({}^t x x)$ を満たす $u_i \in T$ が存在し, 任意の i に対し $h_i = h$ とおけば, $\{u_i\}$, $\{h_i\}$, $\{e_i\}$ は $p = rh$ に対し (4.6) を満たす. $\square$

Proof of Theorem 4.3. (4.2) より, 任意の $f \in S_{\delta^{\text{sig}(L)} \otimes \rho}(D_L^n)$, $p \in (J^* \mathcal{H}(\mathbb{M}_{b^+ \times n}, V_\rho)) \cap P^\rho(\mathbb{M}_{b^+ \times n})$ に対し,

$$\vartheta_{L^n}(f; p) = 0$$

が成り立つことを示せば十分である. $\text{Sp}_{2n}(\mathbb{Z}) \backslash \text{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ の測度を適切に正規化すれば

$$\begin{aligned} \vartheta_{L^n}(f; p)(g) &= \int_{\text{Sp}_{2n}(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}_n} \langle f(\tau), \rho(y) \Theta_{L^n}(\tau, g; p, v_0) \rangle_{\rho, L} \det y^{\frac{\text{sig}(L)}{2}} \frac{dx dy}{\det y^{n+1}} \\ &= \int_{\text{Sp}_{2n}(\mathbb{Z}) \backslash \text{Sp}_{2n}(\mathbb{R})} \langle F_f(\tilde{g}'), F_{\Theta_{L^n}(*, g; p, v_0)}(\tilde{g}') \rangle_{\rho, L} d\tilde{g}' \end{aligned}$$

となる. ここで, Corollary 4.9 より p に対して, $\{h_i\}$, $\{u_i\}$, $\{e_i\}$ が存在し (4.6) を満たす. いま, f の cuspidality より, $\langle F_f, \sum_i \iota^+(u_i)^{e_i} \Phi_{h_i} \rangle_{\rho, L}$, $\sum_i \langle \iota^-(u_i) F_f, \iota^+(u_i)^{e_i-1} \Phi_{h_i} \rangle_{\rho, L}$, $\langle F_f, \sum_i \iota^+(u_i)^{e_i-1} \Phi_{h_i} \rangle_{\rho, L}$ は全て $\text{Sp}_{2n}(\mathbb{Z}) \backslash \text{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ 上の可積分関数である. そのため, Lemma 4.5 より上の積分は

$$\begin{aligned} &\int_{\text{Sp}_{2n}(\mathbb{Z}) \backslash \text{Sp}_{2n}(\mathbb{R})} \langle F_f(\tilde{g}'), \sum_i \iota^+(u_i)^{e_i} \Phi_{h_i}(\tilde{g}') \rangle_{\rho, L} d\tilde{g}' \\ &= \int_{\text{Sp}_{2n}(\mathbb{Z}) \backslash \text{Sp}_{2n}(\mathbb{R})} \sum_i \langle \iota^-(u_i) F_f(\tilde{g}'), \iota^+(u_i)^{e_i-1} \Phi_{h_i}(\tilde{g}') \rangle_{\rho, L} d\tilde{g}' \end{aligned}$$

となる. ここで f は正則であるため, Lemma 4.6 (ii) より (4.10) が成り立つ. $\square$

Remark 4.3. 上の証明より, Theorem 4.3 において $f \in S_{\delta^{\text{sig}(L)} \otimes \rho}(D_L^n)$ が $\mathbb{H}_n$ 上の正則関数であることは本質的な条件であると言える. これは, 実素点上の theta correspondence の下で $\text{Mp}_{2n}(\mathbb{R})$ の正則離散系列表現が $\text{O}(V)$ の導来関手加群に対応するという結果と整合するものである ([Li90]).

参考文献

- [Bo98] R. E. Borcherds, Automorphic forms with singularities on Grassmannians, *Invent. Math.* **132** (1998), no. 3, 491–562.
- [Fr83] E. Freitag, *Siegelsche Modulformen*, Grundlehren Math. Wiss., 254, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [HT93] R. Howe and E. Tan, Homogeneous functions on light cones, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **28** (1993), no. 1, 1–74.
- [Ko63] B. Kostant, Lie group representations on polynomial rings, *Amer. J. Math.* **85** (1963), 327–404.
- [Li90] J.-S. Li, Theta lifting for unitary representations with nonzero cohomology, *Duke Math. J.* **61** (1990), no. 3, 913–937.
- [MS24] T. Miyazaki and Y. Saito, Theta lift to certain cohomological representations of indefinite orthogonal groups, *Res. Number Theory* **10** (2024), no. 2, Paper No. 25.

- [Ro21] C. Roehrig, Siegel theta series for indefinite quadratic forms, *Res. Number Theory* **7** (2021), no. 3, Paper No. 45.
- [Sa] Y. Saito, The theta construction of cusp forms on $O(b^+, b^-)$, in preparation.
- [Sh90] G. Shimura, Invariant differential operators on hermitian symmetric spaces, *Ann. of Math. (2)* **132** (1990), no. 2, 237–272.
- [Sh94] G. Shimura, Differential operators, holomorphic projection, and singular forms, *Duke Math. J.* **76** (1994), no. 1, 141–173.
- [Sh00] G. Shimura, Arithmeticity in the theory of automorphic forms, *Math. Surveys Monogr.*, 82, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.
- [To76] T. Ton-That, Lie group representations and harmonic polynomials of a matrix variable, *Trans. Amer. Math. Soc.* **216** (1976), 1–46.
- [Zh09] W. Zhang. Modularity of Generating Functions of Special Cycles on Shimura Varieties, Ph.D. Thesis, Columbia University, 2009.