保型 L 関数の二次捻りの中心値に対する非消滅について

千田 雅隆 (東京電機大学)

この論説では若槻聡氏との共同研究 [1] によって得られた, いくつかの楕円保型形式に伴う L 関数の二次捻りの中心値に関する結果を紹介する.

1　背景と主結果

1.1　楕円曲線の場合

A を方程式 $y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$ $(a, b, c \in \mathbb{Z})$ により定義される有理数体上の楕円曲線とする. ここでは簡単のため, この方程式は極小 Weierstrass モデルを与えていると仮定する.

楕円曲線 A の導手を N とすると, A の L 関数は

$$L(A, s) = \prod_{\ell \nmid N} (1 - a_\ell(A)\ell^{-s} + \ell^{1-2s})^{-1} \prod_{\ell \mid N} (1 - a_\ell(A)\ell^{-s})^{-1}$$

と定義される. このとき, $\mathrm{Re}(s) > 3/2$ となる $s \in \mathbb{C}$ に対し, この無限積は収束する. ただし, $\ell \nmid N$ となる素数 ℓ に対しては $a_\ell(A) = 1 + \ell - \#A(\mathbb{F}_\ell)$ であり, $\ell \mid N$ となる素数 ℓ に対しては A が ℓ で分裂乗法的還元を持つとき $a_\ell(A) = 1$, 非分裂乗法的還元を持つとき $a_\ell(A) = -1$, 加法的還元を持つときは $a_\ell(A) = 0$ とする. 楕円曲線の L 関数 $L(A, s)$ は全複素平面上に正則に解析接続され, $\Lambda(A, s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(A, s)$ とおくと関数等式 $\Lambda(A, s) = \varepsilon(A)N^{1-s}\Lambda(A, 2-s)$ $(\varepsilon(A) \in \{\pm 1\})$ を満たすことが知られている.

$E = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ を判別式が d の二次体とするとき, 方程式 $dy^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$ によって定まる楕円曲線 A_d のことを A の二次体 E による二次捻りという. A の二次捻り A_d の L 関数 $L(A_d, s)$ の関数等式における中心点 $s = 1$ での零点の位数の振る舞いに関して Goldfeld は以下のような予想を提唱した.

予想 1.1 (Goldfeld [4])**.**

$$\lim_{X \to \infty} \frac{\#\{E = \mathbb{Q}(\sqrt{d}) \mid |d| < X,\ \mathrm{ord}_{s=1} L(A_d, s) = r\}}{\#\{E = \mathbb{Q}(\sqrt{d}) \mid |d| < X\}} = \begin{cases} \frac{1}{2} & r = 0 \text{ または } 1, \\ 0 & r \geqq 2. \end{cases}$$

Birch と Swinnerton-Dyer による予想 (BSD 予想) は $L(A, s)$ の $s = 1$ での零点の位数が楕円曲線 A の Mordell-Weil 群 $A(\mathbb{Q})$ の階数に等しいであろうという予想である. BSD 予想の仮定の下で Goldfeld の予想は

$$\lim_{X \to \infty} \frac{\#\{E = \mathbb{Q}(\sqrt{d}) \mid |D| < X,\ \mathrm{rank}\, A_d(\mathbb{Q}) = r\}}{\#\{E = \mathbb{Q}(\sqrt{d}) \mid |d| < X\}} = \begin{cases} \frac{1}{2} & r = 0 \text{ または } 1, \\ 0 & r \geqq 2 \end{cases}$$

と言い換えることもできる. ここでは次のような問題を考えてみる.

問題 1.2. $\mathrm{ord}_{s=1} L(A_d, s) \geqq 2$ となる d はどのくらいあるか？$|d|$ が素数となる場合は？

この問題に対して, 次のような予想がある.

予想 1.3 (Conrey-Keating-Rubinstein-Snaith [2])**.** ある $c_A^{\pm} \geqq 0$ が存在して,

$$\#\{E = \mathbb{Q}(\sqrt{d}) \mid |d| : \text{素数},\ 0 < \pm d < X,\ \varepsilon(A_d) = 1,\ L(A_d, 1) = 0\} \sim \frac{c_A^{\pm} X^{\frac{3}{4}}}{(\log X)^{\frac{5}{8}}}$$

となる.

注意 1.4. (1) 関数等式により $\varepsilon(A_d) = 1$ という仮定の下では $L(A_d, 1) = 0$ ならば自動的に $\mathrm{ord}_{s=1} L(A_,s) \geqq 2$ となる.

(2) $c_A^{\pm} = 0$ となることもある. 例えば, Delaunay [3] により, $A = X_0(17)$ のとき $c_A^{-} = 0$ となることが示されている. この結果の証明には志村対応の理論が使われている.

1.2 保型形式の場合

k を正の偶数とする. $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) q^n \in S_k^{\mathrm{new}}(\Gamma_0(N))$ を正規化された Hecke 固有形式とし, χ_E を $E = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ に対応する二次指標とする. このとき,

$$L(f \otimes \chi_E, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(f)\chi_E(n)}{n^s}$$

とおくと $L(f \otimes \chi_E, s)$ は $\mathbb{C}$ 上に正則に解析接続され, $s \leftrightarrow k - s$ という形の関数等式を持つ. $s = k/2$ での値は中心値と呼ばれる. Goldfeld の予想は保型形式の場合も成立すると期待されているが $\mathrm{ord}_{s=k/2} L(f \otimes \chi_E, s) \geqq 2$ となる E の個数についての予想は異なる.

予想 1.5 (Conrey-Keating-Rubinstein-Snaith [2])**.** (1) $k = 4$, $a_n(f) \in \mathbb{Z}$ と仮定する. このとき, ある $c_f^{\pm} \geqq 0$ が存在して,

$$\#\{E = \mathbb{Q}(\sqrt{d}) \mid |d| : \text{素数},\ 0 < \pm d < X,\ \varepsilon(f \otimes \chi_E) = 1,\ L(f \otimes \chi_E, 2) = 0\} \sim \frac{c_f^{\pm} X^{\frac{1}{4}}}{(\log X)^{\frac{5}{8}}}$$

となる. ここで $\varepsilon(f \otimes \chi_E)$ は $L(f \otimes \chi_E, s)$ の関数等式の符号である.

(2) k を 6 以上の偶数とする. このとき, $\varepsilon(f \otimes \chi_E) = 1$ かつ $L(f \otimes \chi_E, k/2) = 0$ となる E は有限個.

この予想に対し, 次のような結果を示すことができた.

定理 1.6 (千田-若槻 [1])**.** $\eta(z)$ を Dedekind のエータ関数とする.

(1) $f(z) = \eta(z)^2\eta(2z)^2\eta(3z)^2\eta(6z)^2$ とおく（このとき, $f \in S_4^{\mathrm{new}}(\Gamma_0(6))$ となり, f は正規化された Hecke 固有形式になる）. もし, $E = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ が $d < 0$, $-d$ は素数で $\varepsilon(f \otimes \chi_E) = 1$ という条件を満たすなら, $L(f \otimes \chi_E, 2) \neq 0$ となる.

(2) $f(z) = \eta(z)^8\eta(2z)^8$ とおく（このとき, $f \in S_8^{\mathrm{new}}(\Gamma_0(2))$ となり, f は正規化された Hecke 固有形式になる）. もし, $E = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ が $d < 0$, $-d$ は素数で $\varepsilon(f \otimes \chi_E) = 1$ という条件を満たすなら, $L(f \otimes \chi_E, 4) \neq 0$ となる.

注意 1.7. (1) 定理 1.6 の (1) は Conrey-Keating-Rubinstein-Snaith による予想 1.5 (1) が $c_f^- = 0$ として成立する例を与えている.

(2) 落合-若槻-横山 [5] により, 保型形式の重さがより大きな場合の例も知られている. l を $4 \leqq l \leqq 40$ を満たす偶数とし, $k = 2l + 2$ とおく. このとき, 任意の正規化された Hecke 固有形式 $f \in S_k^{\mathrm{new}}(\Gamma_0(2))$ に対し, 定理 1.6 と同様のことが証明できる.

2 証明の概要

ここでは定理 1.6 (2) の証明について紹介する. (1) の証明はもう少し複雑にはなるが, 同様の方針で示すことができる.

2.1 代数的保型形式

D を判別式が 2 の定符号四元数環とし, $\mathcal{O}_D$ を極大整環とする. このとき, $\mathcal{O}_D$ は次のように与えられる：

$$\mathcal{O}_D = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i + \mathbb{Z}j + \mathbb{Z}w.$$

ここで $i^2 = j^2 = -1$, $ij = -ji$, $w = \frac{1+i+j+ij}{2}$ とおいた. $\mathbb{Q}$ 上の代数群 G を $\mathbb{Q}$-代数 R に対し, $G(R) = (D \otimes_{\mathbb{Q}} R)^\times / R^\times$ とおくことで定める.

$$K_v = \begin{cases} (\mathcal{O}_D \otimes \mathbb{Z}_v)^\times \text{の } G \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_v \text{での像} & v < \infty, \\ G(\mathbb{R}) & v = \infty \end{cases}$$

とし, $K = \prod_v K_v$ 及び $K_f = \prod_{v<\infty} K_v$ とおく. このとき, $G(\mathbb{A}) = G(\mathbb{Q})K$ が成立する. ここで $\mathbb{A}$ は $\mathbb{Q}$ のアデール環を表す. このような性質は一般の定符号四元数環 D とその Eichler 整環 $\mathcal{O}$ に対しては成り立たないので注意が必要であり, この場合の特殊事情といえる[1]. $\mathcal{O}_D^\times$ の $G(\mathbb{Q})$ での像を Γ と書く. このとき $\Gamma = G(\mathbb{Q}) \cap K$ であり, Γ は i, j, w の $G(\mathbb{Q})$ での像により生成され, $\#\Gamma = 12$ となる.

$V_D = \{x \in D \mid \mathrm{Tr}(x) = 0\}$ とおき, V_D の格子 $L(\mathcal{O}_D)$ を

$$L(\mathcal{O}_D) = \{x \in \mathbb{Z} + 2\mathcal{O}_D \mid \mathrm{Tr}(x) = 0\}$$

と定める. 今回考えている状況では,

$$L(\mathcal{O}_D) = \mathbb{Z}(2i) + \mathbb{Z}(2j) + \mathbb{Z}(i + j + ij)$$

であり, $b_1 = -i + j + ij$, $b_2 = i - j + ij$, $b_3 = i + j - ij$ は $L(\mathcal{O}_D)$ の基底を与える. このとき, 同型 $\mathcal{T} : V_D \xrightarrow{\simeq} \mathbb{Q}^3$ を $\mathcal{T}(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ により定める. $q : V_D \times V_D \to \mathbb{Q}$ を

$$q(x, y) = \frac{1}{2}\{\mathrm{Nm}(x + y) - \mathrm{Nm}(x) - \mathrm{Nm}(y)\}$$

により定め, $Q = (q(b_i, b_j))_{1 \leqq i,j \leqq 3}$ とおく. さらに $(q_{i,j})_{1 \leqq i,j \leqq 3} = Q^{-1}$ とおく. このとき,

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad Q^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

[1] この性質のおかげで主定理を示すための様々な計算が楽になる.

となる．$\mathrm{SO}(Q)=\{g\in \mathrm{SL}_3 \mid gQ^tg=Q\}$ とおき, $\mathcal{F}:G\to \mathrm{SO}(Q)$ を $\mathcal{T}(g^{-1}xg)=\mathcal{T}(x)\mathcal{F}(g)$ によって定める．0 以上の整数 l に対し, W_l を

$$W_l=\{\varphi\in\mathbb{Q}[x_1,x_2,x_3]\mid \varphi \text{ は次数 } l \text{ の斉次多項式 }\}$$

と定め, Laplace 作用素 $\Delta_Q: W_l\to W_{l-2}$ を

$$\Delta_Q=\sum_{1\leqq i,j\leqq 3} q_{i,j}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}$$

によって定める．今の場合は

$$\Delta_Q=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\ +\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3}+\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3}\right\}$$

となる．さらに, $\mathcal{H}_l=\mathrm{Ker}\,\Delta_Q$ とおく．このとき, $\dim_{\mathbb{Q}}\mathcal{H}_l=2l+1$ となる．

G の $\mathcal{H}_l$ への作用を $(g\cdot\varphi)(x)=\varphi(x\mathcal{F}(g))$ ($x=(x_1,x_2,x_3)$, $\varphi\in W_l$, $g\in G$) により定めるとこれは Δ_Q の作用と可換なので, G の $\mathcal{H}_l$ への作用 ρ_l が定まる．ρ_l は既約である．

$\mathcal{H}_l^\Gamma=\{\varphi\in\mathcal{H}_l\mid \rho_l(\gamma)\varphi=\varphi\,(\forall\gamma\in\Gamma)\}$ の元は代数的保型形式と呼ばれる．このとき Hecke 同変な同型 $\mathcal{H}_l^\Gamma\cong S_{2l+2}^{\mathrm{new}}(\Gamma_0(2))$ が存在する（Jacquet-Langlands 対応）．各 $a\in V_D$ に対し, $\alpha=\mathcal{T}(a)\in\mathbb{Q}^3$ とおく．このとき,

$$\mathcal{L}_a:\mathcal{H}_l^\Gamma\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{C}\to L^2(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/K_f)$$

を $\mathcal{L}_a(\varphi)(\gamma g_\infty k_f)=\varphi(\alpha\cdot\mathcal{F}(g_\infty^{-1}))$ ($\varphi\in\mathcal{H}_l$, $g_\infty\in G(\mathbb{R})$, $\gamma\in G(\mathbb{Q})$, $k_f\in K_f$) により定める[2]. $\alpha=\mathcal{T}(a)\neq(0,0,0)$ ならば $\mathcal{L}_a$ は単射となる．

2.2 Waldspurger の公式

$E=\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ を虚二次体とし, $\mathfrak{o}_E$ を E の整数環とする．埋め込み $\iota:E\hookrightarrow D$ が $\iota(E)\cap\mathcal{O}_D=\iota(\mathfrak{o}_E)$ を満たすとき, ι は optimal であるという．optimal な埋め込み全体を $\mathrm{Emb}(\mathfrak{o}_E,\mathcal{O}_D)$ と書く．$\mathrm{Emb}(\mathfrak{o}_E,\mathcal{O}_D)\neq\emptyset$ と仮定し, $\mathrm{Emb}(\mathfrak{o}_E,\mathcal{O}_D)$ の元 ι_0 を一つ固定する．$\mathrm{Emb}(\mathfrak{o}_E,\mathcal{O}_D)$ には E のイデアル類群 $\mathrm{Cl}(E)$ が作用する．この作用による ι_0 の軌道を $\{\iota_1,\ldots,\iota_h\}$ と書くことにする．ここで $h=\#\mathrm{Cl}(E)$ は E の類数を表す．

補題 2.1. 各 $1\leqq j\leqq h$ に対し，ある $a_j\in V_D$ が存在して，$\mathrm{Nm}(a_j)=-d$ および $\mathbb{Z}a_j=\iota_j(E)\cap L(\mathcal{O}_D)$ を満たす．

optimal な埋め込み ι_0 を一つ固定したとき, $\iota_0(E)$ の G での像を考えることにより, G のトーラス T が定まる．$\phi\in L^2(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}))$ に対し, ϕ の ι_0 に関するトーラス周期 $P_{\iota_0,E}(\phi)$ を

$$P_{\iota_0,E}(\phi)=\int_{T(\mathbb{Q})\backslash T(\mathbb{A})}\phi(t)dt$$

により定める．Hecke 固有形式 $f\in S_k^{\mathrm{new}}(\Gamma_0(2))$ を一つ固定し, f で生成される $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の保型表現を π' とする．π を $\mathrm{JL}(\pi)=\pi'$ を満たすような $G(\mathbb{A})$ の保型表現とする．ただし, JL は Jacquet-Langlands 対応を表す．次の定理は Waldspurger [6] の結果の特殊な場合である．

[2] $\Gamma\backslash G(\mathbb{R})\cong G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/K_f$ という同一視を用いている．

定理 2.2 (Waldspurger [6])**.** $v \in \{2, \infty\}$ に対し, $\varepsilon_v(\mathrm{BC}_{\mathbb{Q}}^{E}(\pi')) = -1$ と仮定する. ここで, ε_v は局所 root number であり, $\mathrm{BC}_{\mathbb{Q}}^{E}(\pi')$ は π' の E への base change を表す. このとき, π 上で $P_{\iota_0,E}(\phi) \not\equiv 0$ となることと $L(\mathrm{BC}_{\mathbb{Q}}^{E}(\pi'), \frac{1}{2}) \neq 0$ となることは同値である.

$L(\mathrm{BC}_{\mathbb{Q}}^{E}(\pi'), \frac{1}{2}) = L(f, \frac{k}{2})L(f \otimes \chi_E, \frac{k}{2})$ であるから, $L(f \otimes \chi_E, \frac{k}{2}) \neq 0$ であることをいうためには, ある $\phi \in \pi$ に対し, $P_{\iota_0,E}(\phi) \neq 0$ となることを示せばよい. 具体的な ϕ に対して $P_{\iota_0,E}(\phi)$ を計算するために次の結果を用いる.

命題 2.3. a_0 を $\mathrm{Nm}(a_0) = -d$, $\mathbb{Z}a_0 = \iota_0(E) \cap L(\mathcal{O}_D)$ となるようにとる. このとき, $\varphi \in \mathcal{H}_l^{\Gamma} \otimes \mathbb{C}$ に対し,

$$P_{\iota_0,E}(\mathcal{L}_{a_0}(\varphi)) = (\text{explicit non-zero constant}) \times \sum_{j=1}^{h} \varphi \circ \mathcal{T}(a_j)$$

が成り立つ.

2.3 Root number の計算

p は素数で $d = -p$ のとき, $p \equiv 3 \bmod 8$ であることと $v = 2, \infty$ に対し $\varepsilon_v(\mathrm{BC}_{\mathbb{Q}}^{E}(\pi')) = -1$ となることが同値である. 特に, このとき $\varepsilon(\mathrm{BC}_{\mathbb{Q}}^{E}(\pi')) = \prod_v \varepsilon_v(\mathrm{BC}_{\mathbb{Q}}^{E}(\pi')) = 1$ であり, さらに $\mathrm{Emb}(\mathfrak{o}_E, \mathcal{O}_D) \neq \emptyset$ であることも証明できる.

2.4 CM 点での値と判別式の合同

$l = 3$ のとき, つまり, $k = 2l + 2 = 8$ のとき, $\mathcal{H}_3^{\Gamma}$ は 1 次元の $\mathbb{Q}$-ベクトル空間であり, 生成元は

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - x_1^2 x_2 - x_1^2 x_3 - x_2^2 x_1 - x_2^2 x_3 - x_3^2 x_1 - x_3^2 x_2$$

で与えられる. この φ は Jacquet-Langlands 対応の下で定理 1.6 (2) の f に対応する. 一方, 補題 2.1 で与えられる a_j に対して, $\mathcal{T}(a_j) = (\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \alpha_{j3})$ とおくと,

$$\mathrm{Nm}(a_j) = 3\alpha_{j1}^2 + 3\alpha_{j2}^2 + 3\alpha_{j3}^2 - 2\alpha_{j1}\alpha_{j2} - 2\alpha_{j2}\alpha_{j3} - 2\alpha_{j3}\alpha_{j1}$$

となることが確認できる. この式を mod 4 で考えると $\mathrm{Nm}(a_j) \equiv -(\alpha_{j1} + \alpha_{j2} + \alpha_{j3})^2 \bmod 4$ となっていることがわかる. 一方, 補題 2.1 より $\mathrm{Nm}(a_j) = -d$ であるから $(\alpha_{j1} + \alpha_{j2} + \alpha_{j3})^2 \equiv d \bmod 4$ が得られる. よって, $d \equiv 1 \bmod 4$ なら $\alpha_{j1} + \alpha_{j2} + \alpha_{j3} \equiv \pm 1 \bmod 4$ であることがわかる. いま, $\varphi(x_1, x_2, x_3) \equiv (x_1 + x_2 + x_3)^3 \bmod 4$ なので

$$\varphi \circ \mathcal{T}(a_j) = \varphi(\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \alpha_{j3}) \equiv (\alpha_{j1} + \alpha_{j2} + \alpha_{j3})^3 \equiv \pm 1 \bmod 4$$

がわかる. 特に $\varphi \circ \mathcal{T}(a_j) \equiv 1 \bmod 2$ であるから, $\sum_{j=1}^{h} \varphi \circ \mathcal{T}(a_j) \equiv \sum_{j=1}^{h} 1 \equiv h \bmod 2$ となる. ここで, p を素数とし, $E = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $d = -p$, $p \equiv 3 \bmod 8$ と仮定すると $d \equiv 1 \bmod 4$ であり, Gauss の種の理論より h は奇数であるから, $\sum_{j=1}^{h} \varphi \circ \mathcal{T}(a_j) \equiv 1 \not\equiv 0 \bmod 2$ がわかる. よって命題 2.3 より, $P_{\iota_0,E}(\mathcal{L}_{a_0}(\varphi)) \neq 0$ がわかるので, 2.3 節の root number の計算と定理 2.2 により $L(f, 4)L(f \otimes \chi_E, 4) \neq 0$ となる. とくに $L(f \otimes \chi_E, 4) \neq 0$ であるから定理 1.6 (2) が得られた.

以上の議論をみればわかるように, 証明の鍵となるのは代数的保型形式の CM 点 $\{a_j\}$ での値と虚二次体の判別式の合同である. 他の例も計算してみると, このような合同関係が常に存在するわけではないようであり, このような合同がいつ存在するのかを考えてみるのは非常に興味深い問題のように思われる.

注意 2.4. 同様の合同関係が以下の場合にも見つかっている.

(i) D の判別式が 2 で Eichler 整環 $\mathcal{O}$ のレベルが 3, $l = 1$ の場合. この場合は mod 6 の合同が成立する.

(ii) D の判別式が 3 で Eichler 整環 $\mathcal{O}$ のレベルが 2, $l = 1$ の場合. この場合は mod 6 の合同が成立する.

(iii) D の判別式が 2 で Eichler 整環 $\mathcal{O}$ のレベルが 3, $l = 2$ の場合. この場合は mod 4 の合同が成立する.

(iv) D の判別式が 3 で Eichler 整環 $\mathcal{O}$ のレベルが 1, $l = 2$ の場合. この場合は mod 6 の合同が成立する.

(v) D の判別式が 2 で Eichler 整環 $\mathcal{O}$ のレベルが 5, $l = 1$ の場合. この場合は mod 10 の合同が成立する.

(i) と (ii) の場合の計算を用いることで定理 1.6 の (1) が得られる. また, (iii)–(v) の結果を用いることで定理 1.6 の類似の結果を部分的に示すことができる. さらに, 上記の例では全て $G(\mathbb{A}) = G(\mathbb{Q})K$ が成立している.

参考文献

[1] M. Chida and S. Wakatsuki, Non-vanishing theorems for prime twists of some modular L-functions, preprint, arXiv:2310.19496.

[2] J. Conrey, J. Keating, M. Rubinstein and N. Snaith, On the frequency of vanishing of quadratic twists of modular L-functions, In: Number theory for the millennium, I (Urbana, IL, 2000), 301–315, A K Peters, Ltd., Natick, MA, 2002.

[3] C. Delaunay, Note on the frequency of vanishing of L-functions of elliptic curves in a family of quadratic twists, In: Ranks of elliptic curves and random matrix theory, 195–200. London Math. Soc. Lecture Note Ser., 341, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[4] D. Goldfeld, Conjectures on elliptic curves over quadratic fields, In: Number theory, Carbondale 1979 (Proc. Southern Illinois Conf., Southern Illinois Univ., Carbondale, Ill., 1979), pp. 108–118, Lecture Notes in Math., 751, Springer, Berlin, 1979.

[5] H. Ochiai, S.Wakatsuki and S. Yokoyama, Computations of algebraic modular forms associated with the definite quaternion algebra of discriminant 2, preprint, arXiv:2312.15893.

[6] J.-L. Waldspurger, Sur les valeurs de certaines fonctions L automorphes en leur centre de symétrie, Compositio Math. **54** (1985), no. 2, 173–242.