

一般化マルコフ数について

行田 康晃 (東京大学)

1 はじめに

本稿は第 16 回福岡数論研究集会における筆者の講演の概説である。講演ではマルコフ方程式の紹介とその一般化である k -GM 方程式, その正整数解に現れる正整数であるマルコフ数・ k -GM 数の導入から始め, これらの正整数がもつツリー構造を説明した後に, このツリー構造を保つような「 $SL(2, \mathbb{Z})$ 行列化」を導入した。そして, この行列化を使ったマルコフ数や k -GM 数の組み合わせ論的な解釈を紹介した。本稿では講演内容の詳細を記す。

2 本稿の概要

本稿におけるメインテーマは k 一般化マルコフ数と呼ばれる整数である。長いので, これ以降略して k -GM 数¹と呼ぶ。ただし, k は非負整数である。この整数は, k 一般化マルコフ方程式 (こちらをこれ以降 k -GM 方程式と呼ぶ) と呼ばれる方程式

$$x^2 + y^2 + z^2 + k(yz + zx + xy) = (3 + 3k)xyz$$

の正整数解 (k 一般化マルコフトリプル, k -GM トリプル) に現れる整数のことである。例えば $k = 1$ の場合, 1-GM 方程式

$$x^2 + y^2 + z^2 + yz + zx + xy = 6xyz$$

の正整数解として $(1, 3, 13)$ がとれるので, $1, 3, 13$ は 1-GM 数である。特に $k = 0$ の場合の方程式

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$$

とその正整数解, そしてそれに現れる数はマルコフ方程式/マルコフトリプル/マルコフ数と呼ばれ, ディオファントス近似理論に端を発して 1880 年ごろに Andrei Markov の論文 [8, 9] によって導入されてから今もなお盛んに研究されている。 k -GM 数はそれから約 150 年後の 2022 年, [6] によってマルコフ方程式の理論をより包括的に理解することを目的として導入された。

後述するように, マルコフトリプル (あるいは k -GM トリプル) は一種の組み合わせ構造を持っており, 特にこの構造を通してマルコフ数は, 整数論に限らず, 数学上のさまざまな分野に現れる重要な整数となっている。しかし, 実はマルコフ数 (あるいは k -GM 数) のみで構成されている「骨だけの」ツリー構造の状態でこれ以上の応用を考えるのは結構難しいと筆者は考えている。ある分野に別の分野の概念を持ち込もうとする際には, その概念自体が数学的に

¹ k -GM 数は私 (行田) と共同研究者の松下浩大さんによって導入された概念であるが, 「GM」は我々の頭文字ではなく「Generalized Markov」の頭文字である。

応用が利きやすい形で記述できている (例えばそれ自身が群の構造をもっている, 多様体の構造を持っているなど) ことが望ましいが, k -GM トリプルからなる組み合わせ構造は, 一見するとそのような良い構造があまり見えないように思えるからである.

これを打破する方法は既にいくつか知られているが, 論文 [5, 4] では k -GM 数に情報を付け足して組み合わせ構造を扱いやすい形にすることを考えている. 具体的には, k -GM 数を考える代わりに, k -GM 数を $(1, 2)$ 成分にもつ $SL(2, \mathbb{Z})$ の元を考えてこれらが与える組み合わせ構造を観察している. 本稿ではこの増強化された k -GM 数として扱われる $SL(2, \mathbb{Z})$ の元の導入と, [4] で紹介されている k -GM 数の組み合わせ論的な解釈について見ていきたい.

3 k -GM 数のツリー構造

k -GM 数の $SL(2, \mathbb{Z})$ 行列化を考える前に, k -GM 数が持つ「骨だけの」組み合わせ構造を見ておくことにする. まず, 次のようなツリー構造を定義する.

定義 3.1 (k -GM ツリー). 次のルールで帰納的に定まる二分木 $MT(k)$ を考え, これを k -GM ツリーと呼ぶ.

- 最初の頂点は $(1, k + 2, 1)$,
- 各 (a, b, c) は以下のような 2 つの子を持つ.

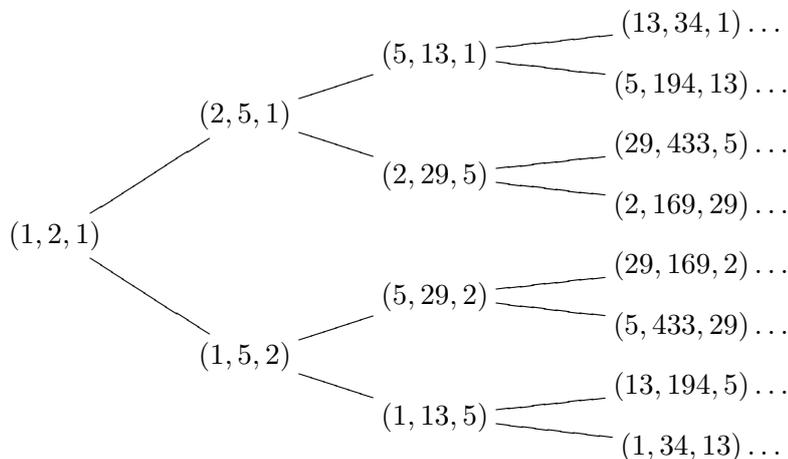
$$(a, b, c) \begin{cases} \left(a, \frac{a^2 + kab + b^2}{c}, b \right) \\ \left(b, \frac{b^2 + kbc + c^2}{a}, c \right) \end{cases}$$

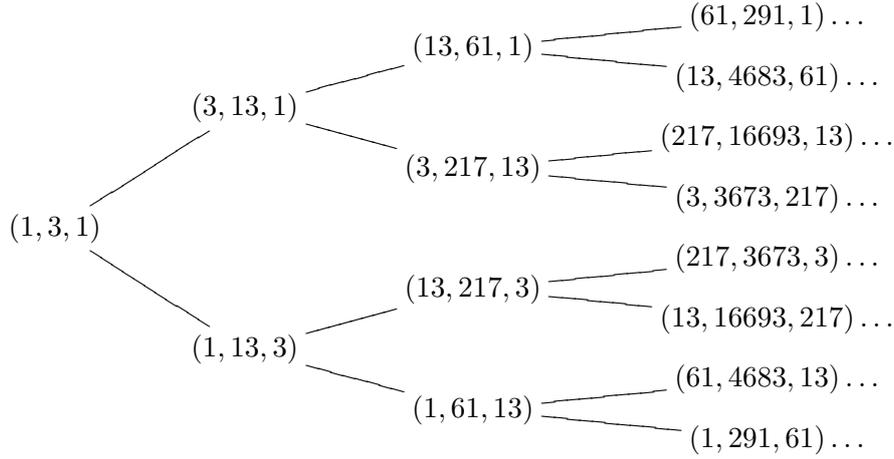
するとこのツリーについて次が成り立つ.

定理 3.2 ([6, Theorem 1]). k -GM ツリー $MT(k)$ について, 次のことが成り立つ.

- (1) 全ての頂点は第 2 成分が真に最も大きい k -GM トリプルである.
- (2) 第 2 成分が真に最も大きい k -GM トリプルは全て k -GM ツリーに含まれる. さらに, それらの解 (順番違いは区別する) は, このツリーにそれぞれちょうど 1 個ずつ含まれる.

以下は $k = 0, 1$ の場合のツリーである. 紙面の都合により, 横に倒した形で表示している.





注 3.3. 最初の頂点とその2つの子の対称性により, (a, b, c) がツリー上にあるとき順番違いの (c, b, a) もツリー上に存在し, この2つの頂点はツリーの中央を挟んで対称的な位置にあることがわかる.

さて, 上記のツリーでは第2成分が最も大きい k -GM トリプルが全て出現するようなツリーであるが, 第1成分や第3成分が最も大きい k -GM トリプルが出現するツリーも存在する.

定義 3.4 (逆 k -GM ツリー). 次のルールで帰納的に定まる二分木 $\text{MT}^\dagger(k)$ を考え, これを逆 k -GM ツリーと呼ぶ.

- 最初の頂点は $(1, 1, 1)$,
- 各 (a, b, c) は以下のような2つの子を持つ.

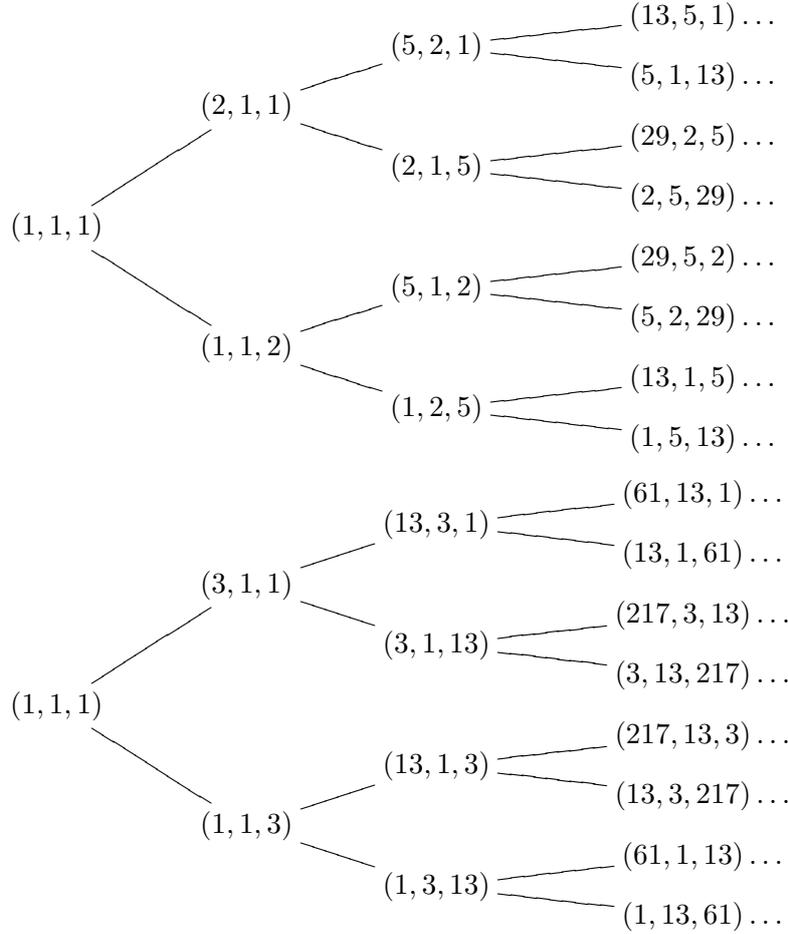
$$(a, b, c) \begin{cases} \left(a, c, \frac{a^2 + kac + c^2}{b} \right) \\ \left(\frac{a^2 + kbc + c^2}{b}, a, c \right) \end{cases}$$

このツリーの世代ルールは k -GM ツリーの世代ルールを下から上に辿る変換と一致しており, これが逆 k -GM ツリーの名前の由来である. このとき, 次の定理が成り立つ.

定理 3.5 ([4, Proposition 3.7]). 逆 k -GM ツリー $\text{MT}^\dagger(k)$ について, 次のことが成り立つ.

- (1) 全ての頂点は第1成分か第3成分が最も大きい (真に大きいとは限らない) k -GM トリプルである.
- (2) 第1成分か第3成分が最も大きい k -GM トリプルは全て逆 k -GM ツリーに含まれる. さらに, それらの解 (順番違いは区別する) は, それぞれちょうど1個ずつ含まれる.

$k = 0, 1$ の場合は次のようになる.



k -GM ツリーと逆 k -GM ツリーの間には、次のような関係がある.

命題 3.6 ([4, Proposition 3.5]). 対応 $\mu: (a, b, c) \mapsto \left(a, \frac{a^2 + kac + c^2}{b}, c \right)$ は $\text{MT}(k)$ から $\text{MT}^\dagger(k)$ への標準的なツリー同型を与える.

ただし、ここでの「標準的なツリー同型」とは、「ツリー同士の同型であって、左の子を与える操作と右の子を与える操作を保つようなもの」のことを指す (これ以降も同じ意味で使用する). つまり、上記の定理は $\text{MT}(k)$ のある頂点の第 2 成分を入れ替えて別の k -GM トリプルにすると、それは $\text{MT}^\dagger(k)$ の同じ位置にある頂点の k -GM トリプルであることを意味している. μ は 2 回作用させると元に戻る対応なので、 $\text{MT}^\dagger(k)$ から $\text{MT}(k)$ への標準的なツリー同型も与えることに注意されたい.

4 k -GM 数の 2 種類の $SL(2, \mathbb{Z})$ 行列化

上記の $\text{MT}(k)$ と $\text{MT}^\dagger(k)$ の構造を増強化するために、 k -GM 数を $(1, 2)$ 成分に持つ 2×2 行列を考える. その方法は 2 通りあるので、順番に紹介する.

4.1 一般化コーン行列

まずは一般化コーン行列と呼ばれる $SL(2, \mathbb{Z})$ 行列化を紹介する. この概念は [5] において導入されている.

定義 4.1 (k 一般化コーン行列). $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする. 2×2 行列 $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$ は, 次の条件を全て満たすとき k 一般化コーン行列 (以下省略して k -GC 行列) という:

- (i) $P \in SL(2, \mathbb{Z})$,
- (ii) p_{12} は k -GM 数,
- (iii) $\text{tr}(P) = (3 + 3k)p_{12} - k$.

k -GM 数が特定の 3 つが集まると k -GM トリプルを構成することの類似として, 特定の 3 つを集めたものとして k 一般化コーントリプルを導入する.

定義 4.2 (k 一般化コーントリプル). $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする. 2×2 行列の 3 つ組 (P, Q, R) は, 次の条件を全て満たすとき k 一般化コーントリプル (以下省略して k -GC トリプル) という:

- (i) P, Q, R は k -GC 行列,
- (ii) (p_{12}, q_{12}, r_{12}) は k -GM トリプル,
- (iii) $Q = PR - S_k$ を満たす. ただし $S_k = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 3k^2 + 3k & k \end{bmatrix}$ である.

これらの定義を眺めてみると, k -GC 行列と k -GC トリプルの条件 (iii) の特異性が目につくが, この条件の由来については後で説明する.

さて, 定義からはその存在性が明らかではない. まず自明解 $(1, 1, 1)$ の最初の頂点に対応する k -GC トリプルを考える.

命題 4.3 ([5, Proposition 3.4]). $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする. $(p_{12}, q_{12}, r_{12}) = (1, 1, 1)$ であるような k -GC トリプル (P, Q, R) は, 次で与えられるもので全てである:

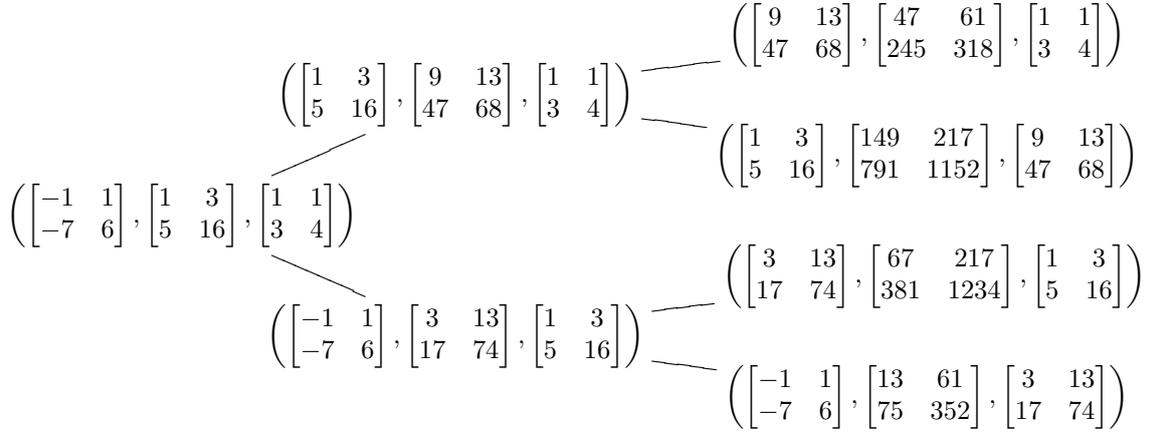
$$\begin{aligned} P = P_{1;\ell} &:= \begin{bmatrix} \ell & 1 \\ -\ell^2 + 2k\ell + 3\ell - 1 & -\ell + 2k + 3 \end{bmatrix}, \\ Q = Q_{1;\ell} &:= \begin{bmatrix} k + \ell + 1 & 1 \\ k^2 - \ell^2 + 3k + \ell + 1 & k - \ell + 2 \end{bmatrix}, \\ R = R_{1;\ell} &:= \begin{bmatrix} 2k + \ell + 2 & 1 \\ -\ell^2 - 2k\ell + 2k - \ell + 1 & -\ell + 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

ただし, ℓ は任意の整数とする.

この命題の証明はほとんど straightforward である. P の $(1, 1)$ 成分を ℓ と決めると, P, Q, R が $SL(2, \mathbb{Z})$ に入っていること, トレースの条件, $Q = PR - S_k$ であることから (P, Q, R) を決定することができる. 次に $(1, 1, 1)$ 以外の場合を考えるために, 次のツリーを導入する.

定義 4.4 (k -GC ツリー). 次のルールで帰納的に定まる二分木 $\text{GCT}(k, \ell)$ を考える.

$k = 1, \ell = -1$ のときは以下のようになる.



各行列の $(1, 2)$ 成分を抜き出すと, 先の例で与えた k -GM ツリーが与えられることがわかる. なお, (P, Q, R) は成分の順番を入れ替えて (R, Q, P) などにとすると k -GC トリプルにはならないことに注意が必要である.

注 4.7. $\text{GCT}(k, \ell)$ を定める際に, 最初の頂点として $(P_{1;\ell}, Q_{1;\ell}, R_{1;\ell})$ の左の子 $(P_{1;\ell}, P_{1;\ell}Q_{1;\ell} - S_k, Q_{1;\ell})$ をとったが, 右の子 $(Q_{1;\ell}, Q_{1;\ell}R_{1;\ell} - S_k, R_{1;\ell})$ を取った場合は違う頂点が出てくるので, k -GC 行列を頂点に持つツリーのバリエーションは $\text{GCT}(k, \ell)$ 以外にもまだあるのではと思われるかもしれない. しかし実際はそうではなく, $\text{GCT}(k, \ell)$ で全てである. 実際, $(P_{1;\ell}, Q_{1;\ell}, R_{1;\ell})$ の右の子は $(P_{1;k+\ell+1}, Q_{1;k+\ell+1}, R_{1;k+\ell+1})$ の左の子に一致し, さらに左の子全体の集合

$$\{(P_{1;\ell}, P_{1;\ell}Q_{1;\ell} - S_k, Q_{1;\ell}) \mid \ell \in \mathbb{Z}\}$$

は $(1, k+2, 1)$ に対応するすべての k -GC トリプルを与えるのである. したがって, k -GC トリプルを頂点に持つツリーを考えたい場合は, 最初の頂点として $(P_{1;\ell}, Q_{1;\ell}, R_{1;\ell})$ の左の子だけを考えれば十分であることがわかる.

k -GM ツリーには, $b > \max\{a, c\}$ を満たすような k -GM トリプル (a, b, c) を任意にとったときに, このトリプルがツリーのどこか 1 箇所に現れるという性質 (定理 3.2) があったが, k -GC ツリーにも同じような性質がある.

命題 4.8 ([5, Corollary 3.15]). 任意の $q_{12} > \max\{p_{12}, r_{12}\}$ を満たすような k -GC トリプル (P, Q, R) に対して, ある一意的な $\ell \in \mathbb{Z}$ とある一意的な頂点 $v \in \text{GCT}(k, \ell)$ が存在して, $v = (P, Q, R)$ を満たす.

次に, 逆 k -GM ツリーのコーン行列バージョンである逆 k -GC ツリーを導入する.

定義 4.9 (逆 k -GC ツリー). 次のルールで帰納的に定まる二分木 $\text{GCT}^\dagger(k, \ell)$ を考える.

- 最初の頂点は $(P_{1;\ell}, Q_{1;\ell}, R_{1;\ell})$
- 各 (P, Q, R) は以下のような 2 つの子を持つ.

$$\begin{array}{c}
 (P, Q, R) \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 (P, R, P^{-1}(R + S_k)) \quad ((P + S_k)R^{-1}, P, R)
 \end{array}$$

こちらの最初の頂点は $(P_{1;\ell}, Q_{1;\ell}, R_{1;\ell})$ で与えていて、このツリーの世代ルールは $\text{GCT}(k, \ell)$ の世代ルールを下から上に辿る変換に一致している。このツリーについて、やはり次の定理が成り立つ。

定理 4.10 ([4, Corollary 4.13]). 逆 k -GC ツリー $\text{GCT}^\dagger(k, \ell)$ について、次が成り立つ。

- (1) 全ての頂点は k -GC トリプルである。
- (2) (P, Q, R) とその2つの子 $(P, R, P^{-1}(R+S_k)), ((P+S_k)R^{-1}, P, R)$ の各行列をその (1, 2) 成分で置き換えると、

$$\begin{array}{c} (p_{12}, q_{12}, r_{12}) \\ \swarrow \quad \searrow \\ \left(p_{12}, r_{12}, \frac{p_{12}^2 + kp_{12}r_{12} + r_{12}^2}{q_{12}} \right) \quad \left(\frac{p_{12}^2 + kp_{12}r_{12} + r_{12}^2}{q_{12}}, p_{12}, r_{12} \right) \end{array}$$

となり、これは逆 k -GM ツリーの世代ルールに一致する。

次の系も k -GC ツリーの場合と同様に成り立つ。

系 4.11. 任意の $\ell \in \mathbb{Z}$ に対して、逆 k -GC ツリー $\text{GCT}^\dagger(k, \ell)$ の頂点に含まれる各行列をその (1, 2) 成分に置き換える操作は、 $\text{GCT}^\dagger(k, \ell)$ と逆 k -GM ツリー $\text{MT}^\dagger(k)$ の間の標準的なツリー同型を与える。特に、任意の k -GM トリプル (a, b, c) であって $b \leq \max\{a, c\}$ となるようなものに対して、 (a, b, c) をそれぞれの (1, 2) 成分にもつような k -GC トリプルが存在する。

さらに、次の命題も成り立つ。

命題 4.12 ([4, Corollary 4.14]). 任意の $q_{12} \leq \max\{p_{12}, r_{12}\}$ を満たすような k -GC トリプル (P, Q, R) に対して、ある一意的な $\ell \in \mathbb{Z}$ とある一意的な頂点 $v \in \text{GCT}^\dagger(k, \ell)$ が存在して、 $v = (P, Q, R)$ を満たす。

以上から、 $\text{MT}(k)$ や $\text{MT}^\dagger(k)$ はより情報量が多いツリーである $\text{GCT}(k, \ell)$ や $\text{GCT}^\dagger(k, \ell)$ の一部として実現できることがわかる。

この節の最後に、本家本元の k -GM ツリー/逆 k -GM ツリーが持たない (すなわち、(1, 2) 成分に制限した時に失われてしまう) 性質を紹介しておくことにする。

定理 4.13 ([5, Corollary 3.16], [4, Corollary 5.32]). 任意に $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と $\ell \in \mathbb{Z}$ をとる。このとき、 $\text{GCT}(k, \ell)$ の各頂点の第2成分は全て異なる k -GC 行列である。また、 $\text{GCT}^\dagger(k, \ell)$ の各頂点の第2成分は全て異なる k -GC 行列である。

定理 4.13 の類似の主張は k -GM ツリーや逆 k -GM ツリーでは明らかに成り立たない。実際、第2成分だけを抜き取ると、 k -GM ツリーも逆 k -GM ツリーもちょうどツリーの中央を挟んで鏡写しの関係になっていることがわかる。 k -GM ツリーはツリーの右半分または左半分のみを考えれば第2成分は重複していないように見えるが、これが本当に成り立つかどうかは今のところ未解決である (マルコフ数、 k -GM 数の一意性予想)。

ちなみにこの節の内容は $k = 0$ の場合、すなわち古典的なマルコフ数の場合については1955年に Harvey Cohn が導入・証明している [2]。このケースでは S_k は零行列であるから (P, Q, R) が 0-GC トリプル (コーントリプル) であるときは $Q = PR$ という良い形をした条件になっており、これはクリストッフエル語などの組み合わせ論的なツールと非常に相性がいいことが知

られている。一方で $k \neq 0$ の場合 S_k は零行列ではなく、このとき Q は $PR - S_k$ というあまり良くない形をしており、 $k = 0$ の理論を素直に適用できない場合が多々ある。そこで次の節では、 k の値によって世代ルールが変化しない、もう一つの $SL(2, \mathbb{Z})$ 行列化を導入することにする。

4.2 マルコフモノドロミー行列

ここでは、一般化コーン行列とは別の $SL(2, \mathbb{Z})$ 行列化を導入する。

定義 4.14 (k マルコフモノドロミー行列). $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする. 2×2 行列 $X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$ は、次の条件を全て満たすとき k マルコフモノドロミー行列 (あるいは単に k -MM 行列) という:

- (i) $X \in SL(2, \mathbb{Z})$,
- (ii) x_{12} は k -GM 数,
- (iii) $\text{tr}(X) = -k$.

こちらも特定の3つを集めたものを k -MM トリプルとする。

定義 4.15 (k -マルコフモノドロミートリプル). $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする. 2×2 行列の3つ組 (X, Y, Z) は、次の条件を全て満たすとき k マルコフモノドロミートリプル (あるいは単に k -MM トリプル) という:

- (i) X, Y, Z は k -MM 行列,
- (ii) (x_{12}, y_{12}, z_{12}) は k -GM トリプル,
- (iii) $XYZ = T_k$ を満たす. ただし $T_k = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3k+3 & -1 \end{bmatrix}$ である.

定義が k -GC 行列や k -GC トリプルとよく似ているものの、(iii) の条件が異なっている。しかし、実はこの定義でも k -GC トリプルと同じような性質が成り立つのである。まずは $(1, 2)$ 成分が $(1, 1, 1)$ であるような k -MM トリプルを決定する。

命題 4.16 ([4]). $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする. $(x_{12}, y_{12}, z_{12}) = (1, 1, 1)$ であるような k -MM トリプル (X, Y, Z) は、次で与えられるもので全てである:

$$\begin{aligned} X &= X_{1;\ell} := \begin{bmatrix} \ell & 1 \\ -\ell^2 - k\ell - 1 & -k - \ell \end{bmatrix}, \\ Y &= Y_{1;\ell} := \begin{bmatrix} -k + \ell - 1 & 1 \\ -\ell^2 + k\ell + 2\ell - k - 2 & -\ell + 1 \end{bmatrix}, \\ Z &= Z_{1;\ell} := \begin{bmatrix} -2k + \ell - 2 & 1 \\ -2k^2 - \ell^2 + 3k\ell - 6k + 4\ell - 5 & k - \ell + 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

ただし、 ℓ は任意の整数とする。

一般化コーン行列と同様、 X の $(1, 1)$ 成分を任意に指定するとそこから全ての値が定まる。さらに、次のツリーを考える。

定義 4.17 (k -MM ツリー). 次のルールで帰納的に定まる二分木 $\text{MMT}(k, \ell)$ を考える.

- 最初の頂点は $(X_\ell, Y_\ell, Z_\ell) := (X_{1;\ell}, Y_{1;\ell}Z_{1;\ell}Y_{1;\ell}^{-1}, Y_{1;\ell})$
- 各 (X, Y, Z) は以下のような2つの子を持つ.

$$\begin{array}{ccc} & (X, Y, Z) & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ (X, YZY^{-1}, Y) & & (Y, Y^{-1}XY, Z) \end{array}$$

k -GC トリプルとのときとよく似てるものの, こちらは k の値によらず世代ルールが一定である (k -GC ツリーの世代ルールには行列 S_k を引くステップがあり, この S_k の成分は k に依存している). そして, 次の定理が成り立つ.

定理 4.18 ([4, Corollary 5.8]). k -MM ツリー $\text{MMT}(k, \ell)$ について, 次が成り立つ.

- (1) 全ての頂点は k -MM トリプルである.
- (2) (X, Y, Z) とその2つの子 (X, YZY^{-1}, Y) , $(Y, Y^{-1}XY, Z)$ の各行列をその (1, 2) 成分で置き換えると,

$$\begin{array}{ccc} & (x_{12}, y_{12}, z_{12}) & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ \left(x_{12}, \frac{x_{12}^2 + kx_{12}y_{12} + y_{12}^2}{z_{12}}, y_{12}\right) & & \left(x_{12}, \frac{y_{12}^2 + ky_{12}z_{12} + z_{12}^2}{x_{12}}, z_{12}\right) \end{array}$$

となり, これは k -GM ツリーの世代ルールに一致する.

系 4.19. 任意の $\ell \in \mathbb{Z}$ に対して, k -MM ツリー $\text{MMT}(k, \ell)$ の頂点に含まれる各行列をその (1, 2) 成分に置き換える操作は, $\text{MMT}(k, \ell)$ と k -GM ツリー $\text{MT}(k)$ の間の標準的なツリー同型を与える. 特に, 任意の k -GM トリプル (a, b, c) であって $b > \max\{a, c\}$ となるようなものに対して, (a, b, c) をそれぞれの (1, 2) 成分にもつような k -MM トリプルが存在する.

$k = 0, \ell = 0$ の例は以下の通り.

$$\begin{array}{ccc} & & \left(\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -8 & 13 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\right) \\ & \left(\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\right) & \swarrow \quad \searrow \\ & & \left(\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -17 & 29 \\ -10 & 17 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\right) \\ \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\right) & & \\ & \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right) & \swarrow \quad \searrow \\ & & \left(\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -12 & 29 \\ -5 & 12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right) \\ & & \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 & 13 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\right) \end{array}$$

$k = 1, \ell = 0$ のときは次のようになる.

$$\begin{array}{c}
 \left(\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} -10 & 13 \\ -7 & 9 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{array} \right] \\
 \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{array} \right] \\
 \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} -4 & 13 \\ -1 & 3 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{array} \right] \end{array} \right) \begin{array}{l} \left(\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} -10 & 13 \\ -7 & 9 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} -48 & 61 \\ -37 & 47 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{cc} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} -150 & 217 \\ -103 & 149 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} -10 & 13 \\ -7 & 9 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{cc} -4 & 13 \\ -1 & 3 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} -68 & 217 \\ -21 & 67 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} -14 & 61 \\ -3 & 13 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} -4 & 13 \\ -1 & 3 \end{array} \right] \end{array} \right) \end{array}
 \end{array}$$

次の命題も k -GC の場合と同様に成り立つ.

命題 4.20 ([4, Proposition 5.9]). 任意の $y_{12} > \max\{x_{12}, z_{12}\}$ を満たすような k -MM トリプル (X, Y, Z) に対して, ある一意的な $\ell \in \mathbb{Z}$ とある一意的な頂点 $v \in \text{MMT}(k, \ell)$ が存在して, $v = (X, Y, Z)$ を満たす.

逆バージョンも k -GC の場合と同様に存在し, その性質も全て平行である.

定義 4.21 (逆 k -MM ツリー). 次のルールで帰納的に定まる二分木 $\text{MMT}^\dagger(k, \ell)$ を考える.

- 最初の頂点は $(X_{1;\ell}, Y_{1;\ell}, Z_{1;\ell})$
- 各 (X, Y, Z) は以下のような2つの子を持つ.

$$\begin{array}{c}
 (X, Y, Z) \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 (X, Z, Z^{-1}YZ) \quad (XYX^{-1}, X, Z)
 \end{array}$$

定理 4.22 ([4, Corollary 5.16]). 逆 k -MM ツリー $\text{MMT}^\dagger(k, \ell)$ について, 次が成り立つ.

- (1) 全ての頂点は k -MM トリプルである.
- (2) (X, Y, Z) とその2つの子 $(X, Z, Z^{-1}YZ), (XYX^{-1}, X, Z)$ の各行列をその (1, 2) 成分で置き換えると,

$$\begin{array}{c}
 (x_{12}, y_{12}, z_{12}) \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \left(x_{12}, z_{12}, \frac{x_{12}^2 + kx_{12}z_{12} + z_{12}^2}{y_{12}} \right) \quad \left(\frac{x_{12}^2 + kx_{12}z_{12} + z_{12}^2}{y_{12}}, x_{12}, z_{12} \right)
 \end{array}$$

となり, これは逆 k -GM ツリーの世代ルールに一致する.

系 4.23. 任意の $\ell \in \mathbb{Z}$ に対して, k -MM ツリー $\text{MMT}^\dagger(k, \ell)$ の頂点に含まれる各行列をその (1, 2) 成分に置き換える操作は, $\text{MMT}^\dagger(k, \ell)$ と k -GM ツリー $\text{MT}^\dagger(k)$ の間の標準的なツリー同型を与える. 特に, 任意の k -GM トリプル (a, b, c) であって $b \leq \max\{a, c\}$ となるようなものに対して, (a, b, c) をそれぞれの (1, 2) 成分にもつような k -MM トリプルが存在する.

命題 4.24 ([4, Proposition 5.17]). 任意の $y_{12} \leq \max\{x_{12}, z_{12}\}$ を満たすような k -MM トリプル (X, Y, Z) に対して, ある一意的な $\ell \in \mathbb{Z}$ とある一意的な頂点 $v \in \text{MMT}^\dagger(k, \ell)$ が存在して, $v = (X, Y, Z)$ を満たす.

以上のように, $\text{MT}(k)$ や $\text{MT}^\dagger(k)$ は $\text{MMT}(k, \ell)$ や $\text{MMT}^\dagger(k, \ell)$ でも増強化できることがわかる.

k -GC の方で成り立っていた第 2 成分の一意性も成立する.

定理 4.25 ([4, Corollaries 5.10, 5.34]). 任意に $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と $\ell \in \mathbb{Z}$ をとる. このとき, $\text{MMT}(k, \ell)$ の各頂点の第 2 成分は全て異なる k -MM 行列である. また, $\text{MMT}^\dagger(k, \ell)$ の各頂点の第 2 成分は全て異なる k -MM 行列である.

5 k -GC 行列と k -MM 行列の関係性

前節で k -GM 数の 2 種類の $SL(2, \mathbb{Z})$ 行列化である一般化コーン行列とマルコフモノドロミー行列を導入して, これらが非常によく似た性質を持つことを紹介した. ここまで類似しているからには, やはりこの 2 つの行列の間には何か良い関係性があるのではないかと考えるのが自然である. この節ではそれを紹介していくことにする. [4] では, 2 種類の関係性を発見している.

5.1 2 つのツリー同型 Ψ, Φ

2×2 行列上の次の写像 $\psi: M(2, \mathbb{Z}) \rightarrow M(2, \mathbb{Z})$ を考える (行列は 2×2 の整数成分行列であればよく, k -GC 行列や k -MM 行列である必要はない):

$$\psi: \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -m_{11} + m_{12}k - k & m_{12} \\ m_{21} - (k+3)m_{11} + k(2k+3)(m_{12}-1) & -m_{22} + (2k+3)m_{12} - k \end{bmatrix}.$$

この写像は全単射写像である. 実際, 逆写像が次の形で与えられる:

$$\psi^{-1}: \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -m_{11} + m_{12}k - k & m_{12} \\ m_{21} - (k+3)m_{11} - k^2(m_{12}-1) & -m_{22} + (2k+3)m_{12} - k \end{bmatrix}.$$

この写像について, 次の定理が成り立つ.

定理 5.1 ([4, Proposition 5.3]). ψ は k -MM 行列全体から k -GC 行列全体への全単射を与える.

さらに, $\Psi: M(2, \mathbb{Z})^3 \rightarrow M(2, \mathbb{Z})^3$ を $\Psi(X, Y, Z) = (\psi(X), \psi(Y), \psi(Z))$ で定義すると, 次の定理が成り立つ.

定理 5.2 ([4, Theorem 5.6]). 次の性質が成り立つ.

- (1) Ψ は k -MM トリプル全体から k -GC トリプル全体への全単射を与える.
- (2) さらに, Ψ は標準的なツリー同型 $\text{MMT}(k, \ell) \simeq \text{GCT}(k, -\ell)$, $\text{MMT}^\dagger(k, \ell) \simeq \text{GCT}^\dagger(k, -\ell)$ を誘導する.

(2) は $\text{MMT}(k, \ell)$ の世代ルールと $\text{GCT}(k, -\ell)$ の世代ルールが Ψ で保たれることを意味する。 $\text{MMT}^\dagger(k, \ell)$ と $\text{GCT}^\dagger(k, -\ell)$ も同様。 すなわち、図式

$$\begin{array}{ccc} (X, Y, Z) \xrightarrow{\Psi} (P, Q, R) & & (X, Y, Z) \xrightarrow{\Psi} (P, Q, R) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (X, YZY^{-1}, Y) \xrightarrow{\Psi} (P, PQ - S_k, Q) & & (Y, Y^{-1}XY, Z) \xrightarrow{\Psi} (Q, QR - S_k, R) \end{array}$$

が可換であるということを主張している。 ただし、 ℓ は符号が反転して $-\ell$ になっていることに注意されたい。

論文 [4] で発見された 2 種類のうちもう 1 種類を、次で導入する。 次で与えられる写像 $\Phi: \text{GL}(2, \mathbb{Z})^3 \rightarrow \text{GL}(2, \mathbb{Z})^3$ を考える:

$$\Phi(X, Y, Z) = (-(YZ)^{-1}, -(XZ)^{-1}, -(XY)^{-1}).$$

この写像は Ψ と違い、定義から直ちにその逆写像を特定することは難しい (そもそも全単射写像かどうかよくわからない)。 しかし、実は次の定理が成立する。

定理 5.3 ([4, Corollary 5.26]). 次の性質が成り立つ。

- (1) Φ は k -MM トリプル全体から k -GC トリプル全体への全単射を与える。
- (2) さらに、 Φ は標準的なツリー同型 $\text{MMT}(k, \ell) \simeq \text{GCT}^\dagger(k, \ell)$, $\text{MMT}^\dagger(k, \ell) \simeq \text{GCT}(k, \ell)$ を誘導する。

(2) は、 $\text{MMT}(k, \ell)$ の世代ルールと $\text{GCT}^\dagger(k, -\ell)$ の世代ルールが Φ で保たれることを意味している。 $\text{MMT}^\dagger(k, \ell)$ と $\text{GCT}(k, -\ell)$ も然り。 すなわち、図式

$$\begin{array}{ccc} (X, Y, Z) \xrightarrow{\Phi} (P, Q, R) & & (X, Y, Z) \xrightarrow{\Phi} (P, Q, R) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (X, YZY^{-1}, Y) \xrightarrow{\Phi} (P, R, P^{-1}(R + S_k)) & & (Y, Y^{-1}XY, Z) \xrightarrow{\Phi} ((P + S_k)R^{-1}, P, R) \end{array}$$

が可換であるということを主張している。

Ψ との違いは、標準的なツリー同型が順方向のツリーから逆方向のツリーへのものであるという点、そして ℓ が保存されるという点である。 こちらは Ψ と違って、行列同士の 1 対 1 の対応があるわけではない。

5.2 写像 Φ にまつわる背景

この節では写像 Φ にまつわる背景について説明する。 これは、 k -GC 行列の定義における、一見すると不思議な条件である (iii) と深く関わっている。

少し唐突に思えるが、次の方程式を考える:

$$x^2 + y^2 + z^2 + (2k + k^2)(x + y + z) + 2k^3 + 3k^2 = xyz.$$

この方程式は第 $2k$ -一般化マルコフ方程式 (第 $2k$ -GM 方程式) と呼ぶ。 第 2 という名前がついている理由は次の命題にある。

命題 5.4 ([6, Proposition 2.4]). 次が成り立つ.

- (1) (a, b, c) が k -GM 方程式の実数解/有理数解であることと, $((3 + 3k)a - k, (3 + 3k)b - k, (3 + 3k)c - k)$ が第 $2k$ -GM 方程式の実数解/有理数解であることは同値である.
- (2) 特に (a, b, c) が k -GM トリプルであるとき, $((3 + 3k)a - k, (3 + 3k)b - k, (3 + 3k)c - k)$ が第 $2k$ -GM 方程式の正整数解である.

主張 (2) について, $k = 0$ のときは逆が成り立つことが知られているが, 一般の k では成り立たない. 例えば $k = 4$ のとき, $(9, 9, 22)$ は第 $2k$ -GM 方程式の正整数解だが, これに対応する k -GM 方程式の解は $\left(\frac{13}{15}, \frac{13}{15}, \frac{26}{15}\right)$ で, 整数組ではないので明らかにこれは k -GM トリプルではない. 第 $2k$ -GM 方程式の正整数解で, 対応する k -GM 方程式の解が k -GM トリプルであるようなものを誘導解と呼ぶ.

さて, この命題と k -GC 行列の定義の

$$(iii) \operatorname{tr}(P) = (3 + 3k)p_{12} - k$$

を比較すると, $(1, 2)$ 成分の値とトレースの値の関係性が k -GM トリプルとそれに対応する誘導解の関係になっていることがわかる. したがって, k -GC トリプルの定義のうちの

$$(ii) (p_{12}, q_{12}, r_{12}) \text{ は } k\text{-GM トリプル}$$

は次のように書き換えることができる.

$$(ii)' (\operatorname{tr}(P), \operatorname{tr}(Q), \operatorname{tr}(R)) \text{ は第 } 2k\text{-GM 方程式の誘導解である.}$$

したがって, k -GC トリプル (P, Q, R) に対して次の等式が成立していることがわかる:

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(P)^2 + \operatorname{tr}(Q)^2 + \operatorname{tr}(R)^2 + (2k + k^2)(\operatorname{tr}(P) + \operatorname{tr}(Q) + \operatorname{tr}(R)) + 2k^3 + 3k^2 \\ = \operatorname{tr}(P)\operatorname{tr}(Q)\operatorname{tr}(R). \end{aligned}$$

一方で, 全く別の文脈において, 次のような $SL(2, \mathbb{C})$ の元の間恒等式が知られていた.

命題 5.5 ([7, 10]). 任意の $(X, Y, Z) \in SL(2, \mathbb{C})^3$ に対して, $x := -\operatorname{tr}(YZ), y := -\operatorname{tr}(ZX), z := -\operatorname{tr}(XY), a := -\operatorname{tr}(X), b := -\operatorname{tr}(Y), c := -\operatorname{tr}(Z), d := -\operatorname{tr}(XYZ)$ とすると,

$$x^2 + y^2 + z^2 + (ad + bc)x + (bd + ca)y + (cd + ab)z + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + abcd - 4 = xyz$$

が成り立つ.

ここで, この恒等式と k -GC トリプルが満たす方程式を比較すると, 次のような条件を満たす (X, Y, Z) があるのではないかと疑問が浮かぶ.

- (1) $\operatorname{tr}(P) = -\operatorname{tr}(YZ), \operatorname{tr}(Q) = -\operatorname{tr}(ZX), \operatorname{tr}(R) = -\operatorname{tr}(XY),$
- (2) $\operatorname{tr}(X) = \operatorname{tr}(Y) = \operatorname{tr}(Z) = -k,$
- (3) $\operatorname{tr}(XYZ) = -2.$

実際, この条件を $SL(2, \mathbb{C})$ 恒等式に代入すると, k -GC 行列のトレースに関する方程式を得る. 実は, この条件を満たす行列 (X, Y, Z) というデザインのもとで定義されたのが k -MM 行列と k -MM トリプルである. k -MM 行列の定義のうち

$$(iii) \operatorname{tr}(X) = -k$$

が上記の (2), k -MM トリプルの定義の条件

$$(iii) XYZ = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3k+3 & -1 \end{bmatrix}$$

が (3) と噛み合うものであることがわかる. さらに $P = (-YZ)^{-1}, Q = (-XZ)^{-1}, R = (-XY)^{-1}$ とすることで上記の条件 (1)(2)(3) を全て満たすようにできるが, (X, Y, Z) から (P, Q, R) への, この対応が写像 Φ である. 論文 [4] では (P, Q, R) を k -MM トリプル (X, Y, Z) を使って $P = (-YZ)^{-1}, Q = (-XZ)^{-1}, R = (-XY)^{-1}$ と表す対応, すなわち Φ (の制限) の逆写像のことをマルコフモノドロミー分解と呼んでいる. Φ^{-1} が逆写像になることは, このマルコフモノドロミー分解が常に存在し, かつ一意であることを意味する.

5.3 Ψ と Φ の関係性

この節の最後に, 今まで与えた標準的なツリー同型 Ψ と Φ の関係性について言及しておくことにする. 異なるツリーの間と同型を与えているので, 明らかにこの2つの写像は同じものではない. しかし, これらを合成すると興味深い観察を得ることができる.

定理 5.6 ([4, Theorems 5.31, 5.33]). (1) 写像 $\Phi \circ \Psi^{-1}$ に対して, 次の図式は可換である.

$$\begin{array}{ccccc} \text{GCT}(k, \ell) & \xrightarrow{\Phi \circ \Psi^{-1}} & \text{GCT}^\dagger(k, -\ell) & \xrightarrow{\Phi \circ \Psi^{-1}} & \text{GCT}(k, \ell) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{MT}(k) & \xrightarrow{\mu} & \text{MT}^\dagger(k) & \xrightarrow{\mu} & \text{MT}(k, \ell) \end{array}$$

(2) 写像 $\Psi^{-1} \circ \Phi$ に対して, 次の図式は可換である.

$$\begin{array}{ccccc} \text{MMT}(k, \ell) & \xrightarrow{\Psi^{-1} \circ \Phi} & \text{MMT}^\dagger(k, -\ell) & \xrightarrow{\Psi^{-1} \circ \Phi} & \text{MMT}(k, \ell) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{MT}(k) & \xrightarrow{\mu} & \text{MT}^\dagger(k) & \xrightarrow{\mu} & \text{MT}(k, \ell) \end{array}$$

ただし, μ は命題 3.6 で用いたものと同じ記号であり, 上の図式中で上から下への写像は行列をその (1, 2) 成分でき置き換える操作から定まる標準的なツリー同型であるとする.

この定理は, $\Phi \circ \Psi^{-1}$ や $\Psi^{-1} \circ \Phi$ が 3 節で導入した μ を増強化したものであるということを意味している. ここからさらに, 次の系たちを得る.

系 5.7. $(\Phi \circ \Psi^{-1})^2$ は k -GC トリプル全体からなる集合上の恒等式写像である. 同様に, $(\Psi^{-1} \circ \Phi)^2$ は k -MM トリプル全体からなる集合上の恒等式写像である.

系 5.8. $\Phi^{-1} = \Psi^{-1} \circ \Phi \circ \Psi^{-1}$ が成立する. 特に, (P, Q, R) のマルコフモノドロミー分解は与えられた (P, Q, R) の値を使ったアルゴリズムで計算できる.

一見因数分解のような計算の困難さを持っているように見えるマルコフモノドロミー分解であるが、 Ψ^{-1} と Φ は対応が明示的な写像なので、実はこれらを組み合わせて計算ができることがわかる。

注 5.9. 写像 Ψ の幾何学的あるいは代数的文脈における良い解釈は、現在のところ見つかっていない。

6 既約分数から k -GM 数を構成するアルゴリズム

ここでは、正の既約分数から k -GM 数を計算するアルゴリズムを紹介する。

6.1 ファレイツリーと k -GM 数の分数ラベリング

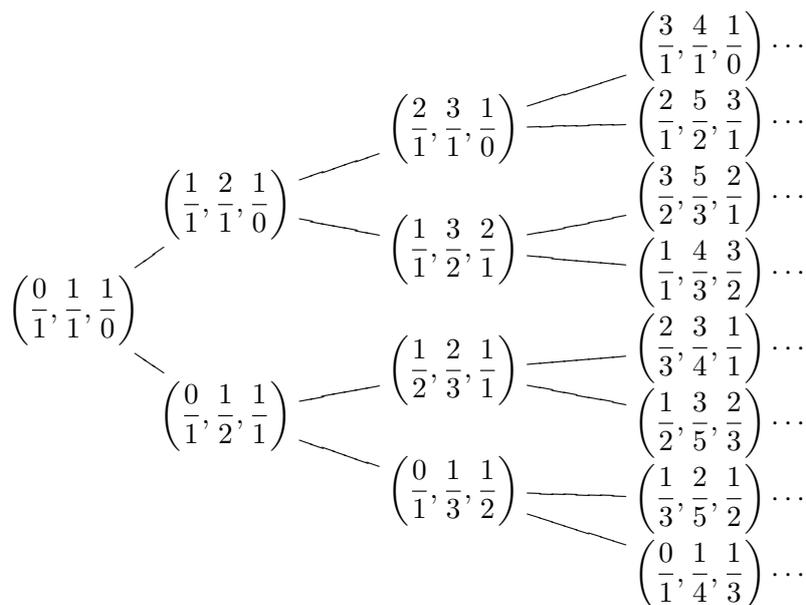
まず、 k -GM 数、 k -GC 行列を既約分数でラベリングすることを考える。まず、ファレイツリーと呼ばれる既約分数のツリーを導入する。

定義 6.1 (ファレイツリー). 次のルールで帰納的に定まる二分木 FT を考える。

- 最初の頂点は $\left(\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0}\right)$,
- 各頂点 $\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}\right)$ は以下のような 2 つの子を持つ。

$$\begin{array}{ccc} & \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}\right) & \\ & / \quad \backslash & \\ \left(\frac{a}{b}, \frac{a+c}{b+d}, \frac{c}{d}\right) & & \left(\frac{c}{d}, \frac{c+e}{d+f}, \frac{e}{f}\right) \end{array}$$

このツリーの最初の 15 個の頂点は次のようになる。



このツリーについて、次の定理が成り立つ。

定理 6.2. 全ての正の既約分数に対して、その分数を第 2 成分にもつ FT の頂点が一意的に存在する。

定理 6.2 の証明は、例えば [1] の 3.2 節を参照せよ。このファレイツリーは、既約分数を効率よく全列挙することができるツリーであるといえる。また、世代ルールを見ると k -GM ツリーや k -GC ツリー、 k -MM ツリーなどと同じで、新しい値が第 2 成分に入り、もともと第 2 成分だった値が右か左にずれていることがわかる。ここから、このツリーの成分と k -GM ツリーや k -GC ツリーの成分を使って対応を作れる。これをもう少し見ていく。

MT(k) の頂点の各成分たちに、ファレイツリー FT の既約分数を使ってラベリングしていくことを考える。例えば、MT(k) の最初の頂点は $(1, k+2, 1)$ なので、ここに FT の最初の頂点 $\left(\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0}\right)$ をつかってラベル付けする。 k -GM 数 1 には既約分数 $0/1$ と $1/0$ 、 $k+2$ には既約分数 $1/1$ 、となる。ここで、ラベルと k -GM 数は 1 対 1 の関係ではないことに注意されたい。続いて、各々の世代ルールを使って生まれてくる新しい k -GM 数と新しい既約分数を順番に対応させていく。MT(k) において最初の頂点の左の子は $(1, 2k^2 + 6k + 5, k+2)$ であり、FT の最初の頂点の左の子は $\left(\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right)$ なので、新しく出てきた $2k^2 + 6k + 5$ に既約分数 $\frac{1}{2}$ をラベリングする (既出の第 1 成分、第 3 成分の k -GM 数と既約分数の対応はすでにラベリングしたものになっている)。この操作を続けていくことで、任意の k -GM 数に既約分数がラベリングされる。既約分数 t がラベリングされている k -GM 数を $m_{k,t}$ と書くことにする。例えば $m_{k,0/1} = 1, m_{k,1/1} = k+2, m_{k,1/2} = 2k^2 + 6k + 5$ である。

また、これと同じことを GCT(k, ℓ) でも行う。GCT(k, ℓ) の最初の頂点 (P, Q, R) はそれぞれ $P = P_{1;\ell}, Q = P_{1;\ell}Q_{1;\ell} - S_k, R = Q_{1;\ell}$ だったので、この 3 つに分数 $0/1, 1/1, 1/0$ をラベル付けし、以下世代ルールに従って GCT(k, ℓ) に現れる全ての k -GC 行列に既約分数に対応させていく。既約分数 t がラベリングされている GCT(k, ℓ) の k -GC 行列を $C_t(k, \ell)$ で表すことにする。 k と ℓ を一つ固定すると、これらの対応は k -GM 数の場合とは異なり定理 4.13 により (全) 単射である。さらに k -MM 行列にも全く同様にして分数ラベリングを行う。MMT(k, ℓ) に対して FT を使ってラベリングしたものを考えた時、 t に対応する k -MM 行列を $M_t(k, \ell)$ で表す。ここで、定理 4.25 から k と ℓ を固定したとき $t \mapsto M_t(k, \ell)$ は単射である。

さて、この節では以下の問題を考える。

問題 6.3. $C_t(k, -k), M_t(k, 0)$ の各成分を k と t の情報から計算せよ。

$C_t(k, \ell)$ の ℓ として $-k$ を、 $M_t(k, \ell)$ の ℓ として 0 をとってきているのは、天下りの的ではあるがそう設定することによって行列の成分としてある意味で「良い」値が出現するからである。また、系 4.6 や系 4.19 から、 $C_t(k, -k)$ の $(1, 2)$ 成分や $M_t(k, 0)$ の $(1, 2)$ 成分は $m_{k,t}$ なので、ここから対応する k -GM 数を計算することもできる。

さて、ここからは問題 6.3 を解決するためのアルゴリズムを例を交えつつ説明する。非負整数 k と正の既約分数 $t > 0$ をとり、固定する。まず、傾きが t の線分 L_t を x 軸と y 軸を固定した平面 \mathbb{R}^2 上にとる。ここで、この線分 L_t の端点はどちらも整数格子点上にあって、 L_t はそれ以外の整数格子点を通らないようなものとする。整数格子点を頂点に持つ長さ 1 の正方形であって L_t が通るものを全て取り出し、その全ての正方形の左上から右下にかけて対角線を引く。ここまでの、例えば $t = 2/5$ のときは下図のような図形が描けている。

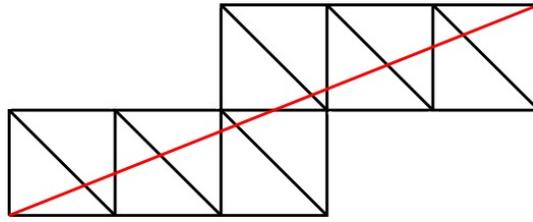


図 1: $t = 2/5$ のプレ蛇グラフ

この図形のことを, t のプレ蛇グラフという. 次に, このプレ蛇グラフの各パーツに次のルールで符号 $\{+, -\}$ を配置する. まず, 線分 L_t に左下から右上方向への向きを定めておく.

(1) プレ蛇グラフを分割する各直角三角形に対して.

[1] 次の条件を満たす直角三角形に $-$ を配置する (図 2 を参照).

1. 線分 L_t が左下の端点を共有している直角三角形.
2. L_t の進行方向の向かって左側が四角形に分割されるような直角三角形.



図 2: $-$ を配置する三角形

[2] 次の条件を満たす直角三角形に $+$ を配置する (図 3 を参照).

1. 線分 L_t が右上の端点を共有している直角三角形.
2. L_t の進行方向の向かって右側が四角形に分割されるような直角三角形.



図 3: $+$ を配置する三角形

(2) プレ蛇グラフの内部を通る垂直線, 水平線, 斜線について.

[1] L_t 上か, L_t の進行方向の向かって左側に中点が存在する垂直線, 水平線, 斜線に $-$ を配置する (図 4 を参照).



図 4: $-$ を配置する線分

[2] L_t の進行方向の向かって右側に中点が存在する垂直線, 水平線, 斜線に $+$ を配置する (図 5 を参照).



図 5: $+$ を配置する線分

以上のルールに従って $t = 2/5$ のプレ蛇グラフに符号を配置すると次のような図を得る.

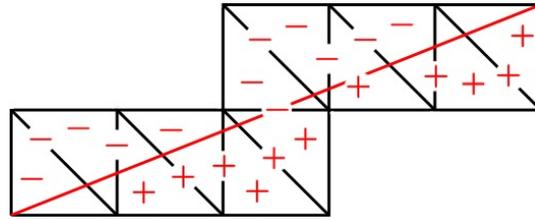


図 6: 符号つきプレ蛇グラフ

この符号を, 線分 L が左下から右上に向かって通る順番に並べる. ただし, 直角三角形上の符号は 1 回カウント, 線分上の符号は k 回重複カウントする ($k = 0$ のときはカウントしない). たとえば, $t = 2/5$ の例では

- $k = 0$ のとき: $-, -, +, -, +, +, -, -, +, -, +, +$
- $k = 1$ のとき: $-, -, -, -, +, +, -, +, +, +, +, -, -, -, -, +, -, -, +, +, +, +$

である. さらにこの符号の列をみて, 同じ符号が続いている数を順番に並べ, それを使って正則連分数を構成する. $t = 2/5$ の例では $k = 0$ のとき $[2, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2]$, $k = 1$ のとき $[4, 2, 1, 4, 5, 1, 2, 4]$, $k = 2$ のとき $[6, 3, 1, 6, 8, 1, 3, 6]$, $k = 3$ のとき $[8, 4, 1, 8, 11, 1, 4, 8]$ となる. ただし,

$$[a_1, \dots, a_m] := a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_{m-1} + \frac{1}{a_m}}}}$$

である. この手順で得られる連分数を $F^+(k, t)$ と書くことにする. 連分数 $[a_1, \dots, a_m]$ を既約分数に直した時の分子を $m(a_1, \dots, a_m)$ と表すことにすると, この連分数を使って次のように $C_t(k, -k)$ と $M_t(k, 0)$ が記述される.

定理 6.4 ([4, Theorem 7.10]). $F^+(k, t) = [a_1, \dots, a_m]$ とする. このとき,

$$M_t(k, 0) = \begin{bmatrix} -m(a_1, \dots, a_{m-1}) & m(a_1, \dots, a_m) \\ -m(a_2, \dots, a_{m-1}) & m(a_2, \dots, a_m) \end{bmatrix},$$

$$C_t(k, -k) = \begin{bmatrix} m(a_2, \dots, a_m) & m(a_1, \dots, a_m) \\ (3k+3)m(a_2, \dots, a_m) - m(a_2, \dots, a_{m-1}) & (3k+3)m(a_1, \dots, a_m) - m(a_1, \dots, a_{m-1}) \end{bmatrix}$$

が成立する. 特に, $m_{k,t} = m(a_1, \dots, a_m)$ である.

実際に $F^+(k, 2/5)$ を計算してみると $k = 0$ のとき $F^+(0, 2/5) = [2, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2] = 194/75$, $k = 1$ のとき $[4, 2, 1, 4, 5, 1, 2, 4] = 4683/1075$, $k = 2$ のとき $[6, 3, 1, 6, 8, 1, 3, 6] = 37636/6013$, $k = 3$ のとき $[8, 4, 1, 8, 11, 1, 4, 8] = 176405/21501$ で分子の値が k -GM 数になっているのが確認できる.

$F^+(k, t)$ 分子は k -GM 数であることがわかったが, 分母はどのような意味を持つ数だろうか. それを説明するために, 特性数と呼ばれる数を導入する.

定義 6.5 (特性数). $(r, t, s) \in \text{FT}$ とする. このとき,

$$m_{k,r}x \equiv m_{k,s} \pmod{m_{k,t}}$$

を満たす $0 < x < m_{k,t}$ が一意的に存在する. この x を $u_{k,t}$ とかき, (k, t) の特性数という.

上記の定義は「 x が一意的である」という非自明な主張を含んでいることに注意されたい (この事実は $m_{k,r}, m_{k,t}, m_{k,s}$ が常に互いに素であることから従う). また, $u_{k,t}$ は定義から t だけでなく r, s にも依存しているように見えるが, (r, t, s) は t が決まれば一意に決まってしまうので実際は $(k$ と) t のみに依存する.

実は次の定理により, $C_t(k, -k)$ の $(1, 1)$ 成分の定理 6.4 とは異なる表示が与えられる.

命題 6.6 ([5, Lemma 4.5]). $C_t(k, -k)$ の $(1, 1)$ 成分は特性数 $u_{k,t}$ である.

これにより, 特性数 $u_{k,t}$ は $F^+(k, t) = (a_1, \dots, a_m)$ としたとき $m(a_2, \dots, a_m)$ で与えられる値であることもわかる. さらに, $m(a_2, \dots, a_m)$ は $F^+(k, t)$ の分母であることがわかっており, ここから次の定理が従う.

定理 6.7 ([4, Theorem 7.25]). $F^+(k, t) = \frac{m_{k,t}}{u_{k,t}}$ が成り立つ.

注 6.8. 本稿ではプレ蛇グラフのみを導入し, プレ蛇グラフから与えられる蛇グラフの導入を省略した. 実は, $m_{k,t}$ は連分数 $F^+(k, t)$ の分子で与えられると同時に蛇グラフにおける完全マッチングの個数でもあり, 論文 [4] ではこれを利用してこの節の諸定理を証明している.

謝辞

第 16 回福岡数論研究集会において講演の機会を与えて下さった松坂俊輝先生はじめ, 運営の先生方に感謝申し上げます. 本研究は JSPS 科研費 JP22KJ0731 の助成を受けたものです.

参考文献

- [1] M. Aigner, Markov's theorem and 100 years of the uniqueness conjecture, Springer, Cham, 2013.
- [2] H. Cohn, Approach to Markoff's minimal forms through modular functions, Ann. of Math. (2) **61** (1955), 1–12.
- [3] G. Frobenius, Über die Markovschen Zahlen, Sitzungsberichte Konig. Preuss. Akad. Wiss. (1913), 458–487.
- [4] Y. Gyoda, S. Maruyama and Y. Sato, $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ -matrixizations of Generalized Markov numbers, preprint, arXiv:2407.08203.
- [5] Y. Gyoda and S. Maruyama, Uniqueness theorem of generalized Markov numbers that are prime powers, preprint, arXiv:2312.07329.
- [6] Y. Gyoda and K. Matsushita, Generalization of Markov Diophantine equation via generalized cluster algebra, Electron. J. Combin. **30** (2023), no. 4, Paper No. 4.10, 20 pp.

- [7] F. Luo, Geodesic length functions and Teichmüller spaces, *J. Differential Geom.* **48** (1998), no. 2, 275–317.
- [8] A. Markoff, Sur les formes quadratiques binaires indefinies, *Math. Ann.* **15** (1879), no. 3-4, 381–406.
- [9] A. Markoff, Sur les formes quadratiques binaires indefinies (Sécond mémoire), *Math. Ann.* **17** (1880), no. 3, 379–399.
- [10] T. Nakanishi and M. Naatanen, Areas of two-dimensional moduli spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* **129** (2001), no. 11, 3241–3252.
- [11] M. Perling, Unfocused notes on the Markoff equation and T-Singularities, preprint, arXiv:2210.12982.
- [12] P. Schmutz, Systoles of arithmetic surfaces and the Markoff spectrum, *Math. Ann.* **305** (1996), no. 1, 191–203.
- [13] G. Urzua and J. P. Zuniga, The birational geometry of Markov numbers, preprint, arXiv:2310.17957.