多重ゼータ値の積構造から得られる超幾何関数の特殊値について

角野 裕太 (東北大学)

概 要

多重ゼータ値とは, Riemann ゼータ関数の整数点における特殊値を多重級数へ拡張したものであり, その無理数性や超越性の解決は, 重要な課題の 1 つである. また, いくつかのインデックスに対する多重ゼータ値の母関数は, 超幾何関数の 1 での特殊値を用いて表すことができる. この母関数表示は, 多重ゼータ値の明示公式を導出する際に非常に重要な役割を果たす場合が知られている. 本稿では, 多重ゼータ値の定義級数から自然に導入される調和積を用いることにより, Gauss 超幾何関数の特殊値の複数個の積が, 1 つの一般化された超幾何関数と等価であることを与える. また, その式を多重ゼータ値の母関数とみなすことにより, 特定のインデックスに対する多重ゼータ値の明示公式を与える.

1 多重ゼータ値の明示公式と母関数, 超幾何関数

インデックス $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_r) \in \mathbb{Z}_{>1} \times \mathbb{Z}_{>0}^{r-1}$ に対して, **多重ゼータ値** (*Multiple zeta values*, 以下 MZV) とは多重級数

$$\zeta(\boldsymbol{k}) = \zeta(k_1, \ldots, k_r) := \sum_{m_1 > \cdots > m_r > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_r^{k_r}}$$

によって定義される実数である. ただし, **空インデックス** $\emptyset$ に対しては, $\zeta(\emptyset) := 1$ とする. ここで, $\mathrm{dep}(\boldsymbol{k}) := r$ は MZV の**深さ** (*depth*), $\mathrm{wt}(\boldsymbol{k}) := k_1 + \cdots + k_r$ は MZV の**重さ** (*weight*) と呼ばれる重要な量である. 深さが 1 の MZV は, Riemann ゼータ関数の正の整数点での値である. 特に重さが偶数のときは, 次の等式が成り立つ.

定理 1.1 (Euler, see [1])**.** 任意の自然数 $k \geq 1$ に対して, 以下の等式が成り立つ:

$$\zeta(2k) = -\frac{1}{2}\frac{B_{2k}}{(2k)!}(2\pi\sqrt{-1})^{2k} \ \in \mathbb{Q}\pi^{2k}.$$

ただし, B_n は n 番目の **Bernoulli 数**であり, 以下の母関数によって定義される:

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} = \frac{te^t}{e^t - 1}.$$

例を挙げると以下のようになる:

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \quad \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}, \cdots.$$

本稿では, 定理 1.1 のように, MZV を円周率 π と定数 (特に有理数) の組み合わせで表した式を MZV の**明示公式**と呼ぶことにする. この他にも, 深さが 2 以上の MZV に関する明示公式として, 次が知られている.

命題 1.2 (known, see [1])**.** 自然数 $n \geq 0,\, k > 0$ に対して, 以下の等式が成り立つ:

$$\zeta(\{2k\}^n) = C_n^{(k)} \frac{(2\pi\sqrt{-1})^{2nk}}{(2nk)!} \ \in \mathbb{Q}\pi^{2nk}. \tag{1.1}$$

ただし, $C_n^{(k)}$ は漸化式

$$C_0^{(k)} = 1, \quad C_n^{(k)} = \frac{1}{2n}\sum_{m=1}^{n}(-1)^m\binom{2nk}{2mk}B_{2mk}C_{n-m}^{(k)} \quad (n > 0)$$

によって帰納的に定義される有理数であり, $\{a_1, \ldots, a_r\}^n$ は数列 $a_1, \ldots, a_r$ を n 回繰り返したものの省略である.

命題 1.2 は, 定理 1.1 と MZV の定義級数から自然に導入される積構造 (**調和積**) を組み合わせることにより示される. ここで, 調和積とは自然数 $p, q, r > 1$ に対して成り立つ, 以下の等式を一般化したものである (定義は 2 節で与える):

$$\begin{aligned}
\zeta(p)\zeta(q,r) &= \left(\sum_{l>0}\frac{1}{l^p}\right)\left(\sum_{m>n>0}\frac{1}{m^q n^r}\right) \\
&= \left(\sum_{l>m>n>0} + \sum_{m>l>n>0} + \sum_{m>n>l>0} + \sum_{l=m>n>0} + \sum_{m>l=n>0}\right)\frac{1}{l^p m^q n^r} \\
&= \zeta(p,q,r) + \zeta(q,p,r) + \zeta(q,r,p) + \zeta(p+q,r) + \zeta(q,p+r).
\end{aligned}$$

一方, MZV の母関数を考えると, **超幾何関数**

$${}_{p+1}F_p\left(\left.\begin{matrix}\alpha_0,\, \alpha_1,\, \ldots \alpha_p \\ \beta_1,\, \ldots \beta_p\end{matrix}\right| z\right) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_0)_n(\alpha_1)_n \ldots (\alpha_p)_n}{(\beta_1)_n \ldots (\beta_p)_n(1)_n} z^n$$

がしばしば現れる. 以下の 2 つの結果を例として挙げる.

命題 1.3 (known, see [2])**.** 自然数 $k > 1$ に対して, -1 の原始 k 乗根を $\omega_k := \exp(\frac{\pi\sqrt{-1}}{k})$ とおく. このとき, 次の等式が成り立つ:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\zeta(\{k\}^n)X^{kn} = {}_kF_{k-1}\left(\left.\begin{matrix}\omega_k X,\, \omega_k^3 X,\, \ldots \omega_k^{2k-1}X \\ 1,\, \ldots,\, 1\end{matrix}\right| 1\right).$$

定理 1.4 (Borwein-Bradley-Broadhurst-Lisoněk [2], MZV ver.)**.** 以下の等式が成り立つ:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\zeta(\{3,1\}^n)X^{4n} = {}_2F_1\left(\left.\begin{matrix}\omega_4\frac{X}{\sqrt{2}},\, \omega_4^5\frac{X}{\sqrt{2}} \\ 1\end{matrix}\right| 1\right)\, {}_2F_1\left(\left.\begin{matrix}\omega_4^3\frac{X}{\sqrt{2}},\, \omega_4^7\frac{X}{\sqrt{2}} \\ 1\end{matrix}\right| 1\right).$$

また, 各項の係数を比較することにより, 以下の等式を得る:

$$\zeta(\{3,1\}^n) = \frac{2\pi^{4n}}{(4n+2)!} \ \in \mathbb{Q}\pi^{4n}.$$

さらに, よく知られた関係式 $\zeta(\{4\}^n) = 4^n\zeta(\{3,1\}^n)$ を用いると, 以下の結果が従う.

系 1.5.

$${}_4F_3\left(\left.\begin{matrix}\omega_4 X,\, \omega_4^3 X,\, \omega_4^5 X,\, \omega_4^7 X \\ 1,\, 1,\, 1\end{matrix}\right| 1\right) = {}_2F_1\left(\left.\begin{matrix}\omega_4 X,\, \omega_4^5 X \\ 1\end{matrix}\right| 1\right)\, {}_2F_1\left(\left.\begin{matrix}\omega_4^3 X,\, \omega_4^7 X \\ 1\end{matrix}\right| 1\right).$$

本稿では, MZV の調和積の代数的な性質に注目し, 系 1.5 の右辺の積の個数を適切に増やし, 一般化した式を与えることを目標とする. また, 主結果からの直接の帰結として, MZV の明示公式をいくつか与える.

2 調和積と Hoffman 代数

本節では, MZV を代数的に扱う枠組みである Hoffman 代数を導入し, いくつかの性質を述べる.

2 つの変数 x, y に対して, $z_k := x^{k-1}y$ $(k \in \mathbb{N})$ とおく. このとき, 有理数係数の 2 変数非可換多項式環 $\mathfrak{H}^1, \mathfrak{H}^0$ を次のように定義する:

$$\mathfrak{H}^1 := \mathbb{Q}\langle z_k | k \in \mathbb{N}\rangle \supset \mathfrak{H}^0 := \mathbb{Q} \oplus x\mathfrak{H}^1.$$

このとき, インデックス $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_r) \in \mathbb{Z}_{>1} \times \mathbb{Z}_{>0}^{r-1}$ に対して, $\mathfrak{H}^0$ の単項式 $z_{k_1}z_{k_2}\ldots z_{k_r}$ と $\zeta(\boldsymbol{k})$ を対応させる規則を $\mathbb{Q}$-線型に拡張した $\mathbb{Q}$-線形写像

$$Z : \mathfrak{H}^0 \to \mathbb{R}$$

を *evaluation map* と呼ぶ. この evaluation map によって, MZV を $\mathfrak{H}^0$ と同一視して扱うことができる. いま, $\mathfrak{H}^1$ 上の積 $*$ (調和積) を単項式 $w, w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^1$ に対する漸化式

$$\begin{aligned} w*1 &= 1*w = w, \\ z_k w_1 * z_l w_2 &= z_k \left(w_1 * z_l w_2\right) + z_l \left(z_k w_1 * w_2\right) \quad (k, l \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

を $\mathbb{Q}$-双線型に拡張して定義する. 特に, evaluation map は調和積を保つことに注意する (see [1]). すなわち,

$$Z(w*w') = Z(w)Z(w') \quad (w, w' \in \mathfrak{H}^0)$$

が成り立つ. また, $\mathfrak{H}^1$ 上の別の積 $\widetilde{ш}$ (インデックスシャッフル) を単項式 $w, w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^1$ に対する漸化式

$$\begin{aligned} 1 \,\widetilde{ш}\, w &= w \,\widetilde{ш}\, 1 = w, \\ z_k w_1 \,\widetilde{ш}\, z_l w_2 &= z_k(w_1 \,\widetilde{ш}\, z_l w_2) + z_l(z_k w_1 \,\widetilde{ш}\, w_2) \end{aligned}$$

を $\mathbb{Q}$-双線型に拡張して定義する.

例 2.1. 自然数 $p, q, r > 0$ に対して, 次の等式が成り立つ:

$$\begin{aligned} z_p * z_q z_r &= z_p z_q z_r + z_q z_p z_r + z_q z_r z_p + z_{p+q} z_r + z_q z_{p+r}, \\ z_p \,\widetilde{ш}\, z_q z_r &= z_p z_q z_r + z_q z_p z_r + z_q z_r z_p. \end{aligned}$$

さらに, $u_1, u_2, \ldots, u_m$ を m 個の変数とする. このとき, $\mathfrak{H}^1$ 上の m 変数形式的べき級数環 $\mathfrak{A} := \mathfrak{H}^1[[u_1, \ldots, u_m]]$ の元 w に対して,

$$\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n \tag{2.1}$$

とおく. このとき, 以下の補題が従う.

補題 2.2. 任意の自然数 $k, l > 0$ と $1 \leq i, j \leq m$ に対して, 以下の等式が $\mathfrak{A}$ 上で成り立つ:

$$\frac{1}{1-u_i z_k} * \frac{1}{1-u_j z_l} = \frac{1}{1-u_i z_k - u_j z_l - u_i u_j z_{k+l}}.$$

3　調和積とインデックスシャッフルの関係式とその母関数

自然数 $k>0$ に対して, $\mathfrak{A}$ の元

$$\mathop{\ast}_{j=1}^{m}\frac{1}{1-u_jz_k}:=\frac{1}{1-u_1z_k}\ast\frac{1}{1-u_2z_k}\ast\cdots\ast\frac{1}{1-u_mz_k}$$

を補題 2.2 と式 (2.1) によって, 二通りに展開することにより以下の定理を得る.

定理 3.1 (Kadono, 2024+)**.** 任意の自然数 $k,m,n>0$ に対して, 以下の等式が $\mathfrak{A}$ 上で成り立つ:

$$\sum_{\substack{a_1,\dots,a_m\in\mathbb{N}_0\\ a_1+\cdots+a_m=n}}\mathop{\ast}_{j=1}^{m}u_j^{a_j}z_k^{a_j}=\sum_{\substack{b_1,\dots,b_m\in\mathbb{N}_0\\ b_1+2b_2+\cdots+mb_m=n}}\widetilde{\text{Ш}}_{j=1}^{m}\sigma_j(u_1,\dots,u_m)^{b_j}z_{jk}^{b_j}.$$

ただし, $\sigma_j(u_1,\dots,u_m)$ $(j=1,2,\dots,m)$ は j 次の m 変数基本対称式である:

$$\sigma_j(u_1,\dots,u_m):=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_j\le m}u_{i_1}\cdots u_{i_j}.$$

ここで, 各 $j=1,2,\dots,m$ に対して $u_j=\omega_m^{2j-1}$ とすると, 定理 3.1 から以下の等式を得る:

$$z_{km}^n=(-1)^{mn}\sum_{\substack{a_1,\dots,a_m\in\mathbb{N}_0\\ a_1+\cdots+a_m=mn}}\mathop{\ast}_{j=1}^{m}\omega_m^{(2j-1)a_j}z_k^{a_j}.$$

さらに $k>1$ であれば, 両辺に evaluation map Z を作用させることにより, MZV に関する関係式

$$\zeta(\{km\}^n)=(-1)^{mn}\sum_{\substack{a_1,\dots,a_m\in\mathbb{N}_0\\ a_1+\cdots+a_m=mn}}\prod_{j=1}^{m}\omega_m^{(2j-1)a_j}\zeta(\{k\}^{a_j})\tag{3.1}$$

を得る. 一般に, 右辺の母関数は無限積を用いて表すことができる. 特に $k=2$ とき, 以下の等式が成り立つ.

系 3.2. 任意の自然数 $m>0$ に対して, 以下の等式が成り立つ:

$$\begin{aligned}{}_{2m}F_{2m-1}\left(\left.\begin{matrix}\omega_{2m}X,\ \omega_{2m}^3X,\ \dots,\ \omega_{2m}^{4m-1}X\\ 1,\ \dots,\ 1\end{matrix}\right|1\right)&=\prod_{j=0}^{m-1}{}_2F_1\left(\left.\begin{matrix}\omega_{2m}^{2j+1}X,\ -\omega_{2m}^{2j+1}X\\ 1\end{matrix}\right|1\right)\\&=\prod_{j=0}^{m-1}\frac{\sin\left(\pi\omega_{2m}^{2j+1}X\right)}{\pi\omega_{2m}^{2j+1}X}.\end{aligned}$$

系 3.2 の証明は, 最右辺の sin 関数の無限積表示を用いて級数に展開し, X の各係数を式 (3.1) の右辺へ帰着させることによる. また, sin 関数の積和公式を用いると, 同じ偶数の繰り返しインデックスに対する MZV の明示公式を得る. 例えば, 任意の自然数 $n\ge 0$ に対して,

$$\zeta(\{6\}^n)=3\frac{2^{6n+1}}{(6n+3)!}\pi^{6n},\tag{3.2}$$

$$\zeta(\{8\}^n)=\frac{\pi^{8n}}{(8n+4)!}\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{4n+2}{2k}2^{4(2n+1)-k}$$

が成り立つ. 特に, 式 (3.2) と式 (1.1) を比較すると, Bernoulli 数に関する以下の等式を得る:

$$2n = \sum_{p=1}^{n} \binom{6n+3}{6p} B_{6p}.$$

謝辞

第 16 回福岡数論研究集会での講演機会をくださいました, 世話人の金子昌信先生 (九州大学), 権寧魯先生 (九州大学), 岸康弘先生 (愛知教育大学), 松坂俊輝先生 (九州大学) に心より感謝申し上げます.

参考文献

[1] T. Arakawa and M. Kaneko, 多重ゼータ値入門, COE Lecture note series, 23, 九州大学大学院数理学研究院, 2010.

[2] J. M. Borwein and D. M. Bradley and D. J. Broadhurst and P. Lisoněk, Special values of multiple polylogarithms, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), no. 3, 907–941.

[3] K. Ihara and M. Kaneko and D. Zagier, Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values, Compos. Math. **142** (2006), no. 2, 307–338.

[4] Z. Li, Sum of multiple zeta values of fixed weight, depth and i-height, Math. Z. **258** (2008), no. 1, 133–142.

[5] S. Muneta, A note on evaluations of multiple zeta values, Proc. Amer. Math. Soc. **137** (2009), no. 3, 931–935.

[6] T. Nakamura, Bernoulli numbers and multiple zeta values, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **81** (2005), no. 2, 21–22.

[7] D. Zagier, Values of zeta functions and their applications, In: First European Congress of Mathematics, Vol. II (Paris, 1992), 497–512. Progr. Math., 120, Birkhäuser Verlag, Basel, 1994.