Bettin–Conrey のコタンジェント和に対する相互法則について*

赤塚 広隆 (小樽商科大学)

概 要

Dedekind 和の類似として, Bettin と Conrey は三角関数の有限和を新たに導入した. Dedekind 和の性質として x と $1/x$ の間の簡明な関係式である相互法則があるが, Bettin–Conrey の和はこの意味では相互法則を満たさない. しかし, 正則関数を法として x と $1/x$ の間に関係式があるという意味で, 相互法則に類する性質があることを Bettin と Conrey は見出した. また, 彼らはこの相互法則で暗に現れる正則関数について, $x = 1$ での n 番目のテイラー係数は n を無限大に飛ばしたときにある漸近公式を持つことを証明した. 本稿では, この漸近公式が漸近級数展開に精密化できたことを報告する. 本研究は, 村上友哉氏 (九州大学) との共同研究である.

1 はじめに

本稿は第 15 回福岡数論研究集会における同タイトルの講演の報告書である. Bettin と Conrey [1] が導入した三角関数和は正則関数を法として相互法則に類する性質を持つ. 暗に現れる正則関数の Taylor 係数の漸近的な性質は Bettin–Conrey により調べられていたが, 精密化に成功したのでそれを報告するのが本稿の趣旨である.

本稿の構成は以下の通りである. まず, §2 で古典的な Dedekind 和とその相互法則を復習する. §3 では Bettin–Conrey が導入した三角関数和の定義を与え, この和の相互法則に関する性質を説明する. Eisenstein 級数との関連もここで説明する. §4 では, 主定理と関連する Bettin–Conrey による先行研究を説明する. §5 では, 村上友哉氏 (九州大学) との共同研究で得られた結果を述べる.

論文を準備している途中であるため, 証明についてはキーワードを書くだけで, ほぼ言及できなかったことをお詫び申し上げたい. また, Bettin–Conrey の論文 [1] をより一般的な状況に拡張した続編 [2] がある. しかし, 今のところ, [2] の精密化はできていないため, 我々の結果の背景等は [1] を中心に説明することにした.

2 Dedekind 和とその相互法則

互いに素な正整数 h, k に対して, Dedekind 和 $s(h,k)$ を

$$s(h,k) = \frac{1}{4k}\sum_{a=1}^{k-1} \cot\left(\frac{\pi a}{k}\right)\cot\left(\frac{\pi h a}{k}\right)$$

*本研究は JSPS 科研費 JP19K03392 の助成を受けたものです.

で定義する． $\cot(\pi z) = i(e^{2\pi iz}+1)/(e^{2\pi iz}-1)$ より，自明には $s(h,k) \in \mathbb{Q}(\zeta_k)$ (ただし $\zeta_k = e^{2\pi i/k}$) である．さらに, Galois 群 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_k)/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^\times$ の作用で $s(h,k)$ は不変であることを容易に確認でき, $s(h,k) \in \mathbb{Q}$ となる．

$s(h,k) \in \mathbb{Q}$ となることを見る別の方法として, $s(h,k)$ の次の関係式を用いるものがある:

Dedekind 和の相互法則. $(h,k) \in (\mathbb{Z}_{>0})^2$, $\gcd(h,k)=1$ に対し,

$$s(h,k)+s(k,h) = -\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\left(\frac{h}{k}+\frac{k}{h}+\frac{1}{hk}\right). \tag{1}$$

また, $\cot(\pi(z+1)) = \cot(\pi z)$ より, 容易に

$$h \equiv h' \pmod{k} \implies s(h,k) = s(h',k) \tag{2}$$

が分かる．相互法則 (1) と周期性 (2) を繰り返し用いることで, Euclid の互除法と本質的に同じ計算により $s(h,k) \in \mathbb{Q}$ が分かり, さらに $s(h,k)$ を効率的に計算するアルゴリズムを与えることができる．Dedekind 和の相互法則の証明は複数知られている．例えば [5, Chapter 2] をご覧いただきたい．

以降の話のため, $s(h,k)$ を $\mathbb{Q}_{>0}$ 上の関数と見ることにする．つまり,

$$s\left(\frac{h}{k}\right) = s(h,k)$$

と書くことにする．このとき, 関係式 (1) と (2) はそれぞれ,

$$s(x)+s\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{12\mathrm{Num}(x)\mathrm{Den}(x)} = -\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\left(x+\frac{1}{x}\right),$$
$$s(x+1) = s(x)$$

と表すことができる．ここで, $x \in \mathbb{Q}_{>0}$ に対し, $\mathrm{Num}(x) \in \mathbb{Z}_{>0}$ は x の分子, $\mathrm{Den}(x) \in \mathbb{Z}_{>0}$ は x の分母である．

3　Bettin–Conrey のコタンジェント和とその相互法則

論文 [1] において, Bettin と Conrey は Dedekind 和の類似として, 以下の三角関数和を導入した:

$$c\left(\frac{h}{k}\right) = c(h,k) = -\sum_{a=1}^{k-1}\frac{a}{k}\cot\left(\frac{\pi ha}{k}\right).$$

$c(h/k) \in \mathbb{Q}(i,\zeta_k)$ だから, k が偶数のときは $c(h/k) \in \mathbb{Q}(\zeta_k)$, k が奇数のときは $c(h/k) \in \mathbb{Q}(\zeta_{2k})$ である．つまり, $c(h/k)$ は円分体の元である．しかし, Dedekind 和と異なり, $c(h,k) \in \mathbb{Q}$ であるとは限らない．例えば, $c(1/3) = 1/(3\sqrt{3}) \notin \mathbb{Q}$ である．Galois 群の作用で考えると, a/k のところには自明に作用することになる．その結果, $c(h/k)$ 全体への作用が制御できなくなるのが, $s(h/k)$ への作用と異なるところである．

次に, $c(x)$ には相互法則があるかどうかを考えてみる．まず, Dedekind 和の周期性 (2) に対応する性質

$$c(x+1) = c(x)$$

は同様に成り立つ．仮に, $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\lambda \in \mathbb{Q}$ が存在して, 任意の $x \in \mathbb{Q}_{>0}$ に対し

$$c\left(\frac{1}{x}\right) + \lambda x^{\alpha} c(x) \in \mathbb{Q} \tag{3}$$

が成り立つとすると, Euclid の互除法の計算を用いることで, 任意の $x \in \mathbb{Q}_{>0}$ に対し $c(x) \in \mathbb{Q}$ が成り立ち, 矛盾が生じる．よって, $c(x)$ には式 (3) の型の相互法則はないことが分かる．

Bettin–Conrey は $c(x)$ の別の意味での相互法則を見出した．彼らの主たる結果の一つは以下の通りである:

Bettin–Conrey の相互法則． $\mathbb{Q}_{>0}$ 上の関数 g を

$$g(x) = c\left(\frac{1}{x}\right) + xc(x) - \frac{1}{\pi \mathrm{Den}(x)} \tag{4}$$

で定める．この $g(x)$ は $x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ 上の正則関数に延長することができる．

$c(x)$ 単体は良い解析的性質を持たないが, $c(x)$ と $c(1/x)$ を適当に組み合わせた $g(x)$ は非常に良い解析的性質を持つ, という結果である．$\mathrm{Den}(x)$ の項を無視すれば $c(x)$ と $c(1/x)$ が正則関数を法として関係があると言うこともでき, 彼らはこれをある種の相互法則と考えた．

Dedekind 和の相互法則や Bettin–Conrey の相互法則と関連するものとして, Zagier [6] により提唱されている量子保型形式がある．これを簡単に復習しておく．$X = \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ とする．X には $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ が一次分数変換として作用している．$k \in \mathbb{Z}$ を一つ取り固定する．写像 $f : X \to \mathbb{C}$ と $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に対し, $f|_k\gamma : X \setminus \{\infty, -d/c\} \to \mathbb{C}$ を

$$(f|_k\gamma)(x) = j(\gamma; x)^{-k} f(\gamma x)$$

で定める．ただし, $j(\gamma; x) = cx + d$ である．通常の正則保型形式の定義を写像 $f : X \to \mathbb{C}$ に安易に流用しようとすると, $f|_k\gamma = f$ がすべての $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に対し成り立つ, ということである．ところが, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \curvearrowright X$ が推移的であるため, この変換則を満たす f は自明なものしか存在しない．このことを踏まえ, Zagier は以下のように量子保型形式を定義した:

定義 (量子保型形式)**．** S を X の有限部分集合とし, $f : X \setminus S \to \mathbb{C}$ を写像とする．任意の $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に対し, $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ の有限部分集合 S_γ が存在して, $x \in X \setminus S_\gamma$ 上の関数

$$h_\gamma(x) = f(x) - (f|_k\gamma)(x)$$

が $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \setminus S_\gamma$ に実解析的に延長できるとき, f を量子保型形式という．

$s(x)$ や $c(x)$ は上の量子保型形式の定義そのものを満たす訳ではない．しかし, $s(x)$ や $c(x)$ は $x \mapsto x+1$ の変換で不変であり, $x \mapsto 1/x$ (または $x \mapsto -1/x$) の変換で前述のような関係 (相互法則) を満たす．量子保型形式の原型という意味で, Zagier は $s(x)$ や $c(x)$ を [6, Example 0] で例示している．量子保型形式については, [3, Chapter 21] もご覧いただきたい．

Bettin–Conrey [1] により, $c(x)$ の相互法則を表す関数 (4) は正則 Eisenstein 級数と関連があることが示された．これを説明する．$\mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$ とおく．$k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ を一つ取り固定する．重さ k の正則 Eisenstein 級数 $\mathbb{G}_k(\tau)$ を

$$\mathbb{G}_k(\tau) = \frac{\zeta(1-k)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) e(n\tau) \tag{5}$$

で定める．ここで, $\zeta(s)$ は Riemann ゼータ関数, $\sigma_{k-1}(n)=\sum_{0<d|n}d^{k-1}$ は約数関数, $e(z)=e^{2\pi iz}$ である．上の級数は $\tau\in\mathbb{H}$ で広義一様収束し, $\mathbb{G}_k(\tau)$ は $\tau\in\mathbb{H}$ 上の正則関数を与える．k が 4 以上の偶数のときは, 通常の意味での正則 Eisenstein 級数であり, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に対する重さ k の保型形式となる．さて, 式 (5) で $k=1$ とすると, $\zeta(0)=-1/2$ より,

$$\mathbb{G}_1(\tau)=-\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}d(n)e(n\tau) \tag{6}$$

である．ここで, $d(n)=\#\{d\in\mathbb{Z}_{\geq 1}:d\mid n\}$ である．$\mathbb{G}_1(\tau)$ は通常の意味での保型変換則を満たさない．しかし, 定義から $\mathbb{G}_1(\tau+1)=\mathbb{G}_1(\tau)$ が成り立つ．さらに,

$$R(\tau)=\mathbb{G}_1\left(-\frac{1}{\tau}\right)-\tau\mathbb{G}_1(\tau)$$

で $R(\tau)$ を定めると, 自明には $R(\tau)$ は $\mathbb{H}$ 上の正則関数であるが, $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{\leq 0}$ の正則関数として解析接続できる．つまり, $\mathbb{G}_1(\tau)$ は保型的な性質を幾ばくかは有する関数である, と見ることができる．さらに, Bettin–Conrey [1, Theorem 1] により, 式 (4) で定義される関数 $g(x)$ との間には,

$$g(x)=2iR(x)$$

という関係があることが示された．

4　相互法則を表す関数 $g(x)$ の性質, 先行研究

式 (4) で定まる相互法則を表す関数 $g(x)$ について, 更なる性質を述べる．前節で述べたとおり, $x\in\mathbb{H}$ では $g(x)$ は正則 Eisenstein 級数 $\mathbb{G}_1(\tau)$ で記述できる．$\mathbb{G}_1(\tau)$ は級数表示 (6) で正則であることが分かるため, $x\in\mathbb{H}$ での $g(x)$ の解析的性質は調べやすい．一方で, $x\in\mathbb{Q}_{>0}$ では $g(x)$ は $c(x)$ と $c(1/x)$ で記述できるが, $c(x)$ 単体では関数として良い性質を期待できない．そのため, $g(x)$ の $x\in\mathbb{R}_{>0}$ での解析的性質を調べるのは $x\in\mathbb{H}$ の場合と比較して難しい．このように $g(x)$ の実軸上の挙動は自明ではないが, Bettin–Conrey は, $x\downarrow 0$ のときの以下の漸近展開を証明した ([1] の p.5719 の二つ目の displayed formula; $\psi(x)$ と $g(x)$ の関係は p.5711 の Theorem 1 にある):

定理 1 (Bettin–Conrey)**.** $N\in\mathbb{Z}_{\geq 2}$ を任意に取り固定する．$x\downarrow 0$ のとき, 以下が成り立つ:

$$g(x)=\frac{\log(1/(2\pi x))+\gamma}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{N}b_nx^n+o(x^N).$$

ここで, γ は Euler 定数であり,

$$b_n=\frac{B_n\zeta(n)}{n} \tag{7}$$

である．B_n は

$$\frac{u}{e^u-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}u^n$$

で定まる Bernoulli 数である．

さて, $g(x)$ は, Lewis–Zagier [4] による period function を特徴づける関係式と本質的に同じ関係式, 即ち, 次の三項間関係式を満たす:

$$g(x)=\frac{x}{x+1}g(x+1)+g\left(\frac{x}{x+1}\right). \tag{8}$$

period function の定義では増大度の条件も要請していて, $g(x)$ は period function ではないことを注意しておく.

前述の通り, $g(x)$ は $x\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{\le 0}$ へ正則に解析接続される. 特に $g(x)$ は $x=1$ で正則なので,

$$g(x)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n g_n(x-1)^n$$

の形の Taylor 展開を持つ. 三項間関係式 (8) において, $x=0$ のとき x, $x+1$, $x/(x+1)$ はそれぞれ 0, 1, 0 である. ゆえに, 三項間関係式 (8) と定理 1 を組み合わせることで, $g(x)$ の $x=1$ 周りでの漸近展開を与えることができる. 漸近係数と Taylor 係数 g_n は一致するので, g_n を明示的に表すことができる. 結論を書くと, $g_0=-1$, $g_1=1/2$ であり, $n\in\mathbb{Z}_{\ge 2}$ に対し,

$$g_n=\frac{1}{n(n+1)}+2b_n+2\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-1}{j}b_{j+2} \tag{9}$$

が成り立つ ([1, p.5711]).

Bettin–Conrey は $n\to\infty$ のときの g_n の漸近挙動を調べ, 以下の結果を得た ([1, Theorem 2]):

定理 2 (Bettin–Conrey)**.** $n\to\infty$ のとき, 以下が成り立つ:

$$g_n-\frac{1}{n}=2^{9/4}\pi^{3/4}n^{-3/4}e^{-2\sqrt{\pi n}}\left(\sin\left(2\sqrt{\pi n}+\frac{3\pi}{8}\right)+o(1)\right). \tag{10}$$

注意. [1] では, $2^{9/4}$ は $2^{5/4}$ となっているが, 計算に誤りがある. 具体的には, [1, p.5723] の中段にある $I_n(x)$ を積分で表す式の右辺を 2 倍する必要がある. 結論も 2 倍する必要があり, 修正すると $2^{9/4}$ となる.

式 (10) の誤差項 $o(1)$ についてもコメントしたい. [1] では漸近挙動を表す記号 $\sim$ (左辺と右辺の比が 1 に近づく) を用いて記述されている. しかし, 彼らの議論を見る限り, (10) を証明しているように思われる. 何が言いたいのかというと, (10) の右辺において, sin の項は 0 を集積点に持つ可能性がある. sin の項が主要項であるかを調べるには Diophantus 近似を用いた込み入った議論が必要と思われる. しかし, 彼らの論文ではそのような議論は見当たらない. 以上のことから, 上では $\sin(\cdots)+o(1)$ として彼らの結果を述べた.

式 (9) の観点から, 定理 2 を見てみる. そのため, (7) で定まる b_n の増大度を調べてみる. まず, n が 3 以上の奇数のときは $B_n=0$ より $b_n=0$ である. n が正の偶数のときを考える. $n=2l$ と書くと, Riemann ゼータ関数の特殊値の公式

$$\zeta(2l)=(-1)^{l-1}\frac{(2\pi)^{2l}}{2(2l)!}B_{2l}$$

より,

$$b_{2l}=\frac{B_{2l}\zeta(2l)}{2l}=(-1)^{l-1}\frac{(2l)!}{l(2\pi)^{2l}}\zeta(2l)^2$$

である．$l\to\infty$ のとき, Stirling の公式 $(2l)!\sim\sqrt{2\pi}(2l)^{2l+\frac{1}{2}}e^{-2l}$ と Dirichlet 級数表示から従う漸近式 $\zeta(2l)\sim 1$ より,

$$b_{2l}\sim(-1)^{l-1}2\sqrt{\frac{\pi}{l}}\left(\frac{l}{\pi e}\right)^{2l}$$

が成り立つ．つまり, $l\to\infty$ のとき $|b_{2l}|$ は階乗のオーダーで爆発的に増大する．一方で, 式 (10) の右辺は $l\to\infty$ のとき準指数関数的に減少する．以上より, 式 (9) の右辺の和の中で非常に大きなキャンセルが起こり, 全体としてはとても小さな数になる, ということである．

[1, p.5724] によれば, Zagier は定理 2 を以下の形の漸近展開に精密化できると予想した:

予想 1. 実数列 $\{C_k\}$ と $\{D_k\}$ が存在して, 各 $K\in\mathbb{Z}_{\geq 3}$ に対し, $n\to\infty$ のとき

$$g_n-\frac{1}{n}=e^{-2\sqrt{\pi n}}\left(\sum_{\substack{3\leq k\leq K\\ k\equiv 1 \bmod 2}}C_k n^{-k/4}\sin(2\sqrt{\pi n}+D_k)+o(n^{-K/4})\right) \tag{11}$$

が成り立つだろう．

5 主結果

本稿の主結果は, 数列 $\{C_k\}$ と $\{D_k\}$ を明示的に与えた上で予想 1 を証明した, ということである．結果を述べるために準備をする．$\lambda(u)$ を

$$\lambda(u)=\frac{1}{e^u-1}-\frac{1}{u}+\frac{1}{2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{k+1}}{(k+1)!}u^k \tag{12}$$

で定める．$z\in\mathbb{C}$ を固定したとき, $e^{-z\lambda(u)}$ は $u=0$ で正則であることに注意し, $P_k(z)$ を

$$e^{-z\lambda(u)}=\sum_{k=0}^{\infty}P_k(z)u^k$$

により定める．指数関数の Taylor 展開を用いて左辺を展開し, (12) を挿入することで, $P_0(z)=1$ および $k\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ のとき

$$P_k(z)=\sum_{l=1}^{k}(-1)^l\frac{z^l}{l!}\left(\sum_{\substack{k_1,\dots,k_l\geq 1\\ k_1+\cdots+k_l=k}}\frac{B_{k_1+1}\cdots B_{k_l+1}}{(k_1+1)!\cdots(k_l+1)!}\right)$$

が成り立つ．よって, $P_k(z)\in\mathbb{Q}[z]$ であり, $\deg P_k(z)=k$ である．さらに, n が 3 以上の奇数のとき $B_n=0$ だから,

$$P_k(z)\in\begin{cases}\langle z^2,z^4,\dots,z^k\rangle_{\mathbb{Q}} & k\text{ が 2 以上の偶数のとき}\\ \langle z,z^3,\dots,z^k\rangle_{\mathbb{Q}} & k\text{ が奇数のとき}\end{cases} \tag{13}$$

である．$P_k=P_k(2\pi i)$ とおき, $\widetilde{C}_l$ を

$$\widetilde{C}_l=\sum_{\substack{j,k\geq 0\\ j+k=l}}(k+1,j)(2\pi i)^k P_k 2^{-2j} \tag{14}$$

で定める．ここで, (ν,j) は Hankel 記号, 即ち,

$$(\nu,j)=\begin{cases}1 & j=0\text{ のとき}\\ \frac{1}{2^{2j}j!}\prod_{a=1}^{j}(4\nu^2-(2a-1)^2) & j\geq 1\text{ のとき}\end{cases}$$

である．(13) より $z^kP_k(z)\in\mathbb{Q}[z^2]$ であり, $\widetilde{C}_l\in\mathbb{Q}[\pi^2](\subset\mathbb{R})$ となる．より詳しくは $\widetilde{C}_0=1$ で, $l\geq 1$ のときは,

$$\widetilde{C}_l\in\langle 1,\pi^2,\ldots,\pi^{2l}\rangle_{\mathbb{Q}} \tag{15}$$

となる．(14) の $(j,k)=(l,0)$ の項のみから (15) の定数項が現れ, 定数項は $(1,l)2^{-2l}\neq 0$ である．π が超越数であることと合わせると, $\widetilde{C}_l\neq 0$ が分かる．

以上の準備の下, 我々は次の結果を得た:

主定理. 数列 $\{\widetilde{C}_l\}$ を上のように定める．各 $L\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し, $n\to\infty$ のとき,

$$g_n-\frac{1}{n}=2^{9/4}\pi^{3/4}e^{-2\sqrt{\pi n}}\left(\sum_{l=0}^{L}(2\pi)^{-l/2}\widetilde{C}_l n^{-\frac{l}{2}-\frac{3}{4}}\sin\left(2\sqrt{\pi n}+\frac{\pi l}{4}+\frac{3\pi}{8}\right)+o(n^{-\frac{L}{2}-\frac{3}{4}})\right)$$

が成り立つ．特に, 予想 (11) は,

$$C_k=2^{9/4}\pi^{3/4}(2\pi)^{-(k-3)/4}\widetilde{C}_{(k-3)/2},\quad D_k=\frac{\pi k}{8}$$

として成立する．

上の結果を数値的に見るため,

$$A_n=2^{-9/4}\pi^{-3/4}n^{3/4}e^{2\sqrt{\pi n}}\left(g_n-\frac{1}{n}\right),$$
$$B_n^{(L)}=\sum_{l=0}^{L}(2\pi)^{-l/2}\widetilde{C}_l n^{-l/2}\sin\left(2\sqrt{\pi n}+\frac{\pi l}{4}+\frac{3\pi}{8}\right)$$

とおく．L を任意に定め固定するとき, n が十分に大きければ $B_n^{(L)}$ は A_n をよく近似する, というのが定理の主張である．そこで, (14) を用いて $\widetilde{C}_0$, $\widetilde{C}_1$, $\widetilde{C}_2$ を求めると,

$$\widetilde{C}_0=1,\quad \widetilde{C}_1=\frac{\pi^2}{3}+\frac{3}{16},\quad \widetilde{C}_2=\frac{\pi^4}{18}+\frac{5\pi^2}{16}-\frac{15}{512}$$

となることにも注意し, $n=1000$ の場合に A_{1000} および $L=0,1,2$ のとき $B_{1000}^{(L)}$ を数値計算すると, 以下の通りとなる:

A_{1000}	$B_{1000}^{(0)}$	$B_{1000}^{(1)}$	$B_{1000}^{(2)}$
$0.2170422\cdots$	$0.1796061\cdots$	$0.2156933\cdots$	$0.2170189\cdots$

$B_{1000}^{(0)}$ よりも $B_{1000}^{(2)}$ の方が A_{1000} をよく近似していることが数値的にも見てとれる．なお, A_{1000} を求めるには g_{1000} を計算する必要があるが, それは式 (9) を用いて計算した．前節で述べたとおり, (9) の和の間には非常に大きなキャンセルがおきている．実際, $n=1000$ のときの summand の絶対値の大きさを数値的に調べると,

$$\max_{0\leq j\leq 1000-2}\left|\binom{1000-1}{j}b_{j+2}\right|=\left|\binom{1000-1}{994}b_{994+2}\right|=6.87\cdots\times 10^{1770}$$

である．準指数関数 $e^{-2\sqrt{\pi n}}$ ($n = 1000$ のとき $1.41\cdots\times 10^{-69}$) の寄与の検出も考えると, 2000 桁程度を確保して計算しないと桁落ちで正確な結果が得られない．安全のため, 上では 2200 桁を確保して計算を行った．

証明の詳細は村上氏と準備している論文をお待ちいただきたい．Bettin–Conrey による定理 2 の証明の方針は, $g_n - \frac{1}{n}$ を K-Bessel 関数 $K_1(z)$ を含む積分で表し, $|z|$ が大きいときの $K_1(z)$ の漸近挙動および漸近解析における Laplace の方法を用いるというものであった ([1, p.5723] を参照いただきたい)．我々の方針は $K_1(z)$ を含む積分をさらに合流超幾何関数 $U(\alpha,\beta;z)$ で表し, 合流超幾何関数の古典的な問題である large parameter problem (今回の場合は β, z を固定し $\alpha\to\infty$ のときの $U(\alpha,\beta;z)$ の漸近挙動の問題) に帰着させる, というものである．

謝辞

今回, 貴重な講演の機会をくださった世話人の先生方に深く感謝申し上げます．

参考文献

[1] S. Bettin and B. Conrey, A reciprocity formula for a cotangent sum, Int. Math. Res. Not. IMRN (2013), no. 24, 5709–5726.

[2] S. Bettin and B. Conrey, Period functions and cotangent sums, Algebra Number Theory **7** (2013), no. 1, 215–242.

[3] K. Bringmann, A. Folsom, K. Ono and L. Rolen, Harmonic Maass forms and mock modular forms: theory and applications, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 64, American Mathematical Society, Providence, RI, 2017, xv+391 pp.

[4] J. Lewis and D. Zagier, Period functions for Maass wave forms. I, Ann. of Math. (2) **153** (2001), no. 1, 191–258.

[5] H. Rademacher and E. Grosswald, Dedekind sums, The Carus Mathematical Monographs, No. 16, Mathematical Association of America, Washington, DC, 1972, xvi+102 pp.

[6] D. Zagier, Quantum modular forms, In: Quanta of maths, 659–675, Clay Math. Proc., 11, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.