イデアル類群及び岩澤加群の大きさ・複雑さについて

栗原 将人 (慶應義塾大学)

この原稿で扱うのは, 代数体の “古典的な” イデアル類群や岩澤加群である．すなわち, 扱いやすく修正した Selmer 群のようなものではなく, イデアル類群は 0 でない分数イデアル全体を 0 でない主イデアル全体で割ったもの (どこかの素点を捨てたりはしない full class group), 岩澤加群は, 代数体の円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大上の S の外不分岐な最大の abel pro-p 拡大の Galois 群, といった昔から岩澤理論の対象であった加群を考える．

1 Galois 加群としてのイデアル類群

代数体のイデアル類群の大きさをゼータ関数の値と結びつけて理解することを目標とする．この方向の最も一般的な定理は, 代数体の類数公式であるが, Galois 群の作用もこめたイデアル類群の様子を知りたいと考えると, 類数公式だけでは解決しない．もう少し具体的に書くと, K/k を代数体の Galois 拡大とするとき, K のイデアル類群 C_K を $\mathrm{Gal}(K/k)$ の作用をこめて理解したいのである．

一般の Galois 拡大 K/k に対しても理論を構成することができるが (たとえば Stark 元, Rubin-Stark 元と呼ばれるような元の系列を用いて理論ができる [2] Conjecture 7.3, 解説論文 [13] 参照), ここでは最も簡潔に記述ができる CM 拡大と呼ばれる拡大のマイナス成分を考える．K/k が **CM 拡大**であるとは, k が総実代数体で K が CM 体 (総実代数体の総虚な 2 次拡大) のときである (K/k が 2 次拡大であると仮定しているわけではないので注意する)．以下ではさらに K/k は abel 拡大であるとする．最も古典的な例は, Remark 2.2 (3) で考える円分拡大 $\mathbb{Q}(\mu_p)/\mathbb{Q}$ である．

C_K は有限 abel 群であり, 各素数成分に $C_K = \bigoplus_{p:\text{素数}} C_K \otimes \mathbb{Z}_p$ のように分解される．そこで, すべての素数 p に対して, C_K の p 成分 $C_K \otimes \mathbb{Z}_p$ がわかればよい．以下では, 素数 p を固定して, C_K の p 成分を A_K と書くことにする．これから考えるのは, $A_K = C_K \otimes \mathbb{Z}_p$ である．以下では, $p > 2$ とする．ただし, 定理 5.1 と第 6 節では, p は任意の素数で, $p = 2$ でもよい．

2 CM 拡大で拡大次数が p と素なとき

K/k を有限次 abel 拡大であり, 上のように CM 拡大であるとする．$\mathrm{Gal}(K/k)$ をこの節では Δ と書くことにし ($\Delta = \mathrm{Gal}(K/k)$),

$$p \nmid \#\Delta = [K : k]$$

と仮定する．($[K : k]$ は偶数だから, この仮定から p は奇素数である.)

p 進体の代数閉包 $\overline{\mathbb{Q}}_p$ に値を持つ Δ の指標 $\chi : \Delta \to \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ 全体を $\hat{\Delta}$ と書き, $\chi \in \hat{\Delta}$ に対して, $O_\chi = \mathbb{Z}_p[\mathrm{Image}\,\chi]$ とおき $\sigma \in \Delta$ が $\chi(\sigma)$ 倍で作用する $\mathbb{Z}_p[\Delta]$ 加群とみなす．さらに, $\hat{\Delta}$ に同値

関係 $\chi_1 \sim \chi_2$ を $\exists\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ s.t. $\sigma\chi_1 = \chi_2$ と定義すると,

$$\mathbb{Z}_p[\Delta] = \bigoplus_{\chi \in \hat{\Delta}/\sim} O_\chi \tag{1}$$

が成り立つ. したがって, 任意の $\mathbb{Z}_p[\Delta]$ 加群 M に対して,

$$M^\chi = M \otimes_{\mathbb{Z}_p[\Delta]} O_\chi$$

と定義すると,

$$M \simeq \bigoplus_{\chi \in \hat{\Delta}/\sim} M^\chi \tag{2}$$

となる. よって, Galois 加群 M を知るためには, すべての $\chi \in \hat{\Delta}$ に対して, M^χ がわかればよい. 特に Galois 群の作用もこめたイデアル類群 A_K を知るためには, A_K^χ がわかればよい.

1 の原始 p 乗根が K に属するとき, 1 の p 乗根全体 μ_p への Galois 群の作用と Teichmüller lift から決まる写像を $\omega : \Delta \to \mathrm{Aut}(\mu_p) = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{Z}_p^\times \to \mathbb{C}_p^\times$ と書き, Teichmüller 指標と呼ぶ.

Δ には複素共役 ρ が属しているが, $\chi(\rho) = 1$ のとき χ は**偶指標**, $\chi(\rho) = -1$ のとき χ は**奇指標**であると言う. $L(s, \chi)$ を χ の L 関数とする. 奇指標 χ に対しては, $L(0, \chi) \neq 0$ であり, $L(0, \chi) \in \mathbb{Q}(\mathrm{Image}\,\chi)^\times$ である. また, $\chi \neq \omega$ であれば $L(0, \chi) \in O_\chi$ である (つまり分母に p の冪は現れない). A_K の "大きさ" に関して, 次の定理が成立する.

定理 2.1 (Dasgupta–Kakde [4] (2023))**.** χ を奇指標で, $\chi \neq \omega$ とするとき,

$$\#A_K^\chi = \#(O_\chi/(L(0, \chi^{-1}))) \tag{3}$$

となる. また,

$$\#A_K^\omega = \#(O_\omega/(\#\mu_{p^\infty}(K)L(0, \omega^{-1}))) \tag{4}$$

が成り立つ. ここに, $\mu_{p^\infty}(K)$ は K に属する 1 の p 冪根全体がなす群である.

Remark 2.2. (1) Dasgupta と Kakde が [4] で研究した対象は, 射類群 A_K^T であるが, T をうまく取ることにより, 定理 2.1 の式 (3), (4) は得られるので ([2] §1 参照), 上には Dasgupta Kakde の名前を入れておいた. この定理を岩澤理論を用いて証明しようとすると, p 進 L 関数が $s = 0$ に自明零点を持つときが大変難しく, いくつかの条件の下には証明されていたが (たとえば $k = \mathbb{Q}$ のときには証明されていた; また成立する条件についてはたとえば [2] Theorem 1.16 などを参照), 完全な証明は, 最近の Dasgupta Kakde の論文 [4] の結果を用いて初めて可能になったのである (定理 3.1 も参照).
(2) $L(0, \chi^{-1})$ は χ だけで決まる量なので, 定理 2.1 の式は A_K^χ は K によらず χ だけで決まることを表している. このことは norm argument を用いて簡単に証明できる. しかしながら, χ の位数が p で割れるときには, このことは成り立たないことに注意しておく.
(3) Galois 作用で分解したイデアル類群の位数に関する最も古典的な例は, p を奇素数, μ_p を 1 の p 乗根全体がなす群として, $k = \mathbb{Q}$, $K = \mathbb{Q}(\mu_p)$ のときである. このとき, 定理 2.1 の式 (3) は $3 \leq i \leq p-2$ をみたす奇数 i に対して $A_{\mathbb{Q}(\mu_p)}^{\omega^i} = \#\mathbb{Z}_p/(L(0, \omega^{-i}))$ となるが, これは Mazur Wiles の定理である. このときは非自明零点はなく, 上の等式は岩澤主予想から直ちに導かれる. この Mazur Wiles の定理は, Bernoulli 数についての性質 $p \mid B_{p-i} \Longleftrightarrow p \mid L(0, \omega^{-i}) = B_{1,\omega^{-i}}$ を考慮すると, 古典的な Herbrand Ribet の定理

$$p \mid B_{p-i} \Longleftrightarrow A_{\mathbb{Q}(\mu_p)}^{\omega^i} \neq 0$$

の精密化となっていることに注意しておく.

3　一般の CM 拡大のイデアル類群

$[K:k]$ が p と素という条件をはずすと, つまり $[K:k]$ が p で割れる場合を考えると, 状況はとたんに複雑になる. まず, $\mathrm{Gal}(K/k)$ の指標による成分を考えても, §2 の最初で述べた (2) のような同型は存在しないから, $\mathrm{Gal}(K/k)$ のすべての指標 χ に対して A_K^χ がわかっても, A_K の情報は復元されない. また, Remark 2.2 (2) に述べたように, A_K^χ は K によるので, $L(0,\chi^{-1})$ だけでは決まらない. 実際, $L(0,\chi^{-1})$ は χ の核に対応する体 K_χ (χ が $\mathrm{Gal}(K_\chi/k) \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ なる単射を導くような K_χ) のイデアル類群の情報しか持たない. K_χ/k は巡回拡大であり, これでは巡回拡大の情報しかわからない. これから述べていくように, $\mathrm{Gal}(K/k)$ が巡回群と異なる一般の K に対しては, そのイデアル類群はずっと複雑なものになる.

加群の大きさを表すのに Fitting ideal というものを使う. このイデアルは大きさ以上の情報も持っているが, そのことについてはここでは述べないことにする.

R を可換 Noether 環, M を有限生成 R 加群として, $R^m \xrightarrow{A} R^n \to M \to 0$ という R 加群の完全系列があるとき, n 行 m 列の行列 A を上の $R^m \to R^n$ の行列表示として, A の $n\times n$ 小行列式全体で生成される R のイデアルを $\mathrm{Fitt}_R(M)$ と書き, (initial) Fitting ideal と呼ぶ (なお, $m<n$ のときは (0) と考える). このイデアルは上の完全系列の取り方によらない.

特に, R が単項イデアル整域で, すべての極大イデアルの剰余体が有限体のとき (たとえば, $R=\mathbb{Z}$ あるいは R が剰余体有限体の離散付値環のとき), 有限生成ねじれ R 加群 M に対して,

$$\#M = \#(R/\mathrm{Fitt}_R(M))$$

となる. このように Fitting ideal は大きさを表している. 上の式から, たとえば定理 2.1 の式 (3) は $\mathrm{Fitt}_{O_\chi}(A_K^\chi) = (L(0,\chi^{-1}))$ と書ける.

K/k を有限次 abel な CM 拡大とする. $G=\mathrm{Gal}(K/k)$ を

$$G = \mathrm{Gal}(K/k) = \Delta \times G_p \ (\#\Delta \text{ は } p \text{ と素}, G_p \text{ は } p \text{ 群})$$

と分解する. Δ の位数は p と素なので, §2 の分解 (1) を用いて

$$\mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(K/k)] = \mathbb{Z}_p[\Delta][G_p] = \bigoplus_{\chi\in\hat{\Delta}/\sim} O_\chi[G_p]$$

と分解すると, A_K は

$$A_K \simeq \bigoplus_{\chi\in\hat{\Delta}/\sim} A_K^\chi$$

と分解する. ここに, $A_K^\chi = A_K \otimes_{\mathbb{Z}_p[\Delta]} O_\chi$ であり, A_K^χ は $O_\chi[G_p]$ 加群である. つまり, χ を $G=\mathrm{Gal}(K/k)$ の指標と取るのではなく, Δ の指標と取り, A_K を分解するのである.

最初に述べたように, p は奇素数とする. $\rho\in\mathrm{Gal}(K/k)$ を複素共役として, $A_K^\pm = \{x\in A_K \mid \rho(x)=\pm x\}$ とおくと, (ρ の位数が p と素であることから) $A_K = A_K^+ \oplus A_K^-$ と分解する. K^+ を K の中の最大総実部分体とすると, $A_K = A_{K^+}$ であり, A_{K^+} を理解するためには, L 関数の値以上の代数的対象 (Rubin-Stark 元) が必要になる. そこでここでは, A_K^- のみを考える. A_K^- は

$$A_K^- \simeq \bigoplus_{\substack{\chi\in\hat{\Delta}/\sim \\ \chi(\rho)=-1}} A_K^\chi$$

と分解する．かくして, 奇指標 χ に対して, $O_\chi[G_p]$ 加群としての A_K^χ の様子がわかれば, A_K^- の Galois 加群としての様子が完全にわかる (§2 で述べたように, χ が奇指標であるとは, $\chi(\rho)=-1$ ということである).

$S_{\mathrm{ram}}(K/k)$ を K/k で分岐する有限素点全体の集合とする．$v \in S_{\mathrm{ram}}(K/k)$ に対して, $I_v \subset G=\mathrm{Gal}(K/k)$ を惰性群, $N_{I_v}=\sum_{\sigma\in I_v}\sigma \in \mathbb{Z}[G]$, $\mathrm{Frob}_v \in G$ を v の Frobenius 置換 $\in G/I_v$ の G への持ち上げ, G の指標 ψ に対して, $e_\psi=(\#G)^{-1}\sum_{\sigma\in G}\psi(\sigma)\sigma^{-1}$ とおく．$G=\mathrm{Gal}(K/k)$ の指標 ψ の L 関数の値を用いて,

$$U_v = N_{I_v}\mathbb{Z}[G] + (1-\frac{N_{I_v}}{\#I_v}\mathrm{Frob}_v^{-1})\mathbb{Z}[G] \subset \mathbb{Q}[G],$$
$$\Omega = \sum_{\psi\in\hat{G}} L(0,\psi^{-1})e_\psi \in \mathbb{Q}[G]$$

とおき (U_v は Frobenius 置換の持ち上げの取り方によらない),

$$\Theta(K/k) = (\prod_{v\in S_{\mathrm{ram}}(K/k)} U_v)\Omega \subset \mathbb{Q}[G]$$

と定義する (Sinnott-Kurihara イデアルと呼ばれる).

χ を Δ の奇指標で, $\chi\neq\omega$ とすると, $\Theta(K/k)$ の χ 成分 $\Theta(K/k)^\chi \subset \mathbb{Q}_p(\mathrm{Image}\,\chi)[G_p]$ は

$$\Theta(K/k)^\chi \subset O_\chi[G_p]$$

をみたし, $O_\chi[G_p]$ のイデアルとなることが示せる (cf. [14] Proposition 3.1).

さてここで, A_K^χ の $O_\chi[G_p]$ 加群としての Fitting ideal がわかれば, A_K^χ の “大きさ” がわかることになるが, $\mathrm{Fitt}_{O_\chi[G_p]}(A_K^\chi)$ は少し難しく, 結果も複雑になる (最近, この方面で熱田・片岡の結果 [1] がある)．そこで, A_K^χ の Pontryagin 双対を取った $(A_K^\chi)^\vee$ を考える．また, $\sigma\mapsto\sigma^{-1}$ が誘導する $O_\chi[G_p]$ の involution を $\#$ と書く．このとき, 次が証明された.

定理 3.1 (Dasgupta–Kakde [4] (2023))**.** χ を奇指標, $\chi\neq\omega$ とする．このとき,

$$\mathrm{Fitt}_{O_\chi[G_p]}((A_K^\chi)^\vee) = \Theta(K/k)^{\chi,\#}$$

が成立する.

この定理と同様の定理が, 射類群 A_K^T に対しても成立し, それが Dasgupta Kakde [4] の主定理である．射類群版の定理からは, 強 Brumer Stark 予想, Brumer Stark 予想が導かれ, Dasgupta Kakde はこうして Brumer Stark 予想を証明したのである．なお, 上で述べた Dasgupta Kakde の主定理は, 筆者の予想であった ([14] Conjecture 3.2).

定理 2.1 の $\chi\neq\omega$ の場合の式 (3) は, 定理 3.1 の特別な場合である.

さて, 定理 3.1 により, Δ の奇指標 χ で, $\chi\neq\omega$ に対しては, A_K^χ の “大きさ” がわかった．そこで, A_K^- の “大きさ” を完全に知るためには, あとは $\chi=\omega$ に対して, A_K^ω の “大きさ” がわかればよいが, 少なくとも現在の筆者には, **一般の** K/k **に対して**, $\mathrm{Fitt}_{O_\omega[G_p]}((A_K^\omega)^\vee)$ や $\mathrm{Fitt}_{O_\omega[G_p]}(A_K^\omega)$ がどうなるのかはわからない.

また, Dasgupta Kakde の数々の結果はすばらしいが, ω 成分はまったく違う性質を持つ対象であって, 彼らの定理を適用してわかる対象ではない.

そこで, 次の節では, この問題を (少しやさしい問題に変えて) 岩澤加群に対して考えることにする.

4　円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大と岩澤加群

岩澤理論は, 個々の代数体のイデアル類群を扱っているより, $\mathbb{Z}_p$ 拡大上の岩澤加群を扱う方が, 統一的で一般的な理論ができるという岩澤健吉先生の発見に始まるわけだから, 上記の問題をイデアル類群ではなく, 岩澤加群に対して考えるというのは, 自然な考えである.

今までと同じように, K/k を有限次 abel な CM 拡大であるとして, K_∞/K, k_∞/k を円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大とする. 考えたいのは,

$$A_{K_\infty} = \varinjlim A_{K_n}$$

である (ここに K_n は K_∞/K の $[K_n : K] = p^n$ なる中間体である).

Δ を §3 の通りに $\mathrm{Gal}(K/k)$ の p と素な成分として, $\mathrm{Gal}(K_\infty/k) = \Delta \times \Gamma$, Γ は pro-p 群, と書くことにする. $\Gamma \simeq \mathbb{Z}_p \times$(有限 abel p 群) であることに注意する.

$A_K = A_K^+ \oplus A_K^-$ を考えたときと同様に, 複素共役の作用で分解すると $A_{K_\infty} = A_{K_\infty}^+ \oplus A_{K_\infty}^-$ となる. $A_{K_\infty}^-$ が知りたい対象である. A_{K_∞} への Δ の作用を用いて,

$$A_{K_\infty}^- \simeq \bigoplus_{\substack{\chi \in \hat{\Delta}/\sim \\ \chi(\rho)=-1}} A_{K_\infty}^\chi$$

と分解する. Δ の奇指標 χ に対して $A_{K_\infty}^\chi$ は離散的な $O_\chi[[\Gamma]]$ 加群である. そこで, その Pontryagin 双対 $(A_{K_\infty}^\chi)^\vee$ はコンパクトな $O_\chi[[\Gamma]]$ 加群となり, 有限生成ねじれ $O_\chi[[\Gamma]]$ 加群であることが知られている. この加群の Fitting ideal $\mathrm{Fitt}_{O_\chi[[\Gamma]]}((A_{K_\infty}^\chi)^\vee)$ が知りたい.

Fitting ideal を記述するために Stickelberger element を導入する. $\mathcal{K}/k$ を任意の有限次 abel 拡大とするとき,

$$\theta_{\mathcal{K}/k} = \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathcal{K}/k)} \zeta(0, \sigma)\sigma^{-1} \in \mathbb{Q}[\mathrm{Gal}(\mathcal{K}/k)]$$

を Stickelberger element と呼ぶ. ここに, $\zeta(s,\sigma) = \Sigma_{(\frac{\mathcal{K}/k}{\mathfrak{a}})=\sigma} N\mathfrak{a}^{-s}$ は部分 zeta 関数で, $\zeta(0,\sigma) \in \mathbb{Q}$ である.

まず, $\chi \neq \omega$ の場合を考える. $(\theta_{K_n/k})_{n \gg 0}$ は射影系をなし, $\chi \neq \omega$ のとき, $\theta_{K_n/k}$ の χ 成分 $\theta_{K_n/k}^\chi$ は $O_\chi[\Gamma(K_n/k)]$ に属す (Deligne Ribet [5] 及び Pierrette Cassou-Noguès [3]). ここに, $\Gamma(K_n/k)$ は $\mathrm{Gal}(K_n/k)$ の p 成分である ($\mathrm{Gal}(K_n/k) = \Delta \times \Gamma(K_n/k)$). そこで射影系 $(\theta_{K_n/k}^\chi)_{n \gg 0}$ を $\theta_{K_\infty/k}^\chi$ と書くと, これは $O_\chi[[\Gamma]]$ の元となる. これが p 進 L 関数である (Γ の任意の位数有限の指標 ψ に対し, $(\chi\psi)^{-1}\omega$ の p 進 L 関数を与える). $S_{\mathrm{ram}}(K_\infty/k)$ で K_∞/k で分岐する k のすべての素点全体の集合, S_p で k の p の上の素点と無限素点全体からできる集合を表すことにする.

定理 4.1 (Kurihara [14] Theorem 4.4)**.** χ を奇指標で, $\chi \neq \omega$ とする. このとき,

$$\mathrm{Fitt}_{O_\chi[[\Gamma]]}((A_{K_\infty}^\chi)^\vee) = ((\prod_{v \in S_{\mathrm{ram}}(K_\infty/k) \setminus S_p} (1, \frac{N_{I_v}}{1 - \mathrm{Frob}_v^{-1}}))\theta_{K_\infty/k}^\chi)^\#$$

が成立する.

上の表示で, $v \notin S_p$ であるから, v の K_∞/k での惰性群 I_v は有限群である. また, $1 - \mathrm{Frob}_v^{-1}$ は $O_\chi[[\Gamma]]$ の非零因子であることに注意する (ここに無限次拡大 K_∞ を考えるメリットがある). よって, $(1 - \mathrm{Frob}_v^{-1})^{-1}$ は $O_\chi[[\Gamma]]$ の全商環の中で考えることができるが, 右辺は $O_\chi[[\Gamma]]$ に含まれることが示せる.

このように, この場合は p 進 L 関数を用いて **Fitting ideal** が記述され, 岩澤主予想の精密化が得られる. ([14] Theorem 4.4 では $\mu = 0$ が仮定されているが, Dasgupta Kakde による定理 3.1 を用いれば, この仮定ははずすことができる.)

しかしながら, この原稿の話の流れから行くと, 本当に知りたいのは, $\chi = \omega$ のときである.

$\chi = \omega$ を扱うには, $\mu_p \subset K^\times$, $\Delta = \mathrm{Gal}(k(\mu_p)/k)$ としても一般性を失わない. そこで, そのように仮定する. 体 K_∞ の Δ 不変部分を F_∞ と書く. F_∞ は総実代数体であり, $\mathrm{Gal}(F_\infty/k) = \Gamma$ である. F_∞ の p の外不分岐な最大 abel pro-p 拡大を $M_{F_\infty,S_p}/F_\infty$ とし, $\mathrm{Gal}(M_{F_\infty,S_p}/F_\infty) = X_{F_\infty,S_p}$ と書く.

Kummer 双対性 (cf. [10] §7) により, 次の同型が得られる:

$$(A^\omega_{K_\infty})^\vee(1) \simeq X_{F_\infty,S_p}. \tag{5}$$

ここに, (1) は Tate twist である. この同型により, $\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]}((A^\omega_{K_\infty})^\vee)$ を知るには, 総実代数体上の岩澤加群 X_{F_∞,S_p} の Fitting ideal $\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]}(X_{F_\infty,S_p})$ を計算できればよいことがわかる.

5 総実代数体上の岩澤加群

前節で CM 体のイデアル類群の問題が, 総実代数体上の岩澤加群の話に帰着されたので, この節からは, CM 体のことは忘れて, 総実代数体上の話をしていくことにする.

前節で, F_∞/k は総実代数体の pro-p abel 拡大で, k の円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大 k_∞ を中間体に持ち, $[F_\infty : k_\infty] < \infty$ となるものであった. そこで, この節では, F_∞/k はこれらの条件をみたす総実代数体の拡大であるとして, 話を始める.

F_∞/k が上の条件をみたすとき, 有限次 abel 拡大 F/k で, F_∞/F が円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大であり,

$$F \cap k_\infty = k$$

となるものが存在する. そこで, このような F を取り, $\mathrm{Gal}(F/k) = \Gamma_0$ と書くことにすると,

$$\Gamma = \mathrm{Gal}(F_\infty/k) \simeq \Gamma_0 \times \mathrm{Gal}(k_\infty/k) \simeq \Gamma_0 \times \mathbb{Z}_p$$

となっている.

前節同様に S_p を k の無限素点と p 上の素点全体からなる集合, $S_{\mathrm{ram}}(F/k)$ を F/k で分岐する素点全体の集合とする. また, S を k の素点の有限集合で, $S \supset S_{\mathrm{ram}}(F/k) \cup S_p$ をみたすものとする. F_∞/F で分岐するのは p の上の素点しかないから, S は F_∞/k で分岐する k の素点をすべて含むことになる.

$\Lambda_{F_\infty} = \mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ とおく. $\mathrm{Gal}(F_\infty/F)$ の生成元 γ を $1 + T$ に対応させることにより, 群環 $\mathbb{Z}_p[\Gamma_0]$ 上の冪級数環との同型 $\Lambda_{F_\infty} \simeq \mathbb{Z}_p[\Gamma_0][[T]]$ が作れることに注意しておく.

任意の $\sigma \in \Gamma$ を 1 に送ることによって得られる augmentation map $\Lambda_{F_\infty} = \mathbb{Z}_p[[\Gamma]] \to \mathbb{Z}_p$ の kernel を I_Γ と書く.

指標 ψ に対して, $L_S(s,\psi)$ を S に属する有限素点の Euler 積を除いてできる L 関数とする. Λ_{F_∞} の全商環を $Q(\Lambda_{F_\infty})$ と書く. Deligne Ribet の p 進 L 関数 $g_{F_\infty/k,S} \in Q(\Lambda_{F_\infty})$ は次の式で特徴づけられる元である:

$$\kappa^n\psi(g_{F_\infty/k,S}) = L_S(1-n, \psi\omega^{-n}),$$

ここに $\kappa : \Gamma \to \mathbb{Z}_p^\times$ は円分指標, ψ は Γ の位数有限の指標, n は正の整数, $\kappa^n\psi : Q(\Lambda_{F_\infty}) \to \mathbb{C}_p$ は $\kappa^n\psi$ によって誘導される環準同型写像である. $g_{F_\infty/k,S}$ は §4 の Stickelberger element から

構成される．また, $g_{F_\infty/k,S}$ は Serre の意味で, Γ の pseudo-measure となっている ([15])．よって, $I_\Gamma g_{F_\infty/k,S} \subset \Lambda_{F_\infty}$ が成り立つ．

また, $\mathfrak{a}_{\Gamma_0}$ を Γ_0 の群論的構造から決まる Λ_{F_∞} のあるイデアルとする．$\Gamma_0 = \mathbb{Z}/p^{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/p^{n_s}$, $0 < n_1 \leq \cdots \leq n_s$ とするときに, $\mathfrak{a}_{\Gamma_0}$ は $n_1, \ldots, n_s$ を用いて具体的に書けるイデアルであるが, その具体的表示については煩雑となるので, [9] §1.2 を見て頂きたい．ここでは, $\mathfrak{m}$ を Λ_{F_∞} の極大イデアルとするとき,

$$\mathfrak{a}_{\Gamma_0} \subset \mathfrak{m}^{\frac{s(s-1)}{2}}$$

となること, 及び $\Gamma_0 = (\mathbb{Z}/p^m)^{\oplus s}$ のときは,

$$\mathfrak{a}_{\Gamma_0} = (p^m, I_\Gamma)^{\frac{s(s-1)}{2}}$$

となることだけ述べておく．特に, $s \geq 2$ のとき $\mathfrak{a}_{\Gamma_0} \subsetneq (1) = \Lambda_{F_\infty}$ である．Γ_0 の生成元の数を上のように s とするとき, s についての 2 次式の冪が出ていることに注意する．

定理 5.1 (Greither–Kurihara [7] Theorem 3.3, [8] Theorem 4.1)**.** S を上のように F_∞/k で分岐する素点と無限素点を含む k の素点の有限集合とするとき,

$$\mathrm{Fitt}_{\Lambda_{F_\infty}}(X_{F_\infty,S}) = \mathfrak{a}_{\Gamma_0} I_\Gamma g_{F_\infty/k,S}$$

が成り立つ．

Remark 5.2. (1) 上記の論文 [7], [8] では $\mu = 0$ の仮定があるが, Dasgupta Kakde の定理を用いて, この仮定ははずすことができる．また, perfect complex の議論を詳細に行うことにより, この定理は $p = 2$ の場合も証明できる．
(2) 昔は, $\mathrm{Fitt}_{\Lambda_{F_\infty}}(X_{F_\infty,S}) = I_\Gamma g_{F_\infty/k,S}$ という予測もあったのだが, 定理 5.1 により, $s \geq 2$ のとき, この予測は誤りであることがわかる．s が大きくなると, 定理 5.1 により, $\mathrm{Fitt}_{\Lambda_{F_\infty}}(X_{F_\infty,S})$ は $I_\Gamma g_{F_\infty/k,S}$ よりずいぶん小さくなることがわかる． 特に, $s \geq 2$ のとき, $I_\Gamma g_{F_\infty/k,S}$ は $\mathrm{Fitt}_{\Lambda_{F_\infty}}(X_{F_\infty,S})$ に入らない．
(3) 定理 5.1 と §4 最後の同型 (5) により, §4 の K/k が p の外不分岐のときは, $(A_{K_\infty}^\omega)^\vee$ の Fitting ideal もわかることになる．

F/k が p の外不分岐なときは, X_{F_∞,S_p} の Fitting ideal は定理 5.1 によってわかる．しかし, F/k が p と素な素点でも分岐しているときは, $\mathrm{Fitt}_{\Lambda_{F_\infty}}(X_{F_\infty,S_p})$ の状況は大きく異なる．

S' を F/k で分岐する p と素な有限素点の集合とする．$S' \neq \emptyset$ と仮定する．$S = S_{\mathrm{ram}}(F/k) \cup S_p$ とする．$S' = S \setminus S_p$ である．このとき, p 進 L 関数 $g_{F_\infty/k,S}$ を修正した integral な元 $h_{F_\infty/k,S_p} \in \Lambda_{F_\infty}$ で, 次の性質で特徴づけられるものが存在する ([6] Theorem 1.5):

$$\kappa^n \psi(h_{F_\infty/k,S_p}) = L_S(1-n, \psi\omega^{-n}) \prod_{v \in S'} \frac{1 - \psi(v)N(v)^n}{1 - \psi(v)N(v)^{n-1}},$$

ここに $\kappa : \Gamma \to \mathbb{Z}_p^\times$, ψ, n は $g_{F_\infty/k,S}$ を定義したときと同じでものである．$h_{F_\infty/k,S_p}$ はいわゆる T-modification とは異なることに注意する．

$v \in S'$ に対して, v の $\Gamma = \mathrm{Gal}(F_\infty/k)$ での分解群を Γ_v と書く．Γ_v は Γ の指数有限部分群である．augmentation map $\mathbb{Z}_p[\Gamma/\Gamma_v] \to \mathbb{Z}_p$ を用いて, Λ_{F_∞} 加群 Z^0 を

$$Z^0 = \mathrm{Ker}(\bigoplus_{v \in S'} \mathbb{Z}_p[\Gamma/\Gamma_v] \longrightarrow \mathbb{Z}_p)$$

と定義する ($S' \neq \emptyset$ と仮定していることに注意する).

次に Z^0 の 1 次片岡 shift $\mathrm{Fitt}^{[1]}_{\Lambda_{F_\infty}}(Z^0)$ を取る. これは, P を射影次元が 1 以下のねじれ Λ_{F_∞} 加群, $0 \to N \to P \to Z^0 \to 0$ を Λ_{F_∞} 加群の完全系列とするとき,

$$\mathrm{Fitt}^{[1]}_{\Lambda_{F_\infty}}(Z^0) = \mathrm{Fitt}_{\Lambda_{F_\infty}}(P)^{-1}\,\mathrm{Fitt}_{\Lambda_{F_\infty}}(N)$$

と定義される分数イデアルである. この分数イデアルは, 完全系列 $0 \to N \to P \to Z^0 \to 0$ の取り方によらない ([11] Theorem 2.6). もっと一般の加群 M に対する n 次片岡 shift $\mathrm{Fitt}^{[n]}_R(M)$ については, [11] を参照してほしい. $\mathrm{Fitt}^{[1]}_{\Lambda_{F_\infty}}(Z^0)$ は Z^0 という簡単な加群から決まる量であり, 分解群 Γ_v の様子だけで決まることに注意しておく.

$S' \neq \emptyset$ のときは, 次が成り立つ.

定理 5.3 (Greither Kataoka Kurihara [6] Theorem 0.1)**.** F/k で p と素な素イデアルが分岐するとする. このとき,

$$\mathrm{Fitt}_{\Lambda_{F_\infty}}(X_{F_\infty,S_p}) = \mathrm{Fitt}^{[1]}_{\Lambda_{F_\infty}}(Z^0)h_{F_\infty/k,S_p}$$

が成立する.

定理 5.1, 定理 5.3 により, X_{F_∞,S_p} 及び §4 の $(A^{\omega}_{K_\infty})^\vee$ の Fitting ideal が計算されたことになる.

6　岩澤加群の生成元と関係式

この節では, p は任意の素数であり, $p = 2$ も許すことにする.

定理 5.1 の状況を考えよう. すなわち, S は F_∞/k で分岐する素点と無限素点をすべて含む k の素点の有限集合として, $X_{F_\infty,S}$ を考える. $\mathrm{Fitt}_{\Lambda_{F_\infty}}(X_{F_\infty,S})$ が定理 5.1 のような複雑な姿をしているということは, $X_{F_\infty,S}$ の複雑さを表している.

その複雑さを理解するために, $X_{F_\infty,S}$ の Λ_{F_∞} 加群としての最小生成元の数と関係式の数がどのくらいなのかという問題を考える.

R 加群 M に対して, $\mathrm{gen}_R(M)$ で, M の R 加群としての生成元の数の最小値を表すことにする. また, $r_R(M)$ で関係式の数の最小値を表すことにする. $\mathrm{gen}_{\Lambda_{F_\infty}}(X_{F_\infty,S})$, $r_{\Lambda_{F_\infty}}(X_{F_\infty,S})$ について考えたい.

$M_{k,S}/k$ を S の外不分岐な最大 abel pro-p 拡大とする. F_∞/k は, 仮定により, S の外不分岐な abel pro-p 拡大だから, $F_\infty \subset M_{k,S}$ である. Leopoldt 予想が正しければ $\mathrm{Gal}(M_{k,S}/F_\infty)$ は有限となるが, $\mathrm{Gal}(M_{k,S}/F_\infty)$ が有限生成 $\mathbb{Z}_p$ 加群であることは (Leopoldt 予想なしでも) わかる.

任意の abel 群 G に対し, G の p-rank とは, $\dim_{\mathbb{F}_p} G/G^p$ のことである. s, t をそれぞれ Γ_0, $\mathrm{Gal}(M_{k,S}/F_\infty)$ の p-rank とする. 今の場合,

$$s = \mathrm{gen}_{\mathbb{Z}_p}(\Gamma_0), \quad t = \mathrm{gen}_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{Gal}(M_{k,S}/F_\infty))$$

と言っても同じである.

$\mathrm{gen}_{\Lambda_{F_\infty}}(X_{F_\infty,S})$, $r_{\Lambda_{F_\infty}}(X_{F_\infty,S})$ について, 片岡武典氏との共同研究で, 最近, 次の結果を得た.

定理 6.1 (Kataoka Kurihara [12])**.** s, t をそれぞれ Γ_0, $\mathrm{Gal}(M_{k,S}/F_\infty)$ の p-rank とする．このとき,

$$\max\{\frac{s(s+1)}{2}, t\} \leq \mathrm{gen}_{\Lambda_{F_\infty}}(X_{F_\infty,S}) \leq \frac{s(s+1)}{2} + t$$

が成立する．また,

$$r_{\Lambda_{F_\infty}}(X_{F_\infty,S}) = \frac{s(s+1)(s+2)}{6} + \mathrm{gen}_{\Lambda_{F_\infty}}(X_{F_\infty,S})$$

である．

以上のように, s を動かすとき, $\mathrm{gen}_{\Lambda_{F_\infty}}(X_{F_\infty,S})$ は s の 2 次式のオーダー, $r_{\Lambda_{F_\infty}}(X_{F_\infty,S})$ は s の 3 次式のオーダーで大きくなることが示された．

このように, $X_{F_\infty,S}$ は $\Gamma_0 = \mathrm{Gal}(F/k)$ の p-rank s が大きいとき, 生成元の数も関係式の数も多く, 想像されていたより, 複雑な加群となっている．なおこの情報は, $X_{F_\infty,S}$ の λ 不変量, μ 不変量には反映されない情報である．

参考文献

[1] M. Atsuta and T. Kataoka, Fitting ideals of class groups for CM abelian extensions, Algebra Number Theory **17** (2023), no. 11, 1901–1924.

[2] D. Burns, M. Kurihara and T. Sano, On zeta elements for $\mathbb{G}_m$, Doc. Math. **21** (2016), 555–626.

[3] P. Cassou-Noguès, Valeurs aux entiers négatifs des fonctions zêta et fonctions zêta p-adiques, Invent. Math. **51** (1979), no. 1, 29–59.

[4] S. Dasgupta and M. Kakde, On the Brumer-Stark conjecture, Ann. of Math. (2) **197** (2023), no. 1, 289–388.

[5] P. Deligne and K. Ribet, Values of abelian L-functions at negative integers over totally real fields, Invent. Math. **59** (1980), no. 3, 227–286.

[6] C. Greither, T. Kataoka and M. Kurihara, Fitting ideals of p-ramified Iwasawa modules over totally real fields, Selecta Math. (N.S.) **28** (2022), no. 1, Paper No. 14, 48 pp.

[7] C. Greither and M. Kurihara, Tate sequences and Fitting ideals of Iwasawa modules, Algebra i Analiz **27** (2015), no. 6, 117–149; translation in St. Petersburg Math. J. **27** (2016), no. 6, 941–965.

[8] C. Greither and M. Kurihara, Fitting ideals of Iwasawa modules and of the dual of class groups, Tokyo J. Math. **39** (2017), no. 3, 619–642.

[9] C. Greither, M. Kurihara and H. Tokio, The second syzygy of the trivial G-module, and an equivariant main conjecture, In: Development of Iwasawa theory–the centennial of K. Iwasawa's birth, 317–349, Adv. Stud. Pure Math., 86, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2020.

[10] K. Iwasawa, On $\mathbb{Z}_\ell$-extensions of algebraic number fields, Ann. of Math. (2) **98** (1973), 246–326.

[11] T. Kataoka, Fitting invariants in equivariant Iwasawa theory, In: Development of Iwasawa theory–the centennial of K. Iwasawa's birth, 413–465, Adv. Stud. Pure Math., 86, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2020.

[12] T. Kataoka and M. Kurihara, Minimal resolutions of Iwasawa modules, preprint, 2023.

[13] M. Kurihara, Rubin-Stark elements and ideal class groups, In: Algebraic number theory and related topics 2013, 343–363, RIMS Kokyuroku Bessatsu, B53, Research Institute for Mathematical Sciences (RIMS), Kyoto, 2015.

[14] M. Kurihara, Notes on the dual of the ideal class groups of CM-fields, J. Théor. Nombres Bordeaux **33** (2021), no. 3, 971–996.

[15] J.-P. Serre, Sur le résidu de la fonction zêta p-adique d'un corps de nombres, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B **287** (1978), no. 4, A183–A188.