Semiabelian extension について

木田 雅成 (東京理科大学)

1 分岐条件付き逆ガロア問題

K を代数体とする. K の実素点の個数 r_1 と複素素点の個数 r_2 の組 (r_1, r_2) を代数体 K の符号とよぶ.

符号つき逆ガロア問題 ([14])**.** 与えられた有限置換群 G と, G の対合の共役類 C に対して, 代数体 K であって, その $\mathbb{Q}$ 上のガロア閉包のガロア群が G と同型で, かつ複素共役の像が C に一致するようなものは存在するか？

複素共役の含まれる共役類が定まれば, その代表元が固定する埋め込みの個数として K の符号が決まることに注意する.

この問題は理論的な興味だけではなく, 次のような数論的に意義がある. 例えば, CM アーベル多様体の構成には CM 体 (複素共役の共役類が中心に含まれる体) の構成が必要である. また, Kahre-Wintenberger の定理が成立する体を構成したければ, CM でない虚の体の構成が必要である ([11, Theorem 3.8] など).

符号つき逆ガロア問題は一般には未解決であり, 系統的なアプローチも知られていない. Klüners と Malle の代数体の database `http://galoisdb.math.upb.de/home` では次数 23 までの群の符号つきガロア実現のデータがあるが, その中でも, いくつかの群についてはまだ未解決になっている.

以下, G と同型なガロア群をもつ有理数体の拡大体を G **拡大**とよぶ[1].

上の問題について次が知られている.

命題 1.1 (Serre)**.** 任意の有限群 G に対して, $\mathbb{Q}$ 上の G 拡大が存在するならば, 任意の有限群 G は総実な G 拡大として実現できる.

一方で有限素点を含めた分岐に関して次の問題が知られている.

最少分岐問題. 有限群 G に対して $d(G)$ で G の生成元の最少個数をあらわすとき, ちょうど $d(G)$ 個の素点が分岐するような tamely ramified G 拡大が存在するか？

補註 1.2.
- tamely ramified な G 拡大では, 無限素点を含めると少なくとも $d(G)$ 個の素点が分岐することが知られている.
- G が p 群ならば $d(G) = \dim_{\mathbb{F}_p} G/(G^p[G, G])$ である.

これに関して次の結果がある.

定理 1.3 (Kisilevsky and Sonn [13])**.** セミアーベル p 群 G に対して最少分岐問題は肯定的に解ける.

[1] 本稿で考察するガロア拡大は有理数体上のものに限る.

ここで, セミアーベル群は次のように定義される.

定義 1.4 (Thompson [19])**.** $\mathscr{S}\mathscr{A}$ を次の条件をみたす有限群の同型類の最小の族とする.

(i) $1 \in \mathscr{S}\mathscr{A}$

(ii) $G \in \mathscr{S}\mathscr{A}$ ならば G の任意の準同型像も $\mathscr{S}\mathscr{A}$ に含まれる.

(iii) A がアーベル群で $C \in \mathscr{S}\mathscr{A}$ ならば $A \rtimes C \in \mathscr{S}\mathscr{A}$.

このとき $\mathscr{S}\mathscr{A}$ の元に同型な群を**セミアーベル群**とよぶ.

定義から, すべてのアーベル群はセミアーベル群である. またセミアーベル群が可解群であることもわかる. またセミアーベル群に対して, 構成的逆ガロア問題が様々な形で解決されている. (Thompson [19], Stoll [18], Dentzer [2]).
次の補題はセミアーベル群の特徴づけを与える.

補題 1.5 (Stoll [18, Theorem 1])**.** 群 G が semiabelian であることと, G がいくつかの巡回群の wreath 積の準同型像になることは同値である.

この補題により次の定義ができる.

定義 1.6. セミアーベル群 G に対して, **wreath 長** $\mathrm{wl}(G)$ を, 非自明巡回群 $C_1, \ldots, C_r$ が存在し, G が $C_1 \wr (C_2 \wr \cdots \wr C_r)$ の準同型像となるような最少の個数 r で定義する.

補註 1.7. 一般にセミアーベル群 G に対して, 不等式

$$d(G) \leq \mathrm{wl}(G)$$

が成り立ち, G が冪零群のときは

$$d(G) = \mathrm{wl}(G)$$

が成り立つ.

定理 1.8 (Kisilevsky, Neftin and Sonn [12, Theorem 4.1])**.** セミアーベル群 G に対して, tamely ramified G 拡大では高々$\mathrm{wl}(G)$ 個の素数が分岐する. 特に $d(G) = \mathrm{wl}(G)$ が成立するセミアーベル群 G に対して最少分岐問題は肯定的に解ける.

p 群は冪零群であるから補註 1.7 から, $d(G) = \mathrm{wl}(G)$ が成り立つので, 定理 1.8 は定理 1.3 を含んでいる.
以上で見てきたようにセミアーベル群は数論的に重要なガロア群の族を構成しているように思われる. しかしながら, その定義は帰納的であり, 正体が掴みにくい. また補題 1.5 も与えられた群がセミアーベル群であることを示すのには使いにくい. セミアーベル群の登場初期の頃を除いて, 群論の分野での研究はないに等しい. この状況を打開するために, 本研究ではセミアーベル群の intrinsic characterization を目標とした.

2 セミアーベル群

2.1 セミアーベル群の基本的な性質

先に述べたように,

補題 2.1. アーベル群はセミアーベル群.

逆はもちろん正しくない. 例えば $D_4 \cong C_2 \ltimes C_4$ はセミアーベル群である. また,

補題 2.2. セミアーベル群は可解群である.

これも逆は正しくない. 例としては位数 24 の群 $\mathrm{SL}(2,3)$ がある.
次にいくつか知られている事実を述べる.

補題 2.3 (Thompson [19]). クラス 2 の冪零群 ($[G,G] \leq Z(G)$ が成り立つ冪零群) はセミアーベル群.

これも逆は正しくない. 位数 2^{n+1} $(n \geq 2)$ の 2 面体群 D_{2^n} はセミアーベル群で, 冪零クラスは n である.

補題 2.4 (Thompson [19]). 任意の p-Sylow 群が可換な可解群はセミアーベル群である. 特に G の位数が素数の 3 乗で割れなければセミアーベル群.

位数 24 のセミアーベル群でこの条件をみたさないものがある.
次の判定法は帰納的ではあるが使いやすい.

補題 2.5 (Dentzer [2, Theorem 2.3]). 非自明な有限群 G がセミアーベル群であるための必要十分条件は G の可換正規部分群 A とセミアーベル真部分群 H が存在して, $G = AH$ が成り立つことである.

補註 2.6. 補題 2.5 で $A \cap H = 1$ ならば, H は補群 (complement) になり G は A と H の半直積になる. $A \cap H \neq 1$ のとき, H を supplement とよんでいる群論の文献がある.

次の Stoll の結果は適用範囲は限られるが, 帰納的ではない数少ない判定法である.

補題 2.7 (Stoll [18, Corollary 1 (b)]). 有限群 G が巡回群のアーベル拡大ならば, セミアーベル群.

2.2 セミアーベル群と群の同質類

論文 [10] での一つ目の定理は次のものである.

定理 2.8. 2 つの有限群 G, H が同質であるとする. このとき G がセミアーベル群であることと H がセミアーベル群であることは同値である.

有限群の同質性 (isoclinism) の定義は次で与えられる.

定義 2.9 (Hall [4]). G と H が**同質** (isoclinic) であるとは, 同型 $\varphi : G/Z(G) \longrightarrow H/Z(G)$ があって, φ が

$$[\varphi(g_1Z(G)), \varphi(g_2Z(G))] = \psi([g_1Z(G), g_2Z(G)])$$

をみたす同型 $\psi : [G,G] \longrightarrow [H,H]$ を導くことである.

大雑把に言えば, 2 つの群の「非可換度」の違いが中心の大きさの違いくらいしかないときに同質というわけである．例えば全てのアーベル群は一つの同質類をなす.

1 つの同質類には stem 群とよばれる $Z(G) \leq [G,G]$ をみたす群が位数の一番小さな群として含まれる．例えば位数 8 の 2 面体群 D_4 の同質類の stem 群は D_4 と Q_8 である.

したがって, stem 群がセミアーベル群であることを確かめれば, それと同質な群は全てセミアーベル群であることが定理 2.8 からわかる.

補註 2.10. Hall 以来, 同質類の不変量は数多く知られている．いくつかあげると,

- $G/Z(G)$ の位数
- $[G,G]$ の位数
- G が可解群ならば, その導来長
- G が冪零群ならば, その冪零クラス
- G の複素線形既約表現の表現次数の集合

などなど．同質類の中には数論的な特徴づけがわかっているものもある (例えば [9]).

2.3 セミアーベル群と monomial 群

論文 [10] では次の十分条件を証明した.

定理 2.11. 有限冪零群 G が次の 2 条件をみたせば, (少しの例外を除いて) セミアーベル群である.

(P1) 任意の素数 $p \geq 3$ に対して, G の p-Sylow 部分群は modular.

(P2) G の 2-Sylow 部分群は G は quaternion-free.

「少しの例外」は次節で述べる C 型の Wilkens 群のことである.

modular 群と quaternion-free 群の定義を述べる.

定義 2.12.
- p 群 G が **modular** であるとは, その部分群のなす束がモジュラー則をみたすことである．同値な定義として,「G の任意の部分群 N, H に対して $NH = HN$ が成り立つ」が知られている.
- 2 群 G が **quaternion-free** であるとは, G の任意の部分群の準同型像が Q_8 と同型にならないことである.

定理 2.11 の発見の背景について説明する．まず G が **monomial 群**であるとは, G の任意の(複素線形) 既約表現が G の部分群の 1 次元表現から誘導されることであったことを思い出しておく.

セミアーベル群の性質を調べ始めたころ, 計算機実験を通して, セミアーベル群と monomial 群が非常に近いクラスではないかという感覚を得た．一方で monomial 群については次の命題が証明されている.

命題 2.13 (Dornhoff [3, Theorem 2.6])**.** 有限可解群 G が次の 2 条件をみたせば, monomial 群である.

(P1) 任意の素数 $p \geq 3$ に対して, G の p-Sylow 部分群は modular.

(P2) G の 2-Sylow 部分群は quaternion-free.

当初, この命題の monomial 群をセミアーベル群に変えた命題を証明しようと考えた. 結局のところは弱い定理 2.11 の形になってしまった. その理由は次節に簡単に述べる.
次の予想は確からしく思われる.

予想. G がセミアーベル群ならば monomial.

この予想が成り立たない例を私は知らない. ただし逆は成り立たないことはわかっている. G が超可解ならば monomial であるが, 位数 192 の超可解群で, セミアーベル群でない群が存在する.

2.4 定理 2.11 の証明の概略

最後に定理 2.11 の証明の概略を述べる. G を modular p 群とする. このような群の構造は岩澤 [7] 以来, 詳しく調べられていて, 「G は G/N が巡回群になるような正規アーベル部分群 N をもつ」または「G はすべての部分群が正規であるような群に同型である」. 前者なら直ちに G がセミアーベル群であることがわかる. 後者の場合は Dedekind により, そのような群は Q_8 と基本アーベル 2 群の直積であることが証明されていて, これはセミアーベル群である.
G を 2 群とする. G が modular 群であるときはすでに示したので, G が mon-modular な quaternion-free 群とする. このような群は Wilkens [21] と Janko [1, Section 9] により分類されていて, その構造は A 型, B 型, C 型にわかれる. A 型, B 型の場合には, 「G は G/N が巡回群になるような正規アーベル部分群 N をもつ」ことがわかってセミアーベル群であることが従う.
C 型の群はおおよそ次のような群 G である. $k \geq 3$ として,

$$M_{2^{k+1}} = \langle a, b \mid a^{2^k} = b^2 = 1, a^b = a^{1+2^{k-1}} \rangle$$

とする. G は極大基本可換正規部分群 N をもち, 完全系列

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow G \longrightarrow M_{2^{k+1}} \longrightarrow 1$$

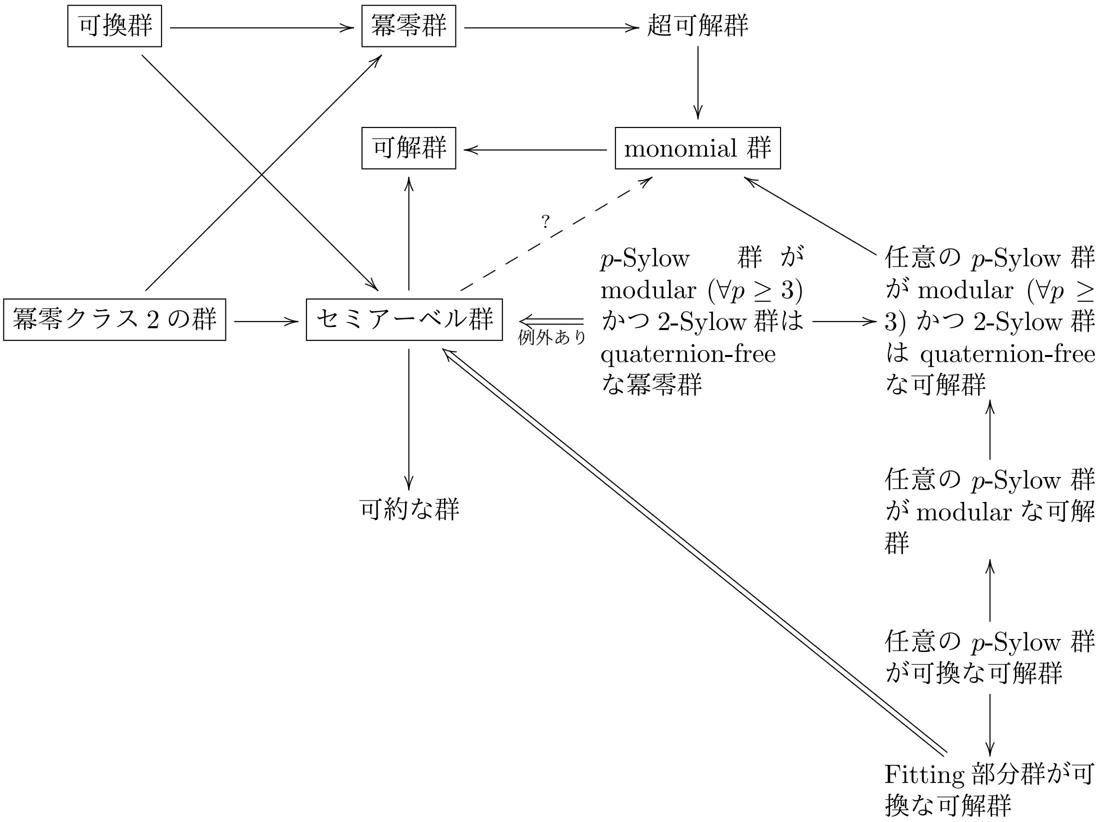
をみたす. この場合は長い計算により, 群が既約であることが示されセミアーベル群でないことが導かれる. (群の既約性の定義は補註 3.1). 最小の C 型の群の位数は 2^8 である[2].
G を一般の冪零群とする. G は p 群の直積である. 仮定により各直積因子はセミアーベル群なので G もセミアーベル群になる.
monomial 群 G に対して, 命題 2.13 において, 仮定が「冪零」でなく「可解」ですんだのは, G が超可解ならば monomial という定理が成り立っていて, 超可解性は部分群にも引き継がれて, そこで帰納法がうまく働くことによる. (この部分の議論については [20, Theorem I.2.10] がわかりやすい).
セミアーベル群に対しても, 部分群に閉じているような性質をもつ群の族がセミアーベル群であることが示されれば, 定理 2.11 での仮定を弱められるものと考えられる.
一般の可解群については補題 2.4 の一般化にあたる次が示せる.

系 2.14. 有限可解群 G の Fitting 部分群が可換群ならば G はセミアーベル群.

ここで G の Fitting 部分群 $F(G)$ は G の最大正規冪零部分群として定義される.

[2]講演では間違ったことを話してしまいました.

3 まとめ



補註 3.1.

- 二重矢印が論文 [10] で新しく示されたところである．また波線矢印は予想である．
- 枠で囲ったものは同質類で変わらない性質である．
- 有限群 G が**既約**であるとは，G の可換正規部分群がすべて，G の Frattini 部分群 (= G の極大部分群の共通部分) に含まれることである．この群の既約性はあまり一般的な用語ではないが [17] で定義され，[2] で使われている．また代数体のデータベース `http://galoisdb.math.upb.de/home` でも使われている．(例えば 8T12 の項をみよ)．

参考文献

[1] Y. Berkovich and Z. Janko, Structure of finite p-groups with given subgroups, In: Ischia group theory 2004, 13–93, Contemp. Math., 402, American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.

[2] R. Dentzer, On geometric embedding problems and semiabelian groups, Manuscripta Math. **86** (1995), no. 2, 199–216.

[3] L. Dornhoff, M-groups and 2-groups, Math. Z. **100** (1967), 226–256.

[4] P. Hall, The classification of prime-power groups, J. Reine Angew. Math. **182** (1940), 130–141.

[5] B. Huppert, Endliche Gruppen. I, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 134, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1967.

[6] B. Huppert, Gruppen mit modularer Sylow-Gruppe, Math. Z. **75** (1960/61), 140–153.

[7] K. Iwasawa, Über die endlichen Gruppen und die Verbände ihrer Untergruppen, J. Fac. Sci. Imp. Univ. Tokyo Sect. I. **4** (1941), 171–199.

[8] Z. Janko, Finite quaternion-free 2-groups, Israel J. Math. **154** (2006), 157–184.

[9] Y. Katayama and M. Kida, Coincidence of L-functions, Acta Arith. **204** (2022), no. 4, 369–385.

[10] M. Kida, On semiabelian groups, preprint, 2023.

[11] M. Kida and G. Koda, Isoclinism classes of Galois groups of number fields, Acta Arith. **191** (2019), no. 2, 115–149.

[12] H. Kisilevsky, D. Neftin and J. Sonn, On the minimal ramification problem for semiabelian groups, Algebra Number Theory **4** (2010), no. 8, 1077–1090.

[13] H. Kisilevsky and J. Sonn, On the minimal ramification problem for ℓ-groups, Compos. Math. **146** (2010), no. 3, 599–606.

[14] J. Klüners and G. Malle, A database for field extensions of the rationals, LMS J. Comput. Math. **4** (2001), 182–196.

[15] F. Napolitani, Sui p-gruppi modulari finiti, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **39** (1967), 296–303.

[16] D. Neftin, On semiabelian p-groups, J. Algebra **344** (2011), 60–69.

[17] L. Schneps, On reduction of p-groups, Comm. Algebra **21** (1993), no. 5, 1603–1609.

[18] M. Stoll, Construction of semiabelian Galois extensions, Glasgow Math. J. **37** (1995), no. 1, 99–104.

[19] J. G. Thompson, Some finite groups which appear as $\mathrm{Gal}\, L/K$, where $K \subseteq \mathbf{Q}(\mu_n)$, In: Group theory, Beijing 1984, 210–230, Lecture Notes in Math., 1185, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[20] R. W. van der Waall, On monomial groups, J. Reine Angew. Math. **264** (1973), 103–134.

[21] B. Wilkens, On quaternion-free 2-groups, J. Algebra **258** (2002), no. 2, 477–492.