モジュラス付きモチーフの実現関手

小泉 淳之介 (東京大学)

1　混合モチーフ

代数幾何学における「モチーフ」とは, 代数多様体とその種々のコホモロジーとの間に位置する対象を広く指す言葉であり, 場面によって様々な意味で用いられる．中でも (固有とは限らない) 一般の滑らかな多様体のモチーフは混合モチーフと呼ばれ, 活発に研究されてきた．混合モチーフの定義として現在主流なのは Voevodsky によるものである．まずこれについて解説しよう．

以下 k を完全体とし, k 上分離的かつ有限型かつ滑らかなスキームのなす圏を Sm で表す. Suslin-Voevodsky は Dold-Thom による特異ホモロジー関手の構成に着想を得て, 次のような群 $\mathrm{Cor}(X, Y)$ を定義した.

定義 1.1. X, Y を Sm の対象とする．X から Y への**有限対応**とは, X のある連結成分上有限全射であるような $X \times Y$ の既約閉集合の $\mathbb{Z}$ 係数線型結合を指す．X から Y への有限対応全体のなす群を $\mathrm{Cor}(X, Y)$ で表す.

交叉積を用いることで, $X, Y, Z \in \mathrm{Sm}$ に対して有限対応の合成 $\mathrm{Cor}(X, Y) \times \mathrm{Cor}(Y, Z) \to \mathrm{Cor}(X, Z)$ を定めることができる．これにより有限対応を射とする圏 Cor が得られる．混合モチーフの圏 $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}$ は, 圏 Cor 上の Nisnevich 層の導来 ∞ 圏を射の族

$$\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X \times \mathbb{A}^1) \to \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X) \quad (X \in \mathrm{Cor})$$

およびそのシフトに関して局所化することで得られる安定 ∞ 圏として定義される．ただし $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X)$ は米田埋め込み関手による $X \in \mathrm{Cor}$ の像を表す．また $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(X)$ の $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}$ における像を $\mathrm{M}(X)$ で表す．モチーフ関手と呼ばれるこの関手 $\mathrm{M}\colon \mathrm{Cor} \to \mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}$ は代数多様体の巨大なホモロジー論のようなものであり, 例えば以下のような性質を持っている.

1. (Mayer-Vietoris 列) $X \in \mathrm{Sm}$ および X の開被覆 $X = U \cup V$ に対し, 列

   $$\mathrm{M}(U \cap V) \to \mathrm{M}(U) \oplus \mathrm{M}(V) \xrightarrow{-} \mathrm{M}(X)$$

   はファイバー列である.

2. (射影束公式) $X \in \mathrm{Sm}$ および階数 $n+1$ のベクトル束 $E \to X$ に対し, 同型

   $$\mathrm{M}(\mathbb{P}(E)) \simeq \bigoplus_{i=0}^{n} \mathrm{M}(X) \otimes \mathbb{Z}(i)[2i]$$

   が存在する．ただし $\mathbb{Z}(i) := \mathrm{cofib}(\mathrm{M}(\{0\}) \to \mathrm{M}(\mathbb{P}^1))^{\otimes i}[-2i]$ である.

3. (Gysin 列) $X \in \mathrm{Sm}$ および X の余次元 c の滑らかな閉部分スキーム Z に対し, 以下のようなファイバー列が存在する:

$$\mathrm{M}(X - Z) \to \mathrm{M}(X) \to \mathrm{M}(Z) \otimes \mathbb{Z}(c)[2c].$$

4. (ホモトピー不変性) $X \in \mathrm{Sm}$ に対し, 自然な射 $\mathrm{M}(X \times \mathbb{A}^1) \to \mathrm{M}(X)$ は同型である.

混合モチーフの圏 $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}$ はその名の通り代数多様体の様々なコホモロジーが経由する舞台となっている. 例えば k で可逆な素数 ℓ に対し, ℓ 進エタールコホモロジー $X \mapsto \mathrm{R}\Gamma(X, \mathbb{Q}_\ell)$ は $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}$ において表現可能である. すなわち, $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}$ の対象 $\mathrm{E}_{\text{ét},\ell}$ が存在して

$$\mathrm{map}_{\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}}(\mathrm{M}(X), \mathrm{E}_{\text{ét},\ell}) \simeq \mathrm{R}\Gamma(X, \mathbb{Q}_\ell)$$

が成り立つ. ただし $\mathrm{map}_{\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}}(-,-)$ は $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}$ における射のなすスペクトラムを表す. この対象 $\mathrm{E}_{\text{ét},\ell}$ により表現される関手 $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}} \to \mathcal{D}(\mathbb{Z})$ を**エタール実現関手**と呼ぶ. 同様に de Rham コホモロジー $X \mapsto \mathrm{R}\Gamma(X, \Omega_X^\bullet)$ も $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}$ において表現可能であり, **de Rham 実現関手**が得られる. これらのコホモロジーの満たす諸性質, 例えば射影束公式や Gysin 列は, 上述したモチーフの性質の実現関手による像として理解することができる. 以上のような「個々のコホモロジーからモチーフへの視点の転換」は, Voevodsky による Bloch-加藤予想の証明をはじめとする様々な場面でその力を発揮した.

2 モジュラス付きモチーフ

前述のように Voevodsky による混合モチーフの理論は華々しい成功を収めたが, 一方で完全無欠な理論とは言い難い面も持ち合わせている. 例えば代数幾何学において古くから重要なコホモロジーである Hodge コホモロジー $X \mapsto \mathrm{R}\Gamma(X, \Omega_X^q)$ を考えてみると, 自然な射 $\mathrm{R}\Gamma(X, \Omega_X^q) \to \mathrm{R}\Gamma(X \times \mathbb{A}^1, \Omega_{X \times \mathbb{A}^1}^q)$ は同型にならない. これは Hodge コホモロジーが $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}$ において表現可能でないことを意味している. 同様に標数 $p > 0$ の体上では, Hodge-Witt コホモロジーや p-準素な係数を持つエタールコホモロジーが $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}$ において表現可能でないことが知られている.

このようにホモトピー不変性を持たないコホモロジーを包摂する理論を目指して, Kahn-宮崎-斎藤-山崎 [1] は「モジュラス付きモチーフ」という新たな枠組みを提案した. モジュラス付きモチーフの中核となる発想は, 滑らかなスキームの無限遠にモジュラスと呼ばれる付加構造を与え, その付加構造の違いを区別することで, ホモトピー不変性よりも繊細な条件を定式化するというものである.

定義 2.1. **モジュラス対**とは以下のような対 $\mathcal{X} = (X, D_X)$ を指す:

1. X は k 上分離的かつ有限型のスキームである.
2. D_X は X 上の有効 Cartier 因子である.
3. $X^\circ := X - |D_X|$ は k 上滑らかである.

さらに X が k 上滑らかで $|D_X|$ が単純正規交差因子のとき, $\mathcal{X}$ は**対数的滑らか**であるという.

モジュラス対は滑らかなスキーム X° の無限遠に付加データを与えたものと捉えることができる. 例えばモジュラス対 $\overline{\square} := (\mathbb{P}^1, [\infty])$ は $\mathbb{A}^1$ の無限遠点に付加データを与えたものであり, **キューブ**と呼ばれる. 大雑把に言えば, Voevodsky の理論において滑らかなスキームをモジュラス対に置き換え, $\mathbb{A}^1$ をキューブに置き換えたものがモジュラス付きモチーフの理論である.

モジュラス付きモチーフの圏 $\underline{\mathrm{M}}\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}$ の定義を説明しよう ($\underline{\mathrm{M}}$ はモジュラス付きであることを表す記号である). 出発点となるのは有限対応の群 $\mathrm{Cor}(X, Y)$ のモジュラス付き版に相当する次の群 $\underline{\mathrm{M}}\mathrm{Cor}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ である:

定義 2.2. $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ をモジュラス対とし, α を X° から Y° への有限対応とする.

1. α が**左固有**であるとは, α の各成分 V に対し, その $X \times Y$ における閉包 $\overline{V}$ が X 上固有であることを指す.
2. α が**許容的**であるとは, α の各成分 V に対し, Cartier 因子の不等式 $(\mathrm{pr}_1^* D_X)|_{\overline{V}^N} \geq (\mathrm{pr}_2^* D_Y)|_{\overline{V}^N}$ が成り立つことを指す. ここで $\overline{V}^N$ は $\overline{V}$ の正規化を表す.

左固有かつ許容的な有限対応のなす $\mathrm{Cor}(X^\circ, Y^\circ)$ の部分群を $\underline{\mathrm{M}}\mathrm{Cor}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ で表す.

圏 Cor の場合と同様に, 交叉積を用いることでモジュラス対の間の有限対応の合成が定義され, 圏 $\underline{\mathrm{M}}\mathrm{Cor}$ が得られる. また $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \underline{\mathrm{M}}\mathrm{Cor}$ に対して

$$\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y} := (X \times Y, \mathrm{pr}_1^* D_X + \mathrm{pr}_2^* D_Y)$$

と定義することで $\underline{\mathrm{M}}\mathrm{Cor}$ 上の対称モノイダル構造 $\otimes$ が得られる. $\underline{\mathrm{M}}\mathrm{Cor}$ 上の Abel 群の前層 F および $\mathcal{X} \in \underline{\mathrm{M}}\mathrm{Cor}$ に対し, X 上のエタール前層 $F_{\mathcal{X}}$ が

$$U \mapsto F(U, D_X|_U)$$

により定まる. 全ての $\mathcal{X} \in \underline{\mathrm{M}}\mathrm{Cor}$ に対して $F_{\mathcal{X}}$ が Nisnevich 層であるとき, F は Nisnevich 層であるという. 混合モチーフの圏 $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}$ は, 圏 $\underline{\mathrm{M}}\mathrm{Cor}$ 上の Nisnevich 層の導来 ∞ 圏を射の族

$$\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(\mathcal{X} \otimes \overline{\square}) \to \mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(\mathcal{X}) \quad (\mathcal{X} \in \underline{\mathrm{M}}\mathrm{Cor})$$

およびそのシフトに関して局所化することで得られる安定 ∞ 圏として定義される. ただし $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(\mathcal{X})$ は米田埋め込み関手による $\mathcal{X} \in \underline{\mathrm{M}}\mathrm{Cor}$ の像を表す. また $\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(\mathcal{X})$ の $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}$ における像を $\mathrm{M}(\mathcal{X})$ で表す. Voevodsky の圏 $\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}$ の場合と同様に, モチーフ関手 $\mathrm{M}\colon \underline{\mathrm{M}}\mathrm{Cor} \to \underline{\mathrm{M}}\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}$ は以下のようなホモロジー論的性質を持っている:

1. (Mayer-Vietoris 列) $\mathcal{X} \in \mathrm{Sm}$ および X の開被覆 $X = U \cup V$ に対し, 列
$$\mathrm{M}(U \cap V, D_X|_{U \cap V}) \to \mathrm{M}(U, D_X|_U) \oplus \mathrm{M}(V, D_X|_U) \xrightarrow{-} \mathrm{M}(\mathcal{X})$$
はファイバー列である.
2. (射影束公式) $\mathcal{X} \in \underline{\mathrm{M}}\mathrm{Cor}$ および階数 $n+1$ のベクトル束 $E \to X$ に対し, 同型
$$\mathrm{M}(\mathbb{P}(E), \pi^* D_X) \simeq \bigoplus_{i=0}^{n} \mathrm{M}(\mathcal{X}) \otimes \mathbb{Z}(i)[2i]$$
が存在する. ただし $\pi\colon \mathbb{P}(E) \to X$ は自然な射影であり, $\mathbb{Z}(i) := \mathrm{cofib}(\mathrm{M}(\{0\}) \to \mathrm{M}(\mathbb{P}^1))^{\otimes i}[-2i]$ である.

3. (馴 Gysin 列 [5]) 対数的に滑らかな $\mathcal{X} \in \underline{\mathrm{M}}\mathrm{Cor}$ および X の余次元 1 の滑らかな閉部分スキーム Z に対し, $|D_X + Z|$ が単純正規交叉因子ならば, 以下のようなファイバー列が存在する:

$$\mathrm{M}(X, D_X + Z) \to \mathrm{M}(\mathcal{X}) \to \mathrm{M}(Z, D_X|_Z) \otimes \mathbb{Z}(1)[2].$$

4. (キューブ不変性) $\mathcal{X} \in \underline{\mathrm{M}}\mathrm{Cor}$ に対し, 自然な射 $\mathrm{M}(\mathcal{X} \otimes \overline{\square}) \to \mathrm{M}(\mathcal{X})$ は同型である.

さて, モジュラス付きモチーフの圏は本来ホモトピー不変性を持たないコホモロジー論を包摂することを目指して構築されたのだったから, 当然どのようなコホモロジー論が $\underline{\mathrm{M}}\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}$ において表現できるかという問題が重要である. Kelly-宮崎は最近, k の標数が 0 である場合に, Hodge コホモロジーが $\underline{\mathrm{M}}\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}$ で表現可能であることを証明した. これは $\underline{\mathrm{M}}\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}$ がホモトピー不変でないコホモロジーを表現する能力を持つことを示した最初の結果である.

定理 2.3 (Kelly-宮崎 [2])**.** 基礎体 k の標数が 0 のとき, $\underline{\mathrm{M}}\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}$ の対象 $\underline{\mathbf{M}}\mathbf{\Omega}^q$ が存在して

$$\mathrm{map}_{\underline{\mathrm{M}}\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}}(\mathrm{M}(\mathcal{X}), \underline{\mathbf{M}}\mathbf{\Omega}^q) \simeq \mathrm{R}\Gamma(X, \underline{\mathrm{M}}\Omega^q_{\mathcal{X}})$$

が成り立つ. ただし $\underline{\mathrm{M}}\Omega^q$ は対数的滑らかなモジュラス対 $\mathcal{X}$ に対して

$$\underline{\mathrm{M}}\Omega^q(\mathcal{X}) \simeq \Gamma(X, \Omega^q(\log|D_X|)(D_X - |D_X|))$$

を満たす $\underline{\mathrm{M}}\mathrm{Cor}$ 上の Nisnevich 層である.

筆者はこれを踏まえ, どのようなコホモロジー論が $\underline{\mathrm{M}}\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}$ で表現可能であるかについて, 一般的な十分条件を与えられないかと考えた. そして実際に (特異点解消の仮定のもとで), モジュラス対の圏 $\underline{\mathrm{M}}\mathrm{Cor}$ 上の Abel 群の Nisnevich 層 F に対し, コホモロジー論 $\mathcal{X} \mapsto \mathrm{R}\Gamma(\mathcal{X}, F_{\mathcal{X}})$ が $\underline{\mathrm{M}}\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}$ で表現可能となるための簡明な十分条件を与えることに成功した. これについては次節以降で詳しく解説する. この結果を用いることで, 上述の Kelly-宮崎の結果の短い別証明が得られるほか, (特異点解消の仮定のもとで) Witt ベクトルコホモロジーが $\underline{\mathrm{M}}\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}$ で表現可能であることが証明できる:

定理 2.4 (K. [3])**.** 基礎体 k の標数は $p > 0$ であるとし, k は特異点解消を持つと仮定する. このとき $\underline{\mathrm{M}}\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}$ の対象 $\underline{\mathbf{M}}\mathbf{W}_n$ が存在して

$$\mathrm{map}_{\underline{\mathrm{M}}\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}}(\mathrm{M}(\mathcal{X}), \underline{\mathbf{M}}\mathbf{W}_n) \simeq \mathrm{R}\Gamma(X, (\underline{\mathrm{M}}\mathrm{W}_n)_{\mathcal{X}})$$

が成り立つ. ただし $\underline{\mathrm{M}}\Omega^q$ は対数的滑らかなモジュラス対 $\mathcal{X}$ に対して

$$\underline{\mathrm{M}}\mathrm{W}_n(\mathcal{X}) \simeq \Gamma(X, \mathrm{W}_n\mathcal{O}_X((D_X - |D_X|)/p^{n-1}))$$

を満たす $\underline{\mathrm{M}}\mathrm{Cor}$ 上の Nisnevich 層である.

3 モジュラス対の圏上の Nisnevich 層

本節以降では, $\underline{\mathrm{M}}\mathrm{Cor}$ 上の Nisnevich 層 F に付随するコホモロジー論 $\mathcal{X} \mapsto \mathrm{R}\Gamma(X, F_{\mathcal{X}})$ を考察する. まずは $\underline{\mathrm{M}}\mathrm{Cor}$ 上の Nisnevich 層の例として, 前節に登場した層 $\underline{\mathrm{M}}\Omega^q$ および $\underline{\mathrm{M}}\mathrm{W}_n$ の構成を説明しよう.

これらの層の構成には, 幾何学的 Hensel 離散付値体上のフィルトレーションから $\underline{\mathrm{M}}\mathrm{Cor}$ 上の Nisnevich 層を構成するモチーフ的導手の理論 [6] を用いる. k 上の Hensel 離散付値体 (L, v) が**幾何学的**であるとは, ある $X \in \mathrm{Sm}$ および余次元 1 の点 $x \in X$ が存在して $\mathcal{O}_L \cong \mathcal{O}^h_{X,x}$ となることを指す.

定義 3.1. (L,v) を k 上の幾何学的 Hensel 離散付値体とし, $\pi \in \mathcal{O}_L$ を素元とする. 群 $\Omega^q(L)$ 上のフィルトレーション $\mathrm{Fil}_r\Omega^q(L)$ を

$$\mathrm{Fil}_r\Omega^q(L) = \begin{cases} \Omega^q(\mathcal{O}_L) & (r=0) \\ \dfrac{1}{\pi^{r-1}}\Omega^q(\mathcal{O}_L)(\log) & (r \geq 1) \end{cases}$$

により定める. さらにこれを用いて, $\mathcal{X} \in \underline{\mathrm{M}}\mathrm{Cor}$ に対して群 $\underline{\mathrm{M}}\Omega^q(\mathcal{X})$ を

$$\underline{\mathrm{M}}\Omega^q(\mathcal{X}) = \bigcap_{(L,v,\rho)} \{\omega \in \Omega^q(X^\circ) \mid \rho^*\omega \in \mathrm{Fil}_{v(\widetilde{\rho}^* D_X)}\Omega^q(L)\}$$

により定める. ただし (L,v,ρ) は k 上の幾何学的 Hensel 離散付値体 (L,v) および射 $\rho\colon \mathrm{Spec}L \to X^\circ$ であって射 $\widetilde{\rho}\colon \mathrm{Spec}\mathcal{O}_L \to X$ に延長されるもの全体をわたる.

モチーフ的導手の理論より, $\mathcal{X} \mapsto \underline{\mathrm{M}}\Omega^q(\mathcal{X})$ は $\underline{\mathrm{M}}\mathrm{Cor}$ 上の Nisnevich 層を定めることが従う. これは Kelly-宮崎による定義とは異なるが, 以下の命題によって対数的滑らかなモジュラス対上では一致する.

命題 3.2. 対数的滑らかな $\mathcal{X} \in \underline{\mathrm{M}}\mathrm{Cor}$ に対して以下が成り立つ:

$$\underline{\mathrm{M}}\Omega^q(\mathcal{X}) = \Gamma(X, \Omega^q(\log|D_X|)(D_X - |D_X|)).$$

定義 3.3. (L,v) を k 上の幾何学的 Hensel 離散付値体とし, $\pi \in \mathcal{O}_L$ を素元とする. 群 $\mathrm{W}_n(L)$ 上のフィルトレーション $\mathrm{Fil}_r\mathrm{W}_n(L)$ を

$$\mathrm{Fil}_r\mathrm{W}_n(L) = \begin{cases} \mathrm{W}_n(\mathcal{O}_L) & (r=0) \\ \{a \in \mathrm{W}_n(L) \mid \mathrm{F}^{n-1}(a) \in \dfrac{1}{[\pi^{r-1}]}\mathrm{W}_n(\mathcal{O}_L) & (r \geq 1) \end{cases}$$

により定める (これは Brylinski-加藤フィルトレーションと呼ばれる). さらにこれを用いて, $\mathcal{X} \in \underline{\mathrm{M}}\mathrm{Cor}$ に対して群 $\underline{\mathrm{M}}\mathrm{W}_n(\mathcal{X})$ を

$$\underline{\mathrm{M}}\mathrm{W}_n(\mathcal{X}) = \bigcap_{(L,v,\rho)} \{a \in \mathrm{W}_n(X^\circ) \mid \rho^*\omega \in \mathrm{Fil}_{v(\widetilde{\rho}^* D_X)}\mathrm{W}_n(L)\}$$

により定める. ただし (L,v,ρ) は k 上の幾何学的 Hensel 離散付値体 (L,v) および射 $\rho\colon \mathrm{Spec}L \to X^\circ$ であって射 $\widetilde{\rho}\colon \mathrm{Spec}\mathcal{O}_L \to X$ に延長されるもの全体をわたる.

モチーフ的導手の理論より, $\mathcal{X} \mapsto \underline{\mathrm{M}}\mathrm{W}_n(\mathcal{X})$ は $\underline{\mathrm{M}}\mathrm{Cor}$ 上の Nisnevich 層を定めることが従う. 対数的滑らかなモジュラス対上では, 以下のような簡明な表示がある.

命題 3.4. 対数的滑らかな $\mathcal{X} \in \underline{\mathrm{M}}\mathrm{Cor}$ に対して以下が成り立つ:

$$\underline{\mathrm{M}}\mathrm{W}_n(\mathcal{X}) = \Gamma(X, \mathrm{W}_n\mathcal{O}_X((D_X - |D_X|)/p^{n-1})).$$

ただし $\mathrm{W}_n\mathcal{O}_X(D)$ は田中 [9] により定義された Witt divisorial sheaf を表す.

さて, ここからは上の例のような $\underline{\mathrm{M}}\mathrm{Cor}$ 上の Nisnevich 層に対し, その一般的な性質について述べる.

定義 3.5. F を $\underline{\mathrm{M}}\mathrm{Cor}$ 上の Nisnevich 層とする.

1. F がコホモロジー的キューブ不変性 (CCI) を持つとは, 任意の対数的滑らかな $\mathcal{X} \in \underline{\mathrm{M}}\mathrm{Cor}$ に対し, $\mathrm{pr}_1^*\colon \mathrm{R}\Gamma(X, F_{\mathcal{X}}) \to \mathrm{R}\Gamma(X \times \mathbb{P}^1, F_{\mathcal{X}\otimes\overline{\square}})$ が同型であることを指す.

2. F がコホモロジー的ブローアップ不変性 (CBI) を持つとは, 任意の対数的滑らかな $\mathcal{X} \in \underline{\mathrm{M}}\mathrm{Cor}$ および閉部分スキーム $Z \subset |D_X|$ であって $|D_X|$ と単純正規交叉を持つものに対し, $\pi^*\colon \mathrm{R}\Gamma(X, F_{\mathcal{X}}) \to \mathrm{R}\Gamma(\mathrm{Bl}_Z X, F_{\mathrm{Bl}_Z\mathcal{X}})$ が同型であることを指す. ここで $\pi\colon \mathrm{Bl}_Z X \to X$ は Z に沿ったブローアップであり, $\mathrm{Bl}_Z\mathcal{X} = (\mathrm{Bl}_Z X, \pi^* D_X)$ である.

これらの性質はモジュラス付きモチーフの圏の構成と深く関わっている. 実際, $\underline{\mathrm{M}}\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}$ の構成および $\underline{\mathrm{M}}\mathrm{Cor}$ 上の Nisnevich 層の導来圏における射の表示から, 以下の補題がほとんど即座に従う.

補題 3.6. 基礎体 k が特異点解消を持つと仮定する. F が $\underline{\mathrm{M}}\mathrm{Cor}$ 上の Nisnevich 層であって CCI と CBI を持つならば, $\underline{\mathrm{M}}\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}$ の対象 $\mathbf{F}$ が存在して

$$\mathrm{map}_{\underline{\mathrm{M}}\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}}(\mathrm{M}(\mathcal{X}), \mathbf{F}) \simeq \mathrm{R}\Gamma(X, F_{\mathcal{X}})$$

が成り立つ. すなわち, コホモロジー論 $\mathcal{X} \mapsto \mathrm{R}\Gamma(X, F_{\mathcal{X}})$ は $\underline{\mathrm{M}}\mathrm{DM}^{\mathrm{eff}}$ において表現可能である.

したがって, $\underline{\mathrm{M}}\mathrm{Cor}$ 上の Nisnevich 層 F に対して CCI および CBI を証明することが重要となる. 多くの場合, CCI を証明することは難しくない. 実際, $\underline{\mathrm{M}}\Omega^q$ の場合には命題 3.2 によって $\mathbb{P}^1$ 上の連接層のコホモロジーの計算に帰着され, $\underline{\mathrm{M}}\mathrm{W}_n$ の場合にも n に関する帰納法を用いて $n=1$ の場合に帰着できるので容易である. 一方で, $\underline{\mathrm{M}}\Omega^q$ および $\underline{\mathrm{M}}\mathrm{W}_n$ について **CBI を直接証明するのは幾分大変である**. Kelly-宮崎は $\underline{\mathrm{M}}\Omega^q$ について CBI を具体的な計算により直接示したが, それには微分形式の層の構造を詳しく見る地道な計算が必要だった. 次節ではこの CBI を多くの Nisnevich 層に対して一挙に保証する, 筆者による結果を解説する.

4 ブローアップ不変性

筆者は宮崎弘安氏との共同研究 [4] において, de Rham-Witt 複体のモチーフ的表示を得る目的で, **$\mathbb{Q}$ モジュラス対**という概念を導入した. これは単純に, モジュラス対の定義において D_X として $\mathbb{Q}$ 因子 (Cartier 因子のなす群の $\mathbb{Q}$ への係数拡大の元) を許したものである. 従来のモジュラス対の理論はほぼそのままの形で $\mathbb{Q}$ モジュラス対に一般化される. このようにして得られる $\underline{\mathrm{M}}\mathrm{Cor}$ の拡張を $\underline{\mathrm{M}}\mathrm{Cor}^{\mathbb{Q}}$ で表すことにしよう.
圏 $\underline{\mathrm{M}}\mathrm{Cor}^{\mathbb{Q}}$ 上の Nisnevich 層に対しては, $\underline{\mathrm{M}}\mathrm{Cor}$ 上の層には無かった**左連続性**という性質が重要である.

定義 4.1. $\underline{\mathrm{M}}\mathrm{Cor}^{\mathbb{Q}}$ 上の Nisnevich 層 F が**左連続性**を持つとは, 任意の対数的滑らかなモジュラス対 $\mathcal{X}$ に対し, 自然な写像 $F(\mathcal{X}) \to \mathrm{colim}_{\varepsilon\to 0} F(X, (1-\varepsilon)D_X)$ が同型であることを指す.

例えば前節で定義した層 $\underline{\mathrm{M}}\Omega^q$ および $\underline{\mathrm{M}}\mathrm{W}_n$ は $\underline{\mathrm{M}}\mathrm{Cor}^{\mathbb{Q}}$ 上に自然に拡張でき, それらは左連続性を持つ. 主定理を述べるために層の性質をもう一つ定義しよう.

定義 4.2. $\underline{\mathrm{M}}\mathrm{Cor}^{\mathbb{Q}}$ 上の Nisnevich 層 F が**アファイン消滅性** (AVP) を持つとは, 任意の対数的滑らかなモジュラス対 $\mathcal{X}$ および $\mathbb{A}^1$ 上の任意の有効 $\mathbb{Q}$ 因子 $E_1, \ldots, E_n$ に対して

$$\mathrm{R}^i\mathrm{pr}_{1,*} F_{\mathcal{X}\otimes(\mathbb{A}^1,E_1)\otimes\cdots\otimes(\mathbb{A}^1,E_n)} = 0$$

が成り立つことを指す.

層 $\underline{\mathrm{M}}\Omega^q$ および $\underline{\mathrm{M}}\mathrm{W}_n$ の場合, この性質はアファインスキーム上の準連接層のコホモロジーの消滅から直ちにわかる．一般の Nisnevich 層に対しても, CCI といくつかの緩やかな条件が AVP を導くことが斎藤 [8] の結果からわかるので, これは確認が難しくない条件と言える．筆者は [3] において次の定理を示した．

定理 4.3 (K. [3])**.** $\underline{\mathrm{M}}\mathrm{Cor}^{\mathbb{Q}}$ 上の Nisnevich 層 F が CCI,AVP と左連続性を持つならば, F は CBI を持つ．特に層 $\underline{\mathrm{M}}\Omega^q$ および $\underline{\mathrm{M}}\mathrm{W}_n$ は CBI を持つ．

なお, この定理において $\mathbb{Q}$ 因子への拡張および左連続性の仮定は本質的である．実際, CCI と AVP を持つが CBI を持たない $\underline{\mathrm{M}}\mathrm{Cor}$ 上の Nisnevich 層の例が Rülling-Saito [7] によって構成されている．

以下, この定理の証明の概略を述べる．F を $\underline{\mathrm{M}}\mathrm{Cor}^{\mathbb{Q}}$ 上の Nisnevich 層であって CCI,AVP と左連続性を持つものとしよう．対数的滑らかな $\mathcal{X} \in \underline{\mathrm{M}}\mathrm{Cor}$ および閉部分スキーム $Z \subset |D_X|$ であって $|D_X|$ と単純正規交叉を持つものに対し, $\pi^*\colon \mathrm{R}\Gamma(X, F_{\mathcal{X}}) \to \mathrm{R}\Gamma(\mathrm{Bl}_Z X, F_{\mathrm{Bl}_Z\mathcal{X}})$ が同型であることを示したい．本質的なのは $\mathcal{X} = (\mathbb{A}^2, a\{x=0\} + b\{y=0\})$ $(a, b \geq 0,\ a \neq 0)$ および $Z = \{(0,0)\}$ の場合である．$\mathcal{B} = \mathrm{Bl}_Z\mathcal{X}$ としよう．AVP によって $\mathcal{X}$ 上の F の高次コホモロジーは消滅することが保証されているから

$$\mathrm{H}^i(B, F_{\mathcal{B}}) = 0 \quad (i > 0)$$

を示す必要がある．

考察下の空間 $B = \mathrm{Bl}_{(0,0)}\mathbb{A}^2$ は $\mathbb{P}^1$ 上の直線束 $\mathcal{O}(-1)$ の全空間と同型である．そこで $\mathbb{P}^1$ 上の直線束 $\mathcal{O}(-n)$ の全空間を $H^{(n)}$ で表し, 射影 $H^{(n)} \to \mathbb{P}^1$ を π で表す．$H^{(n)}$ 上の因子 D_0, D_∞, E を次のように定める: D_0 および D_∞ はそれぞれ $0, \infty \in \mathbb{P}^1$ のファイバーであり, E は $\mathcal{O}(-n)$ の零切断の像である．さらに $\mathbb{Q}$ モジュラス対 $\mathcal{H}^{(n)}_{a,b,c}$ を

$$\mathcal{H}^{(n)}_{a,b,c} := (H^{(n)}, aD_0 + bD_\infty + cE)$$

と定めると, $\mathcal{B} \cong \mathcal{H}^{(-1)}_{a,b,a+b}$ と表すことができる．ここで左連続性を使うと, 示したいコホモロジーの消滅は以下の主張に帰着される:

主張 4.4. 任意の正整数 N に対し, $c = a + b - \frac{a+b+1}{N+1}$ と定めると以下が成り立つ:

$$N \cdot \mathcal{H}^i(H^{(-1)}, F_{\mathcal{H}^{(-1)}_{a,b,c}}) = 0 \quad (i > 0).$$

実際, これが示されれば $N \to \infty$ の極限を取ることでコホモロジーの消滅を導くことができる．そこで次のファイバー積の図式を考える:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}^{(-N)}_{Na,Nb,c} \arrow[r, "\theta"] \arrow[d] & \mathcal{H}^{(-1)}_{a,b,c} \arrow[d] \\
\mathbb{P}^1 \arrow[r, "z \mapsto z^N"] & \mathbb{P}^1.
\end{tikzcd}$$

F は $\underline{\mathrm{M}}\mathrm{Cor}^{\mathbb{Q}}$ 上の層なので θ による引き戻しと押し出しが定義される．$\theta_*\theta^* = N \cdot \mathrm{id}$ が成り立つため, 結局

$$\mathcal{H}^i(H^{(-N)}, F_{\mathcal{H}^{(-N)}_{Na,Nb,c}}) = 0 \quad (i > 0)$$

を示すことに帰着される．

ここで $c = a + b - \frac{a+b+1}{N+1}$ であったことを思い出そう．この式から, 正整数 $m, n > 0$ であって

$$m + n = N, \quad mc \leq Na - 1, \quad nc \leq Nb$$

を満たすものが存在することが容易にわかる．このような m, n に対し, 切断 $s^m t^n \colon \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \to \mathcal{O}(N)$ から誘導される射 $\psi \colon \mathcal{O}(-N) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ を考える．ただし s, t は $\mathbb{P}^1$ の斉次座標である．前述の不等式をよく観察することで, この射は $\mathbb{Q}$ モジュラス対の射

$$\mathcal{H}^{(-N)}_{(Na,Nb,c)} \to \mathcal{H}^{(0)}_{(1,0,c)}$$

を誘導することがわかる．この射は高次のコホモロジーに全射を誘導することが証明できるので, 結局

$$\mathcal{H}^i(H^{(0)}, F_{\mathcal{H}^{(0)}_{(1,0,c)}}) = 0 \quad (i > 0)$$

を示すことに帰着される．これは $\mathcal{H}^{(0)}_{(1,0,c)} \cong \overline{\square} \otimes (\mathbb{A}^1, c[0])$ であることと CCI および AVP を合わせれば容易に示される．

参考文献

[1] B. Kahn, H. Miyazaki, S. Saito and T. Yamazaki, Motives with modulus, III: The categories of motives, Ann. K-Theory **7** (2022), no. 1, 119–178.

[2] S. Kelly and H. Miyazaki, Hodge cohomology with a ramification filtration, II, preprint, arXiv:2306.06864.

[3] J. Koizumi, Representability of cohomology theories with ramification filtration, preprint, arXiv:2306.14803.

[4] J. Koizumi and H. Miyazaki, A motivic construction of the de rham-witt complex, preprint, arXiv:2301.05846.

[5] K. Matsumoto, Gysin triangles in the category of motifs with modulus, J. Inst. Math. Jussieu **22** (2023), no. 5, 2131–2154.

[6] K. Rülling and S. Saito, Reciprocity sheaves and their ramification filtrations, J. Inst. Math. Jussieu **22** (2023), no. 1, 71–144.

[7] K. Rülling and S. Saito, Ramification theory for reciprocity sheaves, III, Abbes-Saito formula, preprint, arXiv:2204.10637.

[8] S. Saito, Purity of reciprocity sheaves, Adv. Math. **366** (2020), 107067, 70 pp.

[9] H. Tanaka, Vanishing theorems of kodaira type for witt canonical sheaves, Selecta Math. (N.S.) **28** (2022), no. 1, Paper No. 12, 50 pp.