Square-free レベルの 2 次 Siegel カスプ形式に対する Rankin-Selberg 積分について

久家 聖二 (上智大学)

1 導入

以下, Siegel モジュラー形式はすべて 2 次だと仮定する. Siegel カスプ形式に対するスピノール L 関数についての Andrianov による研究は古典的な結果 ([1],[2]) としてよく知られている. その後, Novodvorski と Piatetski-Shapiro らが [6],[5] にて, Bessel 周期, Bessel 模型の概念を導入し研究を行い, [7] にて, Siegel カスプ形式に対する Rankin-Selberg 型の積分 (Andrianov 積分) を Bessel 周期を用いて表した.

本講演では, Rankin-Selberg 積分を square-free レベルの場合に計算し, Rankin-Selberg 積分の明示式を与える. また, その先の研究として, スピノール L 関数の値のある種の平均に関する漸近的な振る舞いについて, 未完成の部分を含む形だが紹介したいと思う. 具体的には, Siegel カスプ形式の重さを l, レベルを N としたとき,

$$\prod_{p|N}\frac{1}{p+1}\sum_{\varphi\in\mathcal{B}(l,N)}\langle E(s,\omega),R(b_{\mathbb{R}}^{\theta})\varphi\rangle\overline{B^{T_\theta,\omega}(\varphi;b_{\mathbb{R}}^{\theta})}$$

という量を考える. (詳細の説明は後述.) これに対して, ある種の条件付きで, $N\to\infty$ としたときに, old form の寄与を無視できるということについて説明する. 本講演の内容は上智大学の都築正男氏との共同研究に基づいている.

2 Rankin-Selberg 積分

この節では, [7] にて定義された Siegel カスプ形式に対する Rankin-Selberg 積分について紹介する. これは [1] で導入された Andrianov 積分をアデールで定式化したものである.

2.1 記号の定義

まず, 群 G を 2 次の一般斜交群とする. 即ち

$$\mathrm{G}=\mathrm{GSp}_2=\left\{g\in\mathrm{GL}_4 \;\middle|\; {}^tg\left[\begin{smallmatrix}0&\mathbf{1}_2\\-\mathbf{1}_2&0\end{smallmatrix}\right]g=\nu(g)\left[\begin{smallmatrix}0&\mathbf{1}_2\\-\mathbf{1}_2&0\end{smallmatrix}\right]\ (\nu(g)\in\mathrm{GL}_1)\right\}$$

とし, G の Siegel parabolic 部分群を B = MN とする. ここで, M, N は

$$\mathrm{M}=\left\{\mathsf{m}(A,c):=\left[\begin{smallmatrix}A&0\\0&{}^tA^{-1}c\end{smallmatrix}\right]\;\middle|\;A\in\mathrm{GL}_2,c\in\mathrm{GL}_1\right\},$$
$$\mathrm{N}=\left\{\mathsf{n}(X):=\left[\begin{smallmatrix}\mathbf{1}_2&X\\0&\mathbf{1}_2\end{smallmatrix}\right]\;\middle|\;X\in\mathrm{Sym}_2\right\}$$

で定義する．

次に, $E=(\sqrt{D})$ を判別式 $D<0$ の虚二次体とする．E の整数環を $\mathfrak{o}_E$ とし, $\theta\in\mathfrak{o}_E$ を,

$$\theta-\overline{\theta}=-\sqrt{D}$$

を満たすような元とすると, $\{1,\theta\}$ は $\mathfrak{o}_E$ の $\mathbb{Z}$-基底になる．ここで, $\overline{\cdot}$ は $E/\mathbb{Q}$ の非自明な自己同型を表す．$\mathfrak{o}_E\times\mathfrak{o}_E$ 上の $\mathbb{Z}$-シンプレクティック形式 $\rho(\cdot,\cdot):\mathfrak{o}_E\times\mathfrak{o}_E\to\mathbb{Z}$ を

$$\rho(x,y)=\det\left(\frac{1}{\sqrt{D}}\left[\begin{smallmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{smallmatrix}\right]\right),\quad x=\left[\begin{smallmatrix}x_1\\y_2\end{smallmatrix}\right]\in\mathfrak{o}_E^2,\quad y=\left[\begin{smallmatrix}y_1\\y_2\end{smallmatrix}\right]\in\mathfrak{o}_E^2 \tag{2.1}$$

としたとき,

$$v_1^+=\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right],\quad v_2^+=\left[\begin{smallmatrix}\theta\\0\end{smallmatrix}\right],\quad v_1^-=\begin{bmatrix}0\\-\overline{\theta}\end{bmatrix},\quad v_2^-=\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]$$

はシンプレクティック基底になる．すなわち

$$\rho(v_i^+,v_j^-)=\delta_{ij},\ \rho(v_i^+,v_j^+)=\rho(v_i^-,v_j^-)=0\ (1\le i,j\le 2)$$

が成り立つ．

次に, 標数が 2 でない任意の可換環 R に対して, 群 $\mathrm{G}^\#(R)$ を

$$\mathrm{G}^\#(R)=\left\{h\in\mathrm{GL}_2(\mathfrak{o}_E\otimes_{\mathbb{Z}}R)\;\middle|\;\det h\in R^\times\right\}$$

で定義する．このとき, $\rho(\cdot,\cdot)$ を, 自然と $(\mathfrak{o}_E\otimes_{\mathbb{Z}}R)^2$ 上の R-シンプレクティック形式と見たとき, ${}^\forall h\in\mathrm{G}^\#(R)$, ${}^\forall x,y\in(\mathfrak{o}_E\otimes_{\mathbb{Z}}R)^2$ に対して $\rho(hx,hy)=\det h\cdot\rho(x,y)$ が成り立つ．このことから, $\mathrm{G}^\#(R)$ から $\mathrm{G}(R)$ への埋め込み

$$\iota_\theta:\mathrm{G}^\#(R)\to\mathrm{G}(R)$$

が得られる．具体的には, $h\in\mathrm{G}^\#(R)$ に対して, $\iota_\theta(h)$ は

$$[hv_1^+,hv_2^+,hv_1^-,hv_2^-]=[v_1^+,v_2^+,v_1^-,v_2^-]\iota_\theta(h)$$

となる $\iota_\theta(h)\in\mathrm{GL}_4(R)$ として定義される．また, $\mathrm{B}^\#(R)=\iota_\theta^{-1}(\mathrm{B}(R))$ を $\mathrm{G}^\#(R)$ の Borel 部分群とする．具体的に表すと,

$$\mathrm{B}^\#(R)=\left\{\begin{bmatrix}\tau&\beta\\0&a\overline{\tau}^{-1}\end{bmatrix}\;\middle|\;\tau\in(\mathfrak{o}_E\otimes_{\mathbb{Z}}R)^\times,a\in R^\times,\beta\in\mathfrak{o}_E\otimes_{\mathbb{Z}}R\right\}$$

となる．

素数 p に対して, $E_p=E\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p$, $\mathfrak{o}_{E_p}=\mathfrak{o}_E\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_p$, $E_\infty=\mathbb{C}$ とする．零でないイデアル $\mathfrak{n}\subset\mathbb{Z}_p$ に対して,

$$\mathbf{K}_p=\mathrm{G}(\mathbb{Z}_p),\quad \mathbf{K}_0(\mathfrak{n})=\left\{\left[\begin{smallmatrix}A&B\\C&D\end{smallmatrix}\right]\in\mathbf{K}_p\;\middle|\;C\in\mathfrak{n}\mathrm{M}_2(\mathbb{Z}_p)\right\}$$

とおく．また, 零でないイデアル $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{o}_{E_p}$ に対して,

$$\mathbf{K}_p^\#=\mathrm{G}^\#(\mathbb{Z}_p),\quad \mathbf{K}_0^\#(\mathfrak{a})=\left\{\left[\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right]\in\mathbf{K}_p^\#\;\middle|\;c\in\mathfrak{a}\right\}$$

とおく．$\mathbb{A}=\mathbb{A}_{\mathrm{fin}}\times\mathbb{R}$ を $\mathbb{Q}$ のアデール環とする．自然数 N に対して, 開コンパクト群 $\mathbf{K}_0(N)\subset\mathrm{G}(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ を

$$\mathbf{K}_0(N)=\prod_{p<\infty}\mathbf{K}_0(N\mathbb{Z}_p)$$

で定義し, $\mathbf{K}_\infty = \mathrm{G}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}(4)$, $\mathbf{K}_\infty^\# = \mathrm{U}(2) \cap \mathrm{G}^\#(\mathbb{R})$ とおく．また, $\mathbf{K} = \prod_{p \le \infty} \mathbf{K}_p$, $\mathbf{K}^\# = \prod_{p \le \infty} \mathbf{K}_p^\#$ をそれぞれ $\mathrm{G}(\mathbb{A})$, $\mathrm{G}^\#(\mathbb{A})$ の標準的な極大コンパクト部分群としておく.

今後, $\mathrm{G}(\mathbb{A})$ や $\mathrm{G}^\#(\mathbb{A})$ などには "適当な" Haar 測度が定義されているものとする.

埋め込み $I_\theta : (\mathfrak{o}_E \otimes_{\mathbb{Z}} R)^\times \to \mathrm{GL}_2(R)$ を, R-基底 $\{1, \theta\}$ に対する, 正則表現の表現行列として定義する．即ち $\tau \in (\mathfrak{o}_E \otimes_{\mathbb{Z}} R)^\times$ に対して, $I_\theta(\tau)$ は

$$[\tau, \tau\theta] := [1, \theta] I_\theta(\tau)$$

で与えられる．明示的に表すと,

$$I_\theta(a + b\theta) = \left[\begin{smallmatrix} a & -\mathtt{N}b \\ b & a+\mathtt{t}b \end{smallmatrix}\right] \ (a, b \in R, \mathtt{t} = \mathrm{tr}_{E/\mathbb{Q}}(\theta), \mathtt{N} = \mathrm{N}_{E/\mathbb{Q}}(\theta))$$

となる．また, $\beta = b_2 + b_3\theta \in \mathfrak{o}_E \otimes_{\mathbb{Z}} R$ $(b_2, b_3 \in R)$ に対して, $X_\beta \in \mathrm{Sym}_2(R)$ を,

$$X_\beta = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_2 & b_3 \end{bmatrix} \ (b_1 = -\mathtt{t}b_2 - \mathtt{N}b_3)$$

で定義する．これらの記号を用いると,

$$\iota_\theta\left(\left[\begin{smallmatrix} \tau & 0 \\ 0 & a\tau^{-1} \end{smallmatrix}\right]\right) = \mathsf{m}(I_\theta(\tau), a) \ (\tau \in (\mathfrak{o}_E \otimes_{\mathbb{Z}} R)^\times, a \in R^\times),$$
$$\iota_\theta\left(\left[\begin{smallmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]\right) = \mathsf{n}(X_\beta) \ (\beta \in \mathfrak{o}_E \otimes_{\mathbb{Z}} R)$$

と表すことができる.

2.2 Eisenstein 級数

$\mathrm{Cl}(E)$ を E のイデアル類群とする．$s \in \mathbb{C}$, 指標 $\omega : \mathrm{Cl}(E) \cong \mathbb{A}_E / E^\times E_\infty^\times \widehat{\mathfrak{o}}_E^\times \to \mathbb{C}^\times$ に対して, 関数 $f^{(s,\omega)} : \mathrm{G}^\#(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ を岩澤分解 $\mathrm{G}^\#(\mathbb{A}) = \mathrm{B}^\#(\mathbb{A})\mathbf{K}^\#$ により,

$$f^{(s,\omega)}\left(\begin{bmatrix} \tau & \beta \\ 0 & a\tau^{-1} \end{bmatrix} k^\#\right) = \omega(\tau)^{-1} |\mathrm{N}_{E/\mathbb{Q}}(\tau)|_{\mathbb{A}}^{s+1} |a|_{\mathbb{A}}^{-(s+1)} \ \left(\begin{bmatrix} \tau & \beta \\ 0 & a\tau^{-1} \end{bmatrix} \in \mathrm{B}^\#(\mathbb{A}), k^\# \in \mathbf{K}^\#\right)$$

で定義する．$\mathrm{Re}(s) > 1$ に対して, Eisenstein 級数 $E(s, \omega) : \mathrm{G}^\#(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ を

$$E(s, \omega; g^\#) = \sum_{\gamma \in \mathrm{B}(\mathbb{Q}) \backslash \mathrm{G}(\mathbb{Q})} f^{(s\omega)}(\gamma g^\#)$$

で定義する．($f^{(s,\omega)}$ は定義より左 $\mathrm{B}(\mathbb{Q})$ 不変.)

Proposition 1. Eisenstein 級数 $E(s, \omega, g^\#)$ は $\mathrm{Re}(s) > 1$ で広義一様絶対収束し, 次の性質を満たす:

(i) 関数 $s \mapsto E(s, \omega; g^\#)$ は複素平面 $\mathbb{C}$ に有理型解析接続される．特に, Eisenstein 級数の正規化 $E^*(s, \omega; g^\#) := |D|^{\frac{s+1}{2}} \widehat{L}(s+1, \omega^{-1}) E(s, \omega; g^\#)$ を考えると, 関数 $s \mapsto E^*(s, \omega; g^\#)$ は, $\omega = 1$ ならば $s = -1, 1$ で単純極を持ちそれ以外の点では正則, $\omega \ne 1$ ならば整関数になる.

(ii) 次の関数等式が成り立つ.

$$E^*(-s, \omega^{-1}; g^\#) = E^*(s, \omega; g^\#).$$

(iii) $\mathcal{N} \subset \mathbb{C}$ を, 任意の $s \in \mathcal{N}$ で $E(s, \omega; g^\#)$ が正則となるような相対コンパクト開集合とする．また, $\mathcal{U} \subset \mathrm{G}^\#(\mathbb{A})$ をコンパクト部分集合とする．このとき, ある $C, N_0 > 0$ が存在して,

$$|E^*(s, \omega; \left[\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] h)| \le C \cdot a^{N_0}$$

が任意の $s \in \mathcal{N}$, $h \in \mathcal{U}$, $a \in \mathbb{R}_{>1}$ に対して成り立つ.

2.3 Rankin-Selberg 積分

2 次 Siegel 上半空間

$$\mathfrak{h}_2 := \{X + iY \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C}) \mid X, Y \in \mathrm{Sym}_2(\mathbb{R}), Y > 0\}$$

に対して, 群作用 $\mathrm{G}(\mathbb{R})^0 \curvearrowright \mathfrak{h}_2$ を

$$g\langle Z\rangle := (AZ+B)(CZ+D)^{-1} \ \left(g = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right] \in \mathrm{G}(\mathbb{R})^0, Z \in \mathfrak{h}_2\right)$$

で定義し, 保型因子を $J(g, Z) := \nu(g)^{-1}\det(CZ+D)$ で定義する.

非負整数 $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と, 自然数 $N \in \mathbb{N}$ に対して, $S_l(\mathbf{K}_0(N))$ を, 次を満たす smooth な関数 $\varphi : \mathrm{G}(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ 全体の空間とする:

(i) 任意の $z \in \mathrm{Z}(\mathbb{A})$, $\gamma \in \mathrm{G}(\mathbb{Q})$, $g \in \mathrm{G}(\mathbb{A})$ に対して, $\varphi(z\gamma g) = \varphi(g)$.

(ii) 任意の $g \in \mathrm{G}(\mathbb{A})$, $k_{\mathrm{fin}} \in \mathbf{K}_0(N)$, $k_\infty \in \mathbf{K}_\infty^0$ に対して, $\varphi(gk_{\mathrm{fin}}k_\infty) = \tau_l(k_\infty)^{-1}\varphi(g)$. ここで, $\tau_l(k_\infty) := J(k_\infty, i\mathbf{1}_2)^l$.

(iii) 任意の $X \in \mathfrak{p}^-$ に対して, $R(X)\varphi = 0$.

(iv) φ は有界.

これは重さ l, レベル N の 2 次 Siegel カスプ形式のアデールでの定式化であり, $\varphi \in S_l(\mathbf{K}_0(N))$ に対応する古典的な Siegel カスプ形式 F_φ は

$$F_\varphi(Z) = J(g_\infty, i\mathbf{1}_2)^l \varphi(g_\infty) \ (Z \in \mathfrak{h}_2) \tag{2.2}$$

で与えられる. ここで, $g_\infty \in \mathrm{G}(\mathbb{R})$ は, $g_\infty\langle i\mathbf{1}_2\rangle = Z$ を満たすようにとっている.

$\varphi \in S_l(\mathbf{K}_0(N))$ と指標 $\omega : \mathrm{Cl}(E) \to \mathbb{C}^\times$ に対して, 次の積分

$$\langle E(s,\omega), R(b_{\mathbb{R}}^\theta)\varphi\rangle := \int_{\mathrm{Z}^\#(\mathbb{A})\mathrm{G}^\#(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{G}^\#(\mathbb{A})} E(s,\omega; g^\#)\varphi(\iota_\theta(g^\#)b_{\mathbb{R}}^\theta)dg^\#$$

を Rankin-Selberg 積分と呼ぶ. ここで, $b_{\mathbb{R}}^\theta \in \mathrm{G}(\mathbb{R})$ は

$$b_{\mathbb{R}}^\theta := \mathsf{m}(A_\theta, \tfrac{\sqrt{|D|}}{2})^{-1}, \quad A_\theta = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mathfrak{t}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{|D|}}{2} \end{bmatrix}$$

で与えられる. Proposition 1 (iii) より, この積分は Eisenstein 級数が正則な領域上で広義一様絶対収束する. $b_{\mathbb{R}}^\theta$ の作用は, シンプレクティック形式 (2.1) の定義が [7] と異なることから出てくる補正である.

3 Bessel 模型

以下では, 次を仮定する:

(i) N は square-free.

(ii) $p|N$ となる素数 p は $E/\mathbb{Q}$ で惰性的.

ここで, $\Pi_{\mathrm{cusp}}(l,N)$ を次を満たすような $\mathrm{Z}(\mathbb{A})\backslash\mathrm{G}(\mathbb{A})$ の既約カスプ表現 $\pi\cong\otimes'_{p\le\infty}\pi_p$ 全体の集合とする:

(i) $(\mathfrak{g},\mathbf{K}^0_\infty)$-加群として, $\pi_\infty\cong D_l^+\oplus D_l^-$. ただし, D_l^+(resp. D_l^-) は, $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$ の重さ l の正則 (resp. 反正則) 離散系列表現.

(ii) $\pi^{\mathbf{K}_0(N)}\neq\{0\}$.

指標 $\psi:\mathbb{A}/\mathbb{Q}\to\mathbb{C}^1$ を, $\psi(x)=e^{2\pi ix}$ $(x\in\mathbb{R})$ となるようなものとする. 正定値対称行列 $T_\theta:=\begin{bmatrix}\mathtt{1} & \mathtt{t/2}\\ \mathtt{t/2} & \mathtt{N}\end{bmatrix}$ に対して, 指標 $\psi_{T_\theta}=\prod_{p\le\infty}\psi_{T_\theta,p}:\mathrm{N}(\mathbb{A})\to\mathbb{C}^1$ を

$$\psi_{T_\theta}(\mathsf{n}(X))=\psi(\mathrm{tr}(T_\theta X))$$

で与える. また, 指標 $\omega=\prod_{p\le\infty}\omega_p\in\widehat{\mathrm{Cl}(E)}$ を固定しておく.

3.1 Local Bessel 模型

p を素数とする. ある $\mathrm{G}(\mathbb{Q}_p)$ の既約許容表現 π_p が与えられたとき, $(\pi_p^*)^{T_\theta,\omega}$ を

$$\ell\left(\pi_p(\mathsf{m}(I_\theta(\tau),\mathrm{N}_{E/\mathbb{Q}}(\tau))n)\xi\right)=\omega_p(\tau)\psi_{T_\theta,p}(n)\ell(\xi)\ (^\forall\tau\in E_p^\times,{}^\forall n\in\mathrm{N}(\mathbb{Q}_p),{}^\forall\xi\in\pi_p)$$

を満たす $\mathbb{C}$-線形形式 $\ell:\pi_p\to\mathbb{C}$ 全体の空間とする. このとき, uniqueness theorem([6])

$$\dim((\pi_p^*)^{T_\theta,\omega_p})\le 1$$

が成り立つ. $(\pi_p^*)^{T_\theta,\omega}\neq\{0\}$ のとき, π_p は local (T_θ,ω)-Bessel 模型を持つという. さらにこのとき, $\ell\in(\pi_p^*)^{T_\theta,\omega}-\{0\}$ を固定し, π_p に関する (T_θ,ω)-Bessel 模型 $\mathscr{B}(T_\theta,\omega)[\pi_p]$ を

$$\mathscr{B}(T_\theta,\omega)[\pi_p]:=\left\{B:\mathrm{G}(\mathbb{Q}_p)\to\mathbb{C}\ \middle|\ ^\exists\xi\in\pi_p,\ ^\forall g\in\mathrm{G}(\mathbb{Q}_p),B(g)=\ell(\pi_p(p)\xi).\right\}$$

で定義する. これは uniqueness theorem から, ℓ の取り方によらない.

3.2 Bessel 周期

$\varphi\in S_l(\mathbf{K}_0(N))$ に対して,

$$B^{T_\theta,\omega}(\varphi;g):=\int_{\mathbb{A}_E^\times/E^\times\mathbb{A}^\times}\omega(\tau)^{-1}\int_{\mathrm{N}(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{N}(\mathbb{A})}\psi_{T_\theta}(n)^{-1}\varphi\left(\mathsf{m}(I_\theta(\tau),\mathrm{N}_{E/\mathbb{Q}}(\tau))ng\right)dnd^\times\tau$$

$$(g\in\mathrm{G}(\mathbb{A}))$$

を φ の (T_θ,ω)-Bessel 周期という. 既約カスプ表現 $\pi\in\Pi_{\mathrm{cusp}}(l,N)$ に対して, $B^{T_\theta,\omega}(\varphi;g)\neq 0$ となるような $\varphi\in S_l(\mathbf{K}_0(N))\cap\pi$, $g\in\mathrm{G}(\mathbb{A})$ が存在するとき, π は global (T_θ,ω)-Bessel 周期を持つという. このような $\pi\in\Pi_{\mathrm{cusp}}(l,N)$ 全体の集合を $\Pi_{\mathrm{cusp}}^{(T_\theta,\omega)}(l,N)$ と表すことにする. 次に紹介するのは, Rankin-Selberg 積分の基本的な公式である.

Proposition 2 (Piatetski-Shapiro [7])**.** $\mathrm{Re}(s)>1$ のとき, $\varphi\in S_l(\mathbf{K}_0(N))$ に対して,

$$\langle E(s,\omega),R(b_{\mathbb{R}}^\theta)\varphi\rangle=\frac{\sqrt{|D|}}{2}\int_{\mathbb{A}^\times}\int_{\mathbf{K}_{\mathrm{fin}}^\#}|a|_{\mathbb{A}}^{s-1}B^{T_\theta,\omega}(\varphi;\mathsf{m}(a\mathbf{1}_2,a)\iota_\theta(k_{\mathrm{fin}}^\#)b_{\mathbb{R}}^\theta)dk_{\mathrm{fin}}^\#d^\times a \tag{3.1}$$

が成り立つ.

指標 $\omega = \prod_{p \leq \infty} \omega_p \in \widehat{\mathrm{Cl}(E)}$, 既約カスプ表現 $\pi \cong \otimes'_{p \leq \infty} \pi_p \in \Pi_{\mathrm{cusp}}^{(T_\theta,\omega)}(l, N)$ に対して, π_p は local (T_θ, ω)-Bessel 模型を持つ. π_p が $\mathbf{K}_p$-spherical のときは, ([8]) から,

$$^\exists \ell^0_{\pi_p} \in (\pi_p^*)^{T_\theta,\omega}, {}^\exists \xi^0_{\pi_p} \in \pi_p^{\mathbf{K}_p} \ \text{ s.t. } \ (\xi^0_{\pi_p} | \xi^0_{\pi_p})_{\pi_p} = 1, \ \ell^0_{\pi_p}(\xi^0_{\pi_p}) = 1$$

が成り立つ. $\ell^0_{\pi_p}, \xi^0_{\pi_p}$ は, それぞれ $\mathbb{C}^1$ 倍を除いて一意に定まる.

$\{(\ell_p, \xi_p)\}_{p<\infty} \in \prod_{p<0} \left\{(\pi_p^*)^{T_\theta,\omega} \times \pi_p\right\}$ に対して, π_p が $\mathbf{K}_p$-spherical ならば $(\ell_p, \xi_p) = (\ell^0_{\pi_p}, \xi^0_{\pi_p})$ であり, 任意の p の対して $\ell_p(\xi_p) = 1$ が成り立つとき, $\{(\ell_p, \xi_p)\}_{p<\infty}$ を, π の (T_θ, ω)-Bessel data という.

以下, π の (T_θ, ω)-Bessel data$\{(\ell_p, \xi_p)\}_{p<\infty}$ を固定しておく. $\varphi^0_\pi \in \pi$ を, pure tensor $v_l \otimes (\otimes_{p<\infty} \xi_p) \in \otimes'_{p \leq \infty} \pi_p$ に対応する元とする. (v_l は D_l^+ の lowest weight vector.)

Remark 1. Local Bessel 模型を持つ, Iwahori spherical な $\mathrm{G}(\mathbb{Q}_p)$ の既約許容表現の分類が [8, Table 2] で与えられており, $\pi \cong \otimes'_{p \leq \infty} \pi_p \in \Pi_{\mathrm{cusp}}^{(T_\theta,\omega)}(l, N)$ に対して成り立つ事実を一部紹介する:

(i) π_p が $\mathbf{K}_p$-spherical ならば, π_p は type I または type IIb.

(ii) π_p が $\mathbf{K}_p$-spherical でないならば, π_p は type IIIa または type VIb.

Proposition 3. $\pi \in \Pi_{\mathrm{cusp}}^{(T_\theta,\omega)}(l, N)$ とする. このとき, $\varphi = v_l \otimes (\otimes_{p<\infty} \phi_p) \in \pi^{\mathbf{K}_0(N)}$ に対して,

$$B^{T_\theta,\omega}(\varphi; g) = B^{T_\theta,\omega}(\varphi^0_\pi; g_\infty) \prod_{p<\infty} \ell_p(\pi_p(g_p)\phi_p) \ (g = (g_p)_{p \leq \infty} \in \mathrm{G}(\mathbb{A})) \tag{3.2}$$

が成り立つ.

Proof. g_∞ を固定して, 関数

$$\pi_{\mathrm{fin}} \ni \otimes'_{p<\infty} \phi_p \mapsto B^{T_\theta,\omega}(\varphi; g_\infty) \in \mathbb{C} \ (\varphi = v_l \otimes (\otimes_{p<\infty} \phi_p))$$

を考えると, uniqueness theorem から, ある $C(g_\infty) \in \mathbb{C}$ が存在して,

$$B^{T_\theta,\omega}(\varphi; g_\infty) = C(g_\infty) \prod_{p<\infty} \ell_p(\phi_p)$$

が成り立つ. $\phi_p = \xi_p$ とおくと, $C(g_\infty) = B^{T_\theta,\omega}(\varphi^0_\pi; g_\infty)$ が分かる. □

いま, $\pi \in \Pi_{\mathrm{cusp}}^{(T_\theta,\omega)}(l, N)$, $\varphi = v_l \otimes (\otimes_{p<\infty} \phi_p) \in \pi^{\mathbf{K}_0(N)}$ とすると, (3.1), (3.2) より,

$$\langle E(s, \omega), R(b^\theta_{\mathbb{R}})\varphi \rangle = \frac{\sqrt{|D|}}{2} \times Z_\infty(\varphi^0_\pi; s, \omega_\infty) \times \prod_{p<\infty} Z_p(\phi_p; s, \omega_p) \tag{3.3}$$

が得られる. ここで,

$$\begin{aligned} Z_\infty(\varphi^0_\pi; s, \omega_\infty) &= \int_{\mathbb{R}^\times} |a|^{s-1} B^{T_\theta,\omega}(\varphi^0_\pi; \mathsf{m}(a\mathbf{1}_2, a) b^\theta_{\mathbb{R}}) d^\times a, \\ Z_p(\phi_p; s, \omega_p) &= \int_{\mathbb{Q}_p^\times} \int_{\mathbf{K}_p^\#} |a|_p^{s-1} \ell_p(\pi_p(\mathsf{m}(a\mathbf{1}_2, a)\iota_\theta(k^\#))\phi_p) dk^\# d^\times a \end{aligned}$$

は Bessel 模型による局所ゼータ積分である.

4 Bessel 模型による局所ゼータ積分

無限素点の局所ゼータ積分 $Z_\infty(\varphi_\pi^0; s, \omega_\infty)$ の公式を説明するため, Siegel カスプ形式 $\varphi \in S_l(\mathbf{K}_0(N))$, $\omega \in \widehat{\mathrm{Cl}(E)}$ に対して定まる量 $R(\varphi, E, \omega)$ を定義する.

$$\mathcal{Q}^+ := \left\{ \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} > 0 \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{Z} \right\},$$
$$\mathcal{Q}^+_{\mathrm{prim}}(D) := \left\{ \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \in \mathcal{Q}^+ \;\middle|\; b^2 - 4ac = D, \gcd(a, b, c) = 1 \right\}$$

とすると, $\mathcal{Q}^+$ 上には, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ が

$$\mathcal{Q}^+ \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \ni (T, \gamma) \mapsto {}^t\gamma T \gamma \in \mathcal{Q}^+$$

により, 右から作用する. $\mathcal{Q}^+_{\mathrm{prim}}(D)$ はこの作用で安定である. このとき, 虚二次体の類数に関する古典的な結果から, 標準的な全単射

$$\mathcal{Q}^+_{\mathrm{prim}}(D)/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Cl}(E)$$

が存在する.

(2.2) で与えられる F_φ の Fourier 展開

$$F_\varphi(Z) = \sum_{T \in \mathcal{Q}^+} a_\varphi(T) \exp(2\pi i \mathrm{tr}(TZ)) \ (Z \in \mathfrak{h}_2)$$

を考え, $R(\varphi, E, \omega)$ を

$$R(\varphi, E, \omega) := \frac{1}{w_D} \sum_{[T] \in \mathcal{Q}^+_{\mathrm{prim}}(D) \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} a_\varphi(T) \omega([T])$$

で定義する. ここで, w_D は $\mathfrak{o}_E$ の単数群の位数である.

Lemma 4. (i) $\varphi \in S_l(\mathbf{K}_0(N))$, $g_\infty \in \mathrm{G}(\mathbb{R})^0$ に対して,

$$B^{T_\theta, \omega}(\varphi; g_\infty) = B^{T_\theta}_{\infty, l}(g_\infty)\, R(\varphi, E, \omega).$$

ここで, $B^T_{\infty, l}(g_\infty) := J(g_\infty, i1_2)^{-l} \exp(2\pi i \mathrm{tr}(T\, g_\infty \langle i1_2 \rangle))$ である.

(ii) $\mathrm{Re}(s) > -l + 1$ に対して,

$$Z_\infty(\varphi_\pi^0; s, \omega_\infty) = R(\varphi_\pi^0, E, \omega)(-1)^l |D|^{\frac{-s-l+1}{2}} \frac{L(s + \frac{1}{2}, \pi_\infty)}{L(s+1, \omega_\infty)}. \tag{4.1}$$

ただし, $L(s + \frac{1}{2}, \pi_\infty) = \Gamma_{\mathbb{C}}(s + l - \frac{3}{2}) \Gamma_{\mathbb{C}}(s + \frac{1}{2})$, $L(s+1, \omega_\infty) = \Gamma_{\mathbb{C}}(s)$ はそれぞれ, スピノール L 関数 $L(s, \pi) = \prod_{p<\infty} L(s, \pi_p) \quad (\mathrm{Re}(s) > \frac{5}{2})$, Hecke L 関数 $L(s, \omega) = \prod_{p<\infty} L(s, \omega_p) \quad (\mathrm{Re}(s) > 1)$ のガンマ因子. $\mathbf{K}_p$-spherical な π_p に対しては,

$$L(s, \pi_p) = (1 - \alpha_p p^{-s})^{-1} (1 - \beta_p p^{-s})^{-1} (1 - \alpha_p^{-1} p^{-s})^{-1} (1 - \beta_p^{-1} p^{-s})^{-1}$$

になる. (α_p, β_p) は π_p の Satake パラメータ.

有限素点 p での局所ゼータ積分 $Z_p(\phi_p; s, \omega_p)$ は, $\mathbf{K}_p$-spherical な場合は

$$Z_p(\xi_p; s, \omega_p) = \frac{L(s+\frac{1}{2}, \pi_p)}{L(s+1, \omega_p^{-1})}$$

が成り立つことが知られている.

$\mathbf{K}_p$-spherical でない場合も計算する必要があるため, 一般に $B \in \mathscr{B}(T_\theta, \omega_p)[\pi_p]$ に対して,

$$Z_p(B, s) := \int_{\mathbb{Q}_p^\times} \int_{\mathbf{K}_p^\#} B\left(\mathsf{m}(a\mathbf{1}_2, a)\iota_\theta(k^\#)\right) |a|_p^{s-1} dk^\# d^\times a \ (\mathrm{Re}(s) > 1)$$

とおく. 作用素 $\eta_p, T_p \in \mathrm{End}(\mathscr{B}(T_\theta, \omega_p)[\pi_p])$ を

$$[\eta_p B](g) := B(g\eta_p) \ \left(\eta_p = \begin{bmatrix} & & & -1 \\ & & 1 & \\ & p & & \\ -p & & & \end{bmatrix} : \text{Atkin-Lehner element}\right),$$

$$[T_p B](g) := \frac{1}{p^2+1} \int_{\mathbf{K}_0(p\mathbb{Z}_p)\left[\begin{smallmatrix} p\mathbf{1}_2 & \\ & \mathbf{1}_2 \end{smallmatrix}\right]\mathbf{K}_0(p\mathbb{Z}_p)} B(gh) dh$$

で定義する. このとき, $\mathscr{B}(T_\theta, \omega_p)[\pi_p]^{\mathbf{K}_0(p\mathbb{Z}_p)}$ はこれらの作用で安定である.

Theorem 5 (K. Tsuzuki)**.** $\pi \cong \otimes'_{p \le \infty} \pi_p \in \Pi_{\mathrm{cusp}}^{(T_\theta, \omega)}(\ell, N)$ とする. $p | N$ のとき, $B \in \mathscr{B}(T_\theta, \omega_p)[\pi_p]^{\mathbf{K}_0(p\mathbb{Z}_p)}$ に対して,

(i) $\pi_p^{\mathbf{K}_p} = \{0\}$ のとき

$$Z_p(B, s) = \frac{p^{s+1}}{p^2+1} \cdot \frac{L(s+\frac{1}{2}, \pi_p)}{\zeta_{E_p}(s+1)} \cdot [\eta_p B](\mathbf{1}_4).$$

(ii) $\pi_p^{\mathbf{K}_p} \neq \{0\}$ のとき

$$\begin{aligned} Z_p(B, s) = \frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{L(s+\frac{1}{2}, \pi_p)}{\zeta_{E_p}(s+1)} \\ \times \left\{B + p^{-1}T_p\eta_p B + p^{s+1}(1 - \Lambda(\pi_p)p^{-s} + p^{-2s})\eta_p B\right\}(\mathbf{1}_4). \end{aligned}$$

ただし, $\Lambda(\pi_p) = p^{-\frac{1}{2}}(\alpha_p + \beta_p + \alpha_p^{-1} + \beta_p^{-1})$, (α_p, β_p) は π_p の Satake パラメータ.

Remark 2. 素数 p が $E/\mathbb{Q}$ で惰性的ならば, $\omega_p = \mathbf{1}$ が成り立つので, $L(s, \omega_p) = \zeta_{E_p}(s)$ となる.

Outline of proof of Theorem 5. $\mathbf{K}_p^\#$ の $\mathbf{K}_0^\#(p\mathfrak{o}_{E_p})$ による左 coset 分解

$$\mathbf{K}_p^\# = \mathbf{K}_0^\#(p\mathfrak{o}_{E_p}) \sqcup \left(\sqcup_{\beta \in \mathfrak{o}_{E_p}/p\mathfrak{o}_{E_p}} \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] \mathbf{K}_0^\#(p\mathfrak{o}_{E_p})\right)$$

より, $B \in \mathscr{B}(T_\theta, \omega_p)[\pi_p]^{\mathbf{K}_0(p\mathbb{Z}_p)}$ に対して,

$$Z_p(B, s) = \tfrac{1}{p^2+1} \int_{\mathbb{Q}_p^\times} \left\{B(\mathsf{m}(a\mathbf{1}_2, a)) + p^2 \cdot B(\mathsf{m}(a\mathbf{1}_2, a)\iota_\theta(\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]))\right\} |a|_p^{s-1} d^\times a. \tag{4.2}$$

$\iota_\theta([\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}]) = \left[\begin{smallmatrix}0&0&-\mathtt{t}&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&\mathtt{t}&0&0\end{smallmatrix}\right]$ = より, $\mathsf{m}(a\mathbf{1}_2,a)\iota_\theta([\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}]) = p^{-1}\mathsf{m}(ap\mathbf{1}_2,ap)\eta_p\left[\begin{smallmatrix}-1&-\mathtt{t}&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&\mathtt{t}&-1\end{smallmatrix}\right]$ なので, (4.2) に代入すると,

$$\begin{aligned}
Z_p(B,s) &= \tfrac{1}{p^2+1}\int_{\mathbb{Q}_p^\times}\left\{B(\mathsf{m}(a\mathbf{1}_2,a)) + p^2\cdot[\eta_pB](\mathsf{m}(ap\mathbf{1}_2,ap))\right\}|a|_p^{s-1}d^\times a \\
&= \tfrac{1}{p^2+1}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left\{B(\mathsf{m}(p^n\mathbf{1}_2,p^n)) + p^{s+1}\cdot[\eta_pB](\mathsf{m}(p^n\mathbf{1}_2,p^n))\right\}p^{-n(s-1)} \\
&= \tfrac{1}{p^2+1}\sum_{n\geq 0}\left\{B(\mathsf{m}(p^n\mathbf{1}_2,p^n)) + p^{s+1}\cdot[\eta_pB](\mathsf{m}(p^n\mathbf{1}_2,p^n))\right\}p^{-n(s-1)}. \qquad (4.3) \\
&(\because n<0 \Longrightarrow B(\mathsf{m}(p^n\mathbf{1}_2,p^n)) = 0 \text{ (cf. [8, Lemma 4.4(i)]).)}
\end{aligned}$$

(i) Remark 1 (ii) より, π_p は type IIIa または type VIb であり, $\dim\pi^{\mathbf{K}_0(p\mathbb{Z}_p)}$ はそれぞれ 2,1 になる. type VIb の場合は容易なので, type IIIb の場合のみを考える.

このとき, T_p の eigenbasis $B_i \in \mathscr{B}(T_\theta,\omega_p)[\pi_p]^{\mathbf{K}_0(p\mathbb{Z}_p)}$ $(i=1,2)$ が存在する ([8, §9]). また, [8, Lemma 9.2] より, $B_1(\mathbf{1}_4)=1$ としてよい. このとき, [8] の Bessel 模型の値に関する漸化式を組み合わせることによって $B_2(\mathbf{1}_4)=\gamma^2$ となることが分かる. (γ は π から定まるパラメータ ([8, Table 4] を参照)) ([8, Lemma 5.1] より, $B=B_i$ に対して (4.3) は等比級数になるので, [9, Table 5]) により, $Z(B,s)$ が定まる.

(ii) Remark 1 (i) より, π_p は type I または type IIb であり, $\dim\pi^{\mathbf{K}_0(p\mathbb{Z}_p)}$ はそれぞれ 4,3 になる. ここでは type I の場合を考えることにする.

$\{B_i\}_{1\leq i\leq 4}$ を T_p に関する eigenbasis とする. また, $T_pB_i=\lambda_iB_i$, $\eta_pB_i=\sum_{j=1}^4\eta_p^{ji}B_j$ とおくことにすると, [8, Lemma 5.1] より, $B_i(\mathsf{m}(p^{n+1}\mathbf{1}_2,p^{n+1})) = p^{-3}\lambda_iB_i(\mathsf{m}(p^n\mathbf{1}_2,p^n))$ が成り立つので, $B=B_i$ に対して (4.3) を計算すると,

$$\begin{aligned}
&Z(s,B_i) \\
&= \frac{1}{p^2+1}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{B_i\left(\begin{bmatrix}p^n\mathbf{1}_2 & \\ & \mathbf{1}_2\end{bmatrix}\right) + \frac{p^2}{X}\cdot\eta_pB_i\left(\begin{bmatrix}p^n\mathbf{1}_2 & \\ & \mathbf{1}_2\end{bmatrix}\right)\right\}X^n \ (X=p^{-s+1}) \\
&= \frac{1}{p^2+1}\left\{\frac{B_i(\mathbf{1}_4)}{1-\lambda_iq^{-3}X} + \frac{p^2}{X}\cdot\sum_{j=1}^4\frac{\eta_p^{ji}B_j(\mathbf{1}_4)}{1-\lambda_jq^{-3}X}\right\} \\
&= \frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{1}{XQ(X)}\left(A_0+A_1X+A_2X^2+A_3X^3+A_4X^4\right)\ \left(Q(X)=\prod_{i=1}^4\frac{1}{1-\lambda_iq^{-3}X}\right).
\end{aligned}$$

ここで, A_0, A_1 を具体的に求めると,

$$\begin{aligned}
A_0 &= p^2\sum_{j=1}^4\eta_p^{ji}B_j(\mathbf{1}_4) = p^2\eta_pB_i(\mathbf{1}_4), \\
A_1 &= B_i(\mathbf{1}_4) + p^2\sum_{j=1}^4\eta_p^{ji}\left(p^{-3}\lambda_j - p^{-3}\sum_{i=1}^4\lambda_i\right)\cdot B_j(\mathbf{1}_4) \\
&= \left\{B_i + p^{-1}T_p\eta_pB_i - p\Lambda(\pi_p)\eta_pB_i\right\}(\mathbf{1}_4). \\
&\left(\because \{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4\} = \left\{p^{\frac{3}{2}}\alpha_p, p^{\frac{3}{2}}\beta_p, p^{\frac{3}{2}}\alpha_p^{-1}, p^{\frac{3}{2}}\beta_p^{-1}\right\}.\right)
\end{aligned}$$

$\frac{1}{Q(X)} = L(s+\frac{1}{2},\pi_p)$ より, 両辺に $\frac{\zeta_{E_p}(s+1)}{L(s+\frac{1}{2},\pi)}$ を掛けると,

$$\frac{\zeta_{E_p}(s+1)}{L(s+\frac{1}{2},\pi_p)}Z(s,B_i) = \frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{A_0+A_1X+A_2X^2+A_3X^3+A_4X^4}{(1-p^{-4}X^2)X}. \tag{4.4}$$

Local functional equation([7, Proposition 3.2]) より, 式 (4.4) は変換 $X \leftrightarrow p^2X^{-1}$ で不変であり, 係数を比較すると,

$$A_2 = p^{-4}(p^2-1)A_0, A_3 = -p^{-4}A_1, A_4 = -p^{-6}A_0.$$

(4.4) に代入して,

$$\begin{aligned}\frac{\zeta_{E_p}(s+1)}{L(s+\frac{1}{2},\pi_p)}Z(s,B_i) &= \frac{1}{p^2+1}\cdot X^{-1}(A_0+A_1X+p^{-2}A_0X^2)\\ &= \frac{1}{p^2+1}\left\{B_i+p^{-1}T_p(\eta_pB_i)+p^{s+1}\left(1-\Lambda(\pi_p)p^{-s}+p^{-2s}\right)\eta_pB_i\right\}(\mathbf{1}_4).\end{aligned}$$

よって (ii) が従う. □

5 Rankin-Selberg 積分の明示公式

本講演の主結果である Rankin-Selberg 積分の明示公式は, Lemma 4 と Theorem 5 より従う.

Theorem 6 (K. Tsuzuki)**.** $\pi \in \Pi_{\mathrm{cusp}}^{(T_\theta,\omega)}(l,N)$, $\varphi = v_l \otimes (\otimes_{p<\infty}\phi_p)$ は

$$p|N \Longrightarrow R(\eta_p)\varphi = \sigma_p\varphi \ (\sigma_p \in \{\pm1\})$$

を満たすとする. また, π の conductor を N_π, $\sigma_\pi = \prod_{p|N_\pi}\sigma_p$ とする. このとき,

$$\begin{aligned}\langle E(s,\omega), R(b_{\mathbb{R}}^\theta)\varphi\rangle &= 2^{-1}(-1)^l|D|^{\frac{-s-l+2}{2}}N_\pi^{s+1}\sigma_\pi\prod_{p|N_\pi}(p^2+1)^{-1}\\ &\quad\times R(\varphi_\pi^0,E,\omega)\frac{\widehat{L}(s+\frac{1}{2},\pi)}{\widehat{L}(s+1,\omega)}\prod_{p|N_\pi}\ell_p(\phi_p)\prod_{p|\frac{N}{N_\pi}}Z_p^*(\varphi_p;s,\omega_p).\end{aligned}$$

ただし, $Z_p^*(\varphi_p;s,\omega_p) := \frac{L(s+1,\omega_p)}{L(s+\frac{1}{2},\pi_p)}Z_p(\varphi_p;s,\omega_p)$ である. 特に φ が newform のとき,

$$\langle E(s,\omega), R(b_{\mathbb{R}}^\theta)\varphi\rangle = 2^{-1}(-1)^l|D|^{\frac{-s-l+2}{2}}N^{s+1}\sigma_\pi\left[\prod_{p|N}(p^2+1)^{-1}\right]R(\varphi,E,\omega)\frac{\widehat{L}(s+\frac{1}{2},\pi)}{\widehat{L}(s+1,\omega)}.$$

最後に, この公式を用いた今後の研究について紹介する. スピノール L 関数の中心値の「ある種」の平均の, 重さ $l\to\infty$ に関する漸近公式が [10] で証明されており, その論文で行われている跡公式を用いた考察により,

$$\mathbb{I}^{(s)}(l,N) := \left[\prod_{p|N}(p+1)^{-1}\right]\sum_{\varphi\in\mathcal{B}(l,N)}\left\langle E^*(s,\omega),R(b_{\mathbb{R}}^\theta)\varphi\right\rangle\overline{B^{T_\theta,\omega}(\varphi;b_{\mathbb{R}}^\theta)}$$

という値を考える．ここで, $\mathcal{B}(l,N)$ は $S_l(\mathbf{K}_0(N))$ の正規直交基底である．Proposition 2 より,

$$\mathbb{I}^{(s)}(l,N)=\left[\prod_{p|N}(p+1)^{-1}\right]\sum_{\pi\in\Pi_{\mathrm{cusp}}^{(T_\theta,\omega)}(l,N)}\left\{\sum_{\varphi\in\mathcal{B}_\pi(l,N)}\left\langle E^*(s,\omega),R(b_{\mathbb{R}}^{\theta})\varphi\right\rangle\overline{B^{T_\theta,\omega}(\varphi;b_{\mathbb{R}}^{\theta})}\right\}$$

となる．ただし, $\mathcal{B}_\pi(l,N)$ は $S_l(\mathbf{K}_0(N))\cap\pi$ の正規直交基底．$\varphi=v_l\otimes(\otimes_{p<\infty})\phi_p\in\pi$ が与えられたとき, 内積 $(\varphi|\varphi)_{L^2}$ は,

$$(\varphi|\varphi)_{L^2}=(\varphi_\pi^0|\varphi_\pi^0)_{L^2}^{-\frac{1}{2}}\times\prod_{p<\infty}(\phi_p|\phi_p)_{\pi_p}$$

で与えられる．よって, $\mathcal{B}_\pi(l,N)$ を

$$\left\{\varphi=(\varphi_\pi^0|\varphi_\pi^0)_{L^2}^{-\frac{1}{2}}\times v_l\otimes(\otimes_{p<\infty})\phi_p\;\middle|\;\phi_p\in\mathcal{B}_{\pi_p}(\mathbf{K}_0(N)):\pi^{\mathbf{K}_0(N\mathbb{Z}_p)}\text{の正規直交基底}\right\}$$

で与えることにする．$B_{\infty,l}^{T_\theta}(b_{\mathbb{R}}^{\theta})=(-1)^le^{-2\pi\sqrt{|D|}}$ が成り立つので, (3.3), (4.1) より,

$$\begin{aligned}\mathbb{I}^{(s)}(l,N)=&\frac{2^{-1}|D|^{\frac{3-l}{2}}e^{-2\pi\sqrt{|D|}}}{\Pi_{p|N}(p+1)}\\&\times\sum_{\pi\in\Pi_{\mathrm{cusp}}^{(T_\theta,\omega)}(l,N)}\frac{|R(\varphi_\pi^0,E,\omega)|^2}{(\varphi_\pi^0|\varphi_\pi^0)_{L^2}}\widehat{L}(s+\tfrac{1}{2},\pi)\prod_{p|N}\mathbb{I}_{\pi_p}^{(s)}(\ell_p,\mathbf{K}_0(N\mathbb{Z}_p)).\end{aligned}\tag{5.1}$$

ここで, $\mathbb{I}_{\pi_p}^{(s)}(\ell_p,\mathbf{K}_0(N\mathbb{Z}_p))=\sum_{\phi_p\in\mathcal{B}_{\pi_p}(\mathbf{K}_0(N\mathbb{Z}_p))}Z_p^*(\varphi_p;s,\omega)\overline{\ell_p(\varphi_p)}$ である．証明は省略するが, $p|N_\pi$ のとき,

$$\mathbb{I}_{\pi_p}^{(s)}(\ell_p,\mathbf{K}_0(N\mathbb{Z}_p))=\begin{cases}p^{-1}\mathrm{tr}(T_p|_{\pi^{\mathbf{K}_0(p\mathbb{Z}_p)}}) & (\pi_p:\text{type IIIa})\\ \sigma_p & (\pi_p:\text{type VIb})\end{cases}$$

が成り立つ．さて, (5.1) の $N\to\infty$ での漸近的な振る舞いについて紹介する．まず, disjoint union

$$\Pi_{\mathrm{cusp}}^{(T_\theta,\omega)}(l,N)=\Pi_{\mathrm{cusp}}^{(T_\theta,\omega)}(l,N)^{\mathrm{new,T}}\sqcup\Pi_{\mathrm{cusp}}^{(T_\theta,\omega)}(l,N)^{\mathrm{new,SK}}\sqcup\Pi_{\mathrm{cusp}}^{(T_\theta,\omega)}(l,N)^{\mathrm{old}}$$

を考える．ここで, 3 つの部分集合はそれぞれ

- $\Pi_{\mathrm{cusp}}^{(T_\theta,\omega)}(l,N)^{\mathrm{old}}$: old form 全体
- $\Pi_{\mathrm{cusp}}^{(T_\theta,\omega)}(l,N)^{\mathrm{new,SK}}$: newform かつ, 楕円カスプ形式の Saito-Kurokawa リフトで構成されるもの全体
- $\Pi_{\mathrm{cusp}}^{(T_\theta,\omega)}(l,N)^{\mathrm{new,T}}:=\Pi_{\mathrm{cusp}}^{(T_\theta,\omega)}(l,N)-\{\Pi_{\mathrm{cusp}}^{(T_\theta,\omega)}(l,N)^{\mathrm{new,SK}}\cup\Pi_{\mathrm{cusp}}^{(T_\theta,\omega)}(l,N)^{\mathrm{old}}\}$

で定義している．これにより, 和 (5.1) を

$$\mathbb{I}^{(s)}(l,N)=\mathbb{I}^{(s)}(l,N)^{\mathrm{new,T}}+\mathbb{I}^{(s)}(l,N)^{\mathrm{new,SK}}+\mathbb{I}^{(s)}(l,N)^{\mathrm{old}}$$

と分解することにする．

Proposition 7 (K. Tsuzuki)**.** $N = q$ は $E/\mathbb{Q}$ で惰性的な素数, $-\frac{1}{2} < \mathrm{Re}(s) < \frac{1}{2}$ とする, $q \to \infty$ のとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\mathbb{I}^{(s)}(l,q)^{\mathrm{old}} = O(q^{\mathrm{Re}(s)-\frac{1}{2}}),$$
$$\mathbb{I}^{(s)}(l,q)^{\mathrm{new,SK}} = O(q^{-\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\mathrm{Re}(s)+\varepsilon})$$

が成り立つ.

Outline of proof. 前者については, Theorem 5 (ii) の局所ゼータ積分の公式と, 各 $\phi_p \in \mathcal{B}_{\pi_p}(\mathbf{K}_0(N))$ に対して, $\ell_p(\phi_p)$ を求めることにより得られる (計算はやや複雑).

後者について説明する. まず, [3, Theorem 3.11] より,

$$\frac{|R(\varphi_\pi^0, E, \mathbf{1})|^2}{\langle \varphi_\pi^0, \varphi_\pi^0 \rangle_{L^2}} \widehat{L}(s+\tfrac{1}{2}, \pi) \ll \frac{L(\frac{1}{2}, \pi_0 \otimes \chi_D) L(s+\frac{1}{2}, \pi_0)}{L(\frac{3}{2}, \pi_0) L(1, \pi_0, \mathrm{Ad})}$$

が成り立つ. ただし, π_0 は Saito-Kurokawa リフトにより π に対応するような $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A})$ の既約カスプ表現である. あとは convex bound

$$L(s+\tfrac{1}{2}, \pi_0) \ll q^{\frac{1-\mathrm{Re}(s)}{2}+\varepsilon} \quad (q \to \infty)$$

及び, [4] から従う評価

$$L(1, \pi_0, \mathrm{Ad})^{-1} \ll \log(3+q) \quad (q \to \infty)$$

を用いて示される. □

主要項 $\mathbb{I}^{(s)}(l,q)^{\mathrm{new,T}}$ の振る舞いについて調べるため, 幾何サイドを計算することが今後の課題となる.

6 謝辞

この度, 立命館アジア太平洋大学にて行われました第 15 回福岡数論研究集会にて, 講演の機会を与えてくださった主催者の金子昌信氏 (九州大学), 権寧魯氏 (九州大学), 岸康弘氏 (愛知教育大学), 高妻倫太郎氏 (立命館アジア太平洋大学), 松坂俊輝氏 (九州大学) に深く感謝いたします.

参考文献

[1] A. N. Andrianov, Dirichlet series with Euler products in the theory of Siegel modular forms of genus 2, Trudy Mat. Inst. Steklov. **112** (1971), 73–94.

[2] A. N. Andrianov, Euler products that correspond to Siegel's modular forms of genus 2, Uspekhi Mat. Nauk, **29** no. 3 (1974), 43–110. .

[3] M. Dickson, A. Pitale, A. Saha and R. Schmidt, Explicit refinements of Böchere's conjecture for Siegel modular forms of square-free level, preprint, arXiv:1512.07204v6.

[4] J. Hoffstein and P. Lockhart, Coefficients of Maass forms and the Siegel zero, Ann. of Math. (2) **140** (1994), no. 1, 161–181.

[5] M. Novodvorski, Uniqueness theorems for generalized Bessel models, Mat. Sb. (N.S.) **90(132)** (1973), 275–287.

[6] M. Novodvorski and I. Piatetski-Sapiro, Generalized Bessel models for symplectic group of rank 2, Mat. Sb. (N.S.) **90(132)** (1973), 246–256.

[7] I.I. Piatetski-Shapiro, L-functions for GSp_4, Pacific J. Math., Special Issue (1997), 259–275.

[8] A. Pitale and R. Schmidt, Bessel models for GSp(4): Siegel vectors of square-free level, J. Number Theory **136** (2014), 134–164.

[9] R. Schmidt and L. Tran, Zeta integrals for GSP(4) via Bessel models, Pacific J. Math. **296** (2018), no. 2, 437–480.

[10] M. Tsuzuki, Weighted equidistribution theorem for Siegel modular forms of degree 2, preprint, arXiv:2103.07835.