Determination of normalized extremal quasimodular forms of depth 1 with integral Fourier coefficients

中屋 智瑛 (九州大学)

1　導入

本稿では第 15 回福岡数論研究集会における筆者の講演に基づき, $\Gamma := SL_2(\mathbb{Z})$ に関する深さ 1 の normalized extremal quasimodular form のうち Fourier 係数が整数であるものを全て決定する方法を紹介する. 幾つかの関連する話題や証明の詳細は講演時間/紙幅の都合上省略せざるを得なかったため, 興味のある方は [10] を参照されたい.

本稿で扱う Γ に関する重さ w の準モジュラー形式 (quasimodular form, qmf) は, 以下で与えられる (より一般的な定義は [19, §5.3] を参照):

$$\sum_{\substack{2\ell+4m+6n=w\\ \ell,m,n\geq 0}} C_{\ell,m,n}E_2^{\ell}E_4^{m}E_6^{n} \in QM_*(\Gamma) := \mathbb{C}[E_2, E_4, E_6].$$

ここで $E_k = E_k(\tau)$ は Γ に関する重さ k の Eisenstein 級数

$$E_k(\tau) = 1 - \frac{2k}{B_k}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{k-1}(n)q^n \ (q = e^{2\pi i\tau}), \quad \sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$$

であり, $\tau \in \mathfrak{H}$ (上半平面), B_k は k 番目の Bernoulli 数である. Γ に関する重さ k のモジュラー形式/カスプ形式がなす $\mathbb{C}$ ベクトル空間をそれぞれ M_k, S_k と表す. よく知られているように偶数 $k \geq 4$ に対して $E_k \in M_k$ となるが, E_2 はモジュラー形式ではなく, 変換則

$$E_2\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^2E_2(\tau) + \frac{6}{\pi i}c(c\tau+d) \quad \left(\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in \Gamma\right)$$

を満たす. Γ に関する重さ w の任意の準モジュラー形式 f は, モジュラー形式を係数とする E_2 変数の多項式として, 以下の形に一意的に表すことができる:

$$f = f_0 + f_1E_2 + \cdots + f_rE_2^r, \quad f_\ell \in M_{w-2\ell}\ (0 \leq \ell \leq r), \quad f_r \neq 0.$$

ここで $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ であり, この r を f の深さ (depth) と呼ぶ. なお $w < 0$ ならば $M_w = \{0\}$ であるため深さには $r \leq w/2$ という制限があること, また, $M_2 = \{0\}$ より重さ w 深さ $w/2-1$ の準モジュラー形式は存在しないことに注意する.

Γ に関する重さ w, 深さ r 以下の準モジュラー形式全体のなす $\mathbb{C}$ ベクトル空間を $QM_w^{(r)} = QM_w^{(r)}(\Gamma)$ と表す. 特に $QM_w^{(0)} = M_w$ である. $\dim_{\mathbb{C}} QM_w^{(r)} = \sum_{\ell=0}^{r}\dim_{\mathbb{C}} M_{w-2\ell}$ より

$$\sum_{k=0}^{\infty}\dim_{\mathbb{C}} QM_{2k}^{(r)}\,T^{2k} = \frac{\sum_{\ell=0}^{r}T^{2\ell}}{(1-T^4)(1-T^6)} = \frac{1-T^{2(r+1)}}{(1-T^2)(1-T^4)(1-T^6)} \quad (r \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ |T| < 1)$$

である (次元の明示公式は [3, Prop. 2.1] を参照). 表題にある extremal quasimodular form (ex-qmf) の定義は Kaneko–Koike [7] において初めて与えられた:

定義 1.1. $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n \in QM_w^{(r)} \backslash QM_w^{(r-1)}$ とし, $m = \dim_{\mathbb{C}} QM_w^{(r)}$ とおく. このとき f が extremal であるとは, $\mathrm{ord}_{q=0}(f) = m-1$ が成り立つことをいう. さらに $a_{m-1} = 1$ であるとき, f を normalized extremal quasimodular form (nex-qmf) と呼ぶ.

以下, Γ に関する重さ w 深さ r の nex-qmf を (存在するならば) $G_w^{(r)}$ と表す. 深さが 1 以上 4 以下の場合 $G_w^{(r)}$ は一意的に存在することが示せる ([12, Thm. 2.3] を用いる). しかし深さが 5 以上の場合 $G_w^{(r)}$ の存在性と一意性は一般には分かっていない.

例 1.2 (重さと深さが小さい nex-qmf の例)**.**

$$
\begin{aligned}
G_2^{(1)} &= E_2 = 1 - 24q - 72q^2 - 96q^3 - \cdots, \\
G_4^{(2)} &= \frac{E_4 - E_2^2}{288} = q + 6q^2 + 12q^3 + 28q^4 + \cdots, \\
G_6^{(1)} &= \frac{E_2E_4 - E_6}{720} = q + 18q^2 + 84q^3 + 292q^4 + \cdots, \\
G_6^{(3)} &= \frac{5E_2^3 - 3E_2E_4 - 2E_6}{51840} = q^2 + 8q^3 + 30q^4 + 80q^5 + \cdots.
\end{aligned}
$$

上記の例は全て $\mathbb{Z}[\![q]\!]$ に属するが, 一般には $G_w^{(r)} \in \mathbb{Q}[\![q]\!]$ であることに注意する.

近年の (nex-)qmf に関する研究を幾つか紹介する.

- Feigenbaum–Grabner–Hardin [2]: 球充填問題に関連して, Γ に関する深さ 2 の qmf が現れる (see Prop. 5.1 and 5.3). 論文では触れられていないが, 実はそれらの qmf は超幾何級数表示を持つ.
- Mono [9]: $\ell \geq 0$ に対して $G_{6\ell+2}^{(1)} \in \mathbb{Z}[\frac{1}{p} : p < 6\ell + 2][\![q]\!]$ および $G_{6\ell+4}^{(1)} \in \mathbb{Z}[\frac{1}{p} : p < 6\ell][\![q]\!]$ が成り立つことを示した.
- Grabner [3]: $G_w^{(r)}$ $(1 \leq r \leq 4)$ が満たす漸化式を導出し, 任意の偶数 $w \geq 2$ および $1 \leq r \leq 4$ に対して $G_w^{(r)} \in \mathbb{Z}[\frac{1}{p} : p < w][\![q]\!]$ となることを示した.
- Grabner [4]: 深さ $1 \leq r \leq 4$ に対して $G_w^{(r)}$ の Fourier 係数の漸近挙動を導出. 任意の偶数 $w \geq 4$ と深さ $1 \leq r \leq 4$ に対し, $G_w^{(r)}$ の Fourier 係数は初めの有限個 (個数は計算可能) の例外を除けば全て正となることを示した. 計算機を用いて有限個の項をチェックし, $4 \leq w \leq 200$ かつ $1 \leq r \leq 4$ に対して $G_w^{(r)} \in \mathbb{Q}_{>0}[\![q]\!]$ となることを示した. (♠)

定理 1.3 (Kaminaka, Kato [5])**.** $\mathcal{E}_r := \{w \mid G_w^{(r)} \in \mathbb{Z}[\![q]\!]\}$ とする. このとき以下が成り立つ:

$$
\mathcal{E}_1 \subset \left\{ \begin{matrix} 2, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 28, \\ 30, 32, 34, 38, 54, 58, 68, 80, 114, 118 \end{matrix} \right\}, \quad \mathcal{E}_2 = \{4, 8\}, \quad \mathcal{E}_3 = \{6\}, \quad \mathcal{E}_4 = \emptyset.
$$

定理 1.3 の証明は, Grabner [3] によって導かれた深さ 1 以上 4 以下の nex-qmf が満たす漸化式に基づき, それらの Fourier 係数の初めの何項かを重さ w の有理関数として表し, それが整数になるとして w の候補を絞り込むことでなされる. 深さ 2 と 3 の場合はその候補に対して実際に $G_w^{(r)} \in \mathbb{Z}[\![q]\!]$ となることを示すのは比較的容易である. ちなみに筆者が数値実験を行ったところ, 深さ $r \geq 5$ に対しても $\mathcal{E}_r = \emptyset$ となるようであるが未解決である.

以下に述べる主定理は, 定理 1.3 における "$\subset$" が等号であることを主張する.

定理 1.4 (N. [10]).

$$\mathcal{E}_1 = \left\{ \begin{matrix} 2, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 28, \\ 30, 32, 34, 38, 54, 58, 68, 80, 114, 118 \end{matrix} \right\}.$$

特に (♠) より $w \in \mathcal{E}_1 \backslash \{2\}$ に対して $G_w^{(1)} \in \mathbb{Z}_{>0}[\![q]\!]$ となる.

等号を示すためには "⊃" を, すなわち定理に現れる $w \in \{2, 6, 8, \ldots, 118\}$ に対して実際に $G_w^{(1)} \in \mathbb{Z}[\![q]\!]$ となることを示せばよい. 重さが小さい場合は $G_w^{(1)}$ の Fourier 係数を具体的に計算して示すことが可能であり, 例えば

$$\begin{aligned}
G_2^{(1)} &= E_2 = D(\log \Delta) = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) q^n, \\
G_6^{(1)} &= \frac{E_2 E_4 - E_6}{720} = \frac{D(E_4)}{240} = \sum_{n=1}^{\infty} n\sigma_3(n) q^n, \\
G_8^{(1)} &= \frac{E_4^2 - E_2 E_6}{1008} = -\frac{D(E_6)}{504} = \sum_{n=1}^{\infty} n\sigma_5(n) q^n, \\
G_{10}^{(1)} &= E_4 G_6^{(1)} = \frac{D(E_8)}{480} = \sum_{n=1}^{\infty} n\sigma_7(n) q^n, \\
G_{12}^{(1)} &= \frac{E_4^3 - 1008\Delta - E_2 E_4 E_6}{332640} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7} \sum_{n=2}^{\infty} (n\sigma_9(n) - \tau(n)) q^n, \\
G_{14}^{(1)} &= \frac{E_2(E_4^3 - 720\Delta) - E_4^2 E_6}{393120} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 691} \sum_{n=2}^{\infty} n(\sigma_{11}(n) - \tau(n)) q^n, \\
G_{16}^{(1)} &= E_4 G_{12}^{(1)}
\end{aligned}$$

となる. ここで $D := \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{d\tau} = q \frac{d}{dq}$ かつ Δ は Γ に関する重さ 12 のカスプ形式

$$\Delta = q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n = \frac{E_4^3 - E_6^2}{1728} \in S_{12}$$

であり, その Fourier 係数を $\tau(n)$ と定める (Ramanujan のタウ関数). 上記の例において $G_{12}^{(1)}$ と $G_{14}^{(1)}$ の Fourier 係数の整数性は自明ではないが, [5] で Grabner が指摘しているように, $\sigma_{11}(n) \equiv \tau(n) \pmod{691}$ 等の約数関数とタウ関数の満たす合同式を使えば示せる. しかしこの方法は重さが増えるにつれて困難になるように思える. 例えば以下の nex-qmf の Fourier 係数は全て整数なのだろうか？

$$G_{114}^{(1)} = \frac{1}{N_{9,6}} \left(E_2 E_4 \Delta^9 A_{9,6}(j) - E_6 \Delta^9 B_{9,6}(j) \right) \overset{???}{\in} \mathbb{Z}[\![q]\!].$$

ここで

$$\begin{aligned}
N_{9,6} &= 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 47 \cdot 53 \cdot 59 \\
&\quad \cdot 61 \cdot 67 \cdot 71 \cdot 73 \cdot 79 \cdot 83 \cdot 89 \cdot 97 \cdot 101 \cdot 103 \cdot 107 \cdot 109 \cdot 113, \\
A_{9,6}(X) &= X^9 - \frac{24454}{3}X^8 + \frac{474979296}{17}X^7 - \frac{888804457205}{17}X^6 \\
&\quad + 58002865348421X^5 - 38759471954111394X^4 \\
&\quad + 15135088185868167792X^3 - 3173598010686486090312X^2 \\
&\quad + 297473555337690122052390X - 7840346480159903987708940, \\
B_{9,6}(X) &= X^9 - \frac{22294}{3}X^8 + \frac{390702816}{17}X^7 - \frac{651013930805}{17}X^6 \\
&\quad + 37180279576181X^5 - 21228003877921074X^4 \\
&\quad + 6835398004395374832X^3 - 1114698418843177975752X^2 \\
&\quad + 72322444486635699257190X - 919318930586739576036780.
\end{aligned}$$

($G^{(1)}_{118} = E_4 G^{(1)}_{114}$ であるため, 主定理を証明する上では重さ 114 の場合が最も難しい.)

この困難を回避するために, また, 個別撃破ではない統一的な証明を与えるために, Fourier 展開 (q 展開) ではなく楕円モジュラー関数 $j(\tau) = E_4(\tau)^3/\Delta(\tau)$ の逆数による展開に注目する. 実は $G^{(1)}_w$ を $j(\tau)^{-1}$ で展開したものは超幾何級数を用いて表すことができ, 後に補題 2.6 で述べるように, この変数変換によって展開係数の整数性は変化しない.

2 $G^{(1)}_w$ の超幾何級数表示

準モジュラー形式の微分を計算するうえで, 以下の関係式は基本である.

命題 2.1 (Ramanujan, Halphen)**.**

$$D(E_2) = \frac{E_2^2 - E_4}{12}, \quad D(E_4) = \frac{E_2E_4 - E_6}{3}, \quad D(E_6) = \frac{E_2E_6 - E_4^2}{2}.$$

これより $QM_*(\Gamma)$ は微分 D に関して閉じていることが分かる.

定義 2.2 ((Ramanujan–)Serre 微分)**.**

$$\partial_w(f) := D(f) - \frac{w}{12}E_2 f.$$

特に

$$f \in QM^{(r)}_w \ \Rightarrow \ \partial_{w-r}(f) \in QM^{(r)}_{w+2}$$

が成り立つ. また, 命題 2.1 より

$$\partial_4(E_4) = -\tfrac{1}{3}E_6,\ \partial_6(E_6) = -\tfrac{1}{2}E_4^2,\ \partial_1(E_2) = -\tfrac{1}{12}E_4, \partial_{12}(\Delta) = 0,\ \partial_0(j) = D(j) = -\tfrac{E_6}{E_4}j$$

となる. 続いて p, q を非負整数とし, $a_i, b_j \in \mathbb{C}$ は $b_j \notin \mathbb{Z}_{\le 0}$ を満たすとする. このとき一般超幾何級数 ${}_pF_q$ を次で定める:

$${}_pF_q\left(a_1, \ldots, a_p; b_1, \ldots, b_q; z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \cdots (a_p)_n}{(b_1)_n \cdots (b_q)_n} \frac{z^n}{n!}.$$

ここで $(a)_0=1, (a)_n=a(a+1)\cdots(a+n-1)$ $(n\geq 1)$ である (Pochhammer 記号). 特に $q=p-1$ のとき $F={}_pF_{p-1}$ は次のような微分方程式を満たす:

$$z^{p-1}(1-z)\frac{d^pF}{dz^p}+\sum_{n=1}^{p-1}z^{n-1}(\alpha_n z-\beta_n)\frac{d^nF}{dz^n}+\alpha_0 F=0.$$

ここで α_n と β_n は a_i, b_j に依存する適当な定数である. Euler 作用素 $\Theta=z\frac{d}{dz}$ を用いると, この微分方程式は次のように書き換えられる (一般超幾何微分方程式):

$$\{\Theta(\Theta+b_1-1)\cdots(\Theta+b_{p-1}-1)-z(\Theta+a_1)\cdots(\Theta+a_p)\}F=0.$$

さて, 重さ $2,4,6$ の Eisenstein 級数は以下の超幾何級数表示を持つ. E_4, E_6 については古典的な結果であり良く知られているが, それと比較して E_2 についての表示は (筆者が調べた限り) あまり知られていないようである.

命題 2.3. 十分大きな $\Im(\tau)$ に対して, 以下の表示が成り立つ:

$$\begin{aligned}
E_4(\tau)&={}_2F_1\left(\frac{1}{12},\frac{5}{12};1;\frac{1728}{j(\tau)}\right)^4,\\
E_4(\tau)^{1/2}&={}_3F_2\left(\frac{1}{6},\frac{1}{2},\frac{5}{6};1,1;\frac{1728}{j(\tau)}\right),\\
E_6(\tau)&=\left(1-\frac{1728}{j(\tau)}\right)^{1/2}{}_2F_1\left(\frac{1}{12},\frac{5}{12};1;\frac{1728}{j(\tau)}\right)^6,\\
E_2(\tau)&={}_2F_1\left(\frac{1}{12},\frac{5}{12};1;\frac{1728}{j(\tau)}\right){}_2F_1\left(-\frac{1}{12},\frac{7}{12};1;\frac{1728}{j(\tau)}\right)\\
&=\left(1-\frac{1728}{j(\tau)}\right)^{1/2}{}_3F_2\left(\frac{1}{2},\frac{5}{6},\frac{7}{6};1,1;\frac{1728}{j(\tau)}\right).
\end{aligned}\tag{2.1}$$

ここで Kaneko–Zagier 方程式, より一般的な文脈では modular linear differential equation (MLDE) と呼ばれる次のような微分方程式について考える ($w\equiv 0 \pmod 6$ とする):

$$L_w(f):=D^2(f)-\frac{w}{6}E_2D(f)+\frac{w(w-1)}{12}D(E_2)f=0.$$

上式で $g(\tau)=E_4(\tau)^{-\frac{w-1}{4}}f(\tau)$ とおいて変数変換 $z=1728/j(\tau)$ を行うと,

$$z(1-z)\frac{d^2g}{dz^2}+\left(-\frac{w-6}{6}+\frac{w-9}{6}z\right)\frac{dg}{dz}-\frac{(w-1)(w-5)}{144}g=0$$

となり, さらに Euler 作用素を用いた形に書き直すと

$$\left\{\Theta\left(\Theta-\frac{w-6}{6}-1\right)-z\left(\Theta-\frac{w-1}{12}\right)\left(\Theta-\frac{w-5}{12}\right)\right\}g=0$$

となる. この微分方程式は超幾何微分方程式であり, 冪級数解と対数解を持つ. Kaneko–Koike [7] より, Γ に関する重さ $6n$ $(n\geq 1)$ 深さ 1 の nex-qmf $G_{6n}^{(1)}$ は $L_{6n}(G_{6n}^{(1)})=0$ を満たすことが知られており, このことから次を得る.

命題 2.4. Γ に関する深さ 1 の nex-qmf は以下の超幾何級数表示を持つ:

$$
\begin{aligned}
G_{6n}^{(1)}(\tau) &= j(\tau)^{-n}{}_2F_1\left(\frac{1}{12},\frac{5}{12};1;\frac{1728}{j(\tau)}\right)^{2(3n-1)} P_n\left(\frac{1}{j(\tau)}\right),\\
G_{6n+2}^{(1)}(\tau) &= j(\tau)^{-n}{}_2F_1\left(\frac{1}{12},\frac{5}{12};1;\frac{1728}{j(\tau)}\right)^{6n} Q_n\left(\frac{1}{j(\tau)}\right),\\
G_{6n+4}^{(1)}(\tau) &= E_4(\tau)G_{6n}^{(1)}(\tau),
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
P_n(t) &:= {}_2F_1\left(\frac{1}{12},\frac{5}{12};1;1728t\right)\,{}_2F_1\left(\frac{6n+1}{12},\frac{6n+5}{12};n+1;1728t\right),\\
Q_n(t) &:= {}_2F_1\left(\frac{1}{12},\frac{5}{12};1;1728t\right)\,{}_2F_1\left(\frac{6n-1}{12},\frac{6n+7}{12};n+1;1728t\right).
\end{aligned}
$$

注意 2.5. Serre 微分を用いた微分関係式 $G_{6n+2}^{(1)} = \frac{12}{6n+1}\partial_{6n-1}(G_{6n}^{(1)})$ が成り立つ．これは超幾何級数の満たすある微分関係式 (隣接関係式) と同値である．$G_{6n+2}^{(1)}$ の超幾何級数表示はこの式から従う．

補題 2.6. 以下が成り立つ:

(i) $f(t) \in \mathbb{Z}[\![t]\!] \ \Leftrightarrow\ (1-1728t)^{-1/2}f(t) \in Z[\![t]\!]$.

(ii) $j(\tau)^{-1} \in q(1+q\mathbb{Z}[\![q]\!])$.

(iii) $f(\tau) \in \mathbb{Z}[\![q]\!] \ \Leftrightarrow\ f(\tau) \in \mathbb{Z}[\![j^{-1}]\!]$.

(iv) $G_{6n}^{(1)}(\tau) \in \mathbb{Z}[\![q]\!] \ \Leftrightarrow\ G_{6n+4}^{(1)}(\tau) \in \mathbb{Z}[\![q]\!]$.

(v) $G_{6n}^{(1)}(\tau) \in \mathbb{Z}[\![q]\!] \ \Leftrightarrow\ P_n(t) \in \mathbb{Z}[\![t]\!]$ and $G_{6n+2}^{(1)}(\tau) \in \mathbb{Z}[\![q]\!] \ \Leftrightarrow\ Q_n(t) \in \mathbb{Z}[\![t]\!]$.

Proof. (i), (ii), (iv) の証明は省略する．

(iii) 主張 (ii) よりある関数 f を $f = a_0 + a_1q + a_2q^2 + \cdots = b_0 + b_1j^{-1} + b_2j^{-2} + \cdots$ と二通りに表したとき, 各展開係数は $a_m \in \mathbb{Z}[b_0, b_1, \ldots, b_m]$ かつ $b_m \in \mathbb{Z}[a_0, a_1, \ldots, a_m]$ を満たす．よって主張が従う．

(v) 式 (2.1) より $E_4^{1/2} \in 1 + j^{-1}\mathbb{Z}[\![j^{-1}]\!]$ となるから (iii) より $E_4^{1/2} \in 1 + q\mathbb{Z}[\![q]\!]$ かつ $E_4^{-1/2} \in 1 + q\mathbb{Z}[\![q]\!]$ となる．命題 2.4 より $G_{6n}^{(1)} = j^{-n}E_4^{(3n-1)/2}P_n(j^{-1})$ が成り立ち, 直前の $E_4^{-1/2}$ に対する主張から

$$G_{6n}^{(1)} \in \mathbb{Z}[\![q]\!] \ \Rightarrow\ j^{-n}P_n(j^{-1}) = E_4^{-(3n-1)/2}G_{6n}^{(1)} \in \mathbb{Z}[\![q]\!]$$

となるゆえ, (iii) に注意すると $j^{-n}P_n(j^{-1}) \in \mathbb{Z}[\![j^{-1}]\!]$ となることが分かる．よって $P_n(t) \in \mathbb{Z}[\![t]\!]$ が成り立つ．

逆に $P_n(t) \in \mathbb{Z}[\![t]\!]$ ならば $G_{6n} = j^{-n}E_4^{(3n-1)/2}P_n(j^{-1}) \in \mathbb{Z}[\![j^{-1}]\!]$ となるゆえ, やはり (iii) より $G_{6n}^{(1)} \in \mathbb{Z}[\![q]\!]$ となる．$G_{6n+2}^{(1)}$ の場合も同様に示すことができる． □

主定理に現れる集合を次のように分類する:

$$\left\{\begin{matrix}2,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,28,\\ 30,32,34,38,54,58,68,80,114,118\end{matrix}\right\} = \bigcup_{n=0}^{5}\mathcal{S}_{2n}.$$

ここで

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_0 &= \{12, 24\}, \quad \mathcal{S}_2 = \{2, 14, 38\}, \quad \mathcal{S}_4 = \mathcal{S}_0 \oplus 4 = \{16, 28\}, \\
\mathcal{S}_6 &= \{6, 18, 30, 54, 114\}, \quad \mathcal{S}_8 = \{8, 20, 32, 68, 80\}, \\
\mathcal{S}_{10} &= \mathcal{S}_6 \oplus 4 = \{10, 22, 34, 58, 118\}.
\end{aligned}$$

ただし記号 $\{\text{list}\} \oplus n$ は list の各要素に n を足すことを意味するものとする．このとき補題 2.6 の (iv) より, 主定理を示すには $w \in \mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_6 \cup \mathcal{S}_8$ なる重さ w に対して $G_w^{(1)} \in \mathbb{Z}[\![q]\!]$ となることを示せば十分である．さらに補題2.6 の (v) より, この主張は命題 2.4 に現れた形式的冪級数 $P_n(t), Q_n(t)$ に対する主張へと書き換えられる:

- $G_w^{(1)} \in \mathbb{Z}[\![q]\!]$ for $w \in \mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_6 \;\Leftrightarrow\; P_n(t) \in \mathbb{Z}[\![t]\!]$ for $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 9, 19\}$,
- $G_w^{(1)} \in \mathbb{Z}[\![q]\!]$ for $w \in \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_8 \;\Leftrightarrow\; Q_n(t) \in \mathbb{Z}[\![t]\!]$ for $n \in \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 11, 13\}$.

3 Atkin-like polynomials

前節の結果から特定の w に対する $G_w^{(1)}$ の Fourier 展開の整数性は, 特定の n に対する $P_n(t)$ および $Q_n(t)$ の展開係数の整数性と同値であることが分かった．本節では $P_n(t), Q_n(t)$ をより扱いやすい形へと書き換える．

まず $G_w^{(1)}$ は深さ 1 の qmf であるから, あるモニック多項式 $A_{m,a}(X), B_{m,a}(X)$ が存在して次のように表すことができる:

$$G_{12m}^{(1)} = \frac{1}{N_{m,0}} \left(-E_2 E_4 E_6 \Delta^{m-1} A_{m,0}(j) + \Delta^m B_{m,0}(j)\right), \tag{3.1}$$

$$G_{12m+2}^{(1)} = \frac{1}{N_{m,2}} \left(E_2 \Delta^m A_{m,2}(j) - E_4^2 E_6 \Delta^{m-1} B_{m,2}(j)\right), \tag{3.2}$$

$$G_{12m+6}^{(1)} = \frac{1}{N_{m,6}} \left(E_2 E_4 \Delta^m A_{m,6}(j) - E_6 \Delta^m B_{m,6}(j)\right), \tag{3.3}$$

$$G_{12m+8}^{(1)} = \frac{1}{N_{m,8}} \left(-E_2 E_6 \Delta^m A_{m,8}(j) + E_4^2 \Delta^m B_{m,8}(j)\right). \tag{3.4}$$

多項式 $A_{m,a}(X)$ を Atkin-like polynomial と呼ぶ．特に $A_{m,2}(X)$ は [8] で扱われている Atkin polynomial に等しい．正規化因子 $N_{m,a}$ は $N_{0,0} = N_{0,2} := 1$ を除いて, $m \geq 0$ に対して以下のような二項係数による表示を持つ:

$$\begin{aligned}
N_{m,0} &= 24m \binom{6m}{2m} \binom{12m}{6m}, \\
N_{m,2} &= \frac{12m+1}{12m-1} N_{m,0}, \\
N_{m,6} &= N_{m+1/2,0} = 12(2m+1) \binom{6m+3}{2m+1} \binom{12m+6}{6m+3}, \\
N_{m,8} &= \frac{12m+7}{12m+5} N_{m,6}.
\end{aligned}$$

多項式 $A_{m,a}(X)$ と $B_{m,a}(X)$ はそれぞれ, 以下の冪級数の最良有理関数近似の分母と分子となることにも注意しておく:

$$
\begin{aligned}
j(j-1728)\Phi - \frac{B_{m,0}(j)}{A_{m,0}(j)} &= -\frac{N_{m,0}\,G_{12m}^{(1)}}{\Delta^m A_{m,0}(j)} = -\frac{N_{m,0}}{j^{2m-1}} + O(j^{-2m}),\\
\Phi - \frac{B_{m,2}(j)}{A_{m,2}(j)} &= \frac{N_{m,2}\,G_{12m+2}^{(1)}}{E_4^2E_6\Delta^{m-1}A_{m,2}(j)} = \frac{N_{m,2}}{j^{2m+1}} + O(j^{-2m-2}),\\
j\Phi - \frac{B_{m,6}(j)}{A_{m,6}(j)} &= \frac{N_{m,6}\,G_{12m+6}^{(1)}}{E_6\Delta^m A_{m,6}(j)} = \frac{N_{m,6}}{j^{2m+1}} + O(j^{-2m-2}),\\
(j-1728)\Phi - \frac{B_{m,8}(j)}{A_{m,8}(j)} &= -\frac{N_{m,8}\,G_{12m+8}^{(1)}}{E_4^2\Delta^m A_{m,8}(j)} = -\frac{N_{m,8}}{j^{2m+1}} + O(j^{-2m-2}).
\end{aligned}
$$

ここで $\Phi = \Phi(j^{-1}) = E_2E_4/(jE_6)$ は j^{-1} を変数とする冪級数 (命題 2.3 も参照) であり, このとき $(j-1728)\Phi = E_2E_6/E_4^2$ である. なお Atkin-like polynomial $A_{m,a}(X)$ の直交多項式としての性質や, generalized Faber polynomial との関係については [11] を参照されたい.

続いて, 正整数 u_r および形式的冪級数 $U(t), V(t)$ を以下のように定める:

$$
\begin{aligned}
u_r &= \frac{(6r)!}{(3r)!\,r!^3} = \binom{2r}{r}\binom{3r}{r}\binom{6r}{3r} = \binom{4r}{r}\binom{5r}{r}\binom{6r}{r} \quad (r\in\mathbb{Z}_{\geq 0}),\\
U(t) &= {}_2F_1\left(\frac{1}{12},\frac{5}{12};1;1728t\right)^2 = {}_3F_2\left(\frac{1}{6},\frac{1}{2},\frac{5}{6};1,1;1728t\right) = \sum_{r=0}^{\infty} u_r t^r,\\
V(t) &= {}_3F_2\left(\frac{1}{2},\frac{5}{6},\frac{7}{6};1,1;1728t\right) = \left(1+6t\frac{d}{dt}\right)U(t) = \sum_{r=0}^{\infty}(6r+1)u_r t^r.
\end{aligned}
$$

命題 2.3 より $V(t) = (1-1728t)^{-1/2}Q_0(t) \in \mathbb{Z}[\![t]\!]$ となることに注意する. したがって補題 2.6 の (i) と (v) より $G_2^{(1)} \in \mathbb{Z}[\![q]\!]$ となることが分かる. もちろんこれは $G_2^{(1)}$ の Fourier 係数を直接計算すれば直ちに分かることだが, 証明に際して $V(t)$ に注目している点が示唆的である.

多項式 α に対して, その相反多項式 (reciprocal polynomial) $\widetilde{\alpha}$ を以下で定める:

$$
\alpha(j) = \sum_{k=0}^{m} c_k j^k, \quad \widetilde{\alpha}(t) := t^m\alpha(1/t) = \sum_{k=0}^{m} c_k t^{m-k}.
$$

命題 2.4 における $G_w^{(1)}$ の超幾何級数表示と式 (3.1)～(3.4) を比較し, さらに命題 2.3 における Eisenstein 級数の超幾何級数表示を用いることで $P_n(t), Q_n(t)$ は次のように書き換えられる:

$$
\begin{aligned}
N_{m,0}\,t^{2m}P_{2m}(t) &= -\widetilde{A_{m,0}}(t)\,(1-1728t)V(t) + \widetilde{B_{m,0}}(t)U(t), && (3.5)\\
N_{m,2}\,t^{2m}(1-1728t)^{-1/2}Q_{2m}(t) &= \widetilde{A_{m,2}}(t)V(t) - \widetilde{B_{m,2}}(t)U(t), && (3.6)\\
N_{m,6}\,t^{2m+1}(1-1728t)^{-1/2}P_{2m+1}(t) &= \widetilde{A_{m,6}}(t)V(t) - \widetilde{B_{m,6}}(t)U(t), && (3.7)\\
N_{m,8}\,t^{2m+1}Q_{2m+1}(t) &= -\widetilde{A_{m,8}}(t)\,(1-1728t)V(t) + \widetilde{B_{m,8}}(t)U(t). && (3.8)
\end{aligned}
$$

主定理を示すために, 今我々は

$$
P_n(t) \in \mathbb{Z}[\![t]\!] \text{ for } n \in \{1,2,3,4,5,9,19\}, \quad Q_n(t) \in \mathbb{Z}[\![t]\!] \text{ for } n \in \{0,1,2,3,5,6,11,13\}
$$

となることを示したい. 鍵となるのは以下の事実である:

$f(t) \in \mathbb{Z}[\![t]\!]$ かつ $N = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_n^{s_n}$ (p_ℓ は ℓ 番目の素数, $s_\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) であるとする. このとき

$$f(t) \equiv 0 \pmod{p_\ell^{s_\ell}}\ (1 \leq \ell \leq n) \;\Rightarrow\; f(t) \equiv 0 \pmod{N} \;\Rightarrow\; \frac{f(t)}{N} \in \mathbb{Z}[\![t]\!].$$

(一般には $\widetilde{A_{m,a}}(t), \widetilde{B_{m,a}}(t) \in \mathbb{Q}[\![t]\!]$ であって, (3.5)$\sim$(3.8) の右辺が $\mathbb{Q}[\![t]\!]$ に入ることがある. その場合, 両辺に適当な自然数を掛けて右辺が $\mathbb{Z}[\![t]\!]$ に入るようにする. ($\clubsuit$))

したがって特定の p_ℓ, s_ℓ に対して (3.5)$\sim$(3.8) の右辺 $\mathrm{mod}\ p_\ell^{s_\ell}$ が消えることを示せば, このとき左辺が $N_{m,a}$ で割り切れることから求める結果を得る.

さて $f(t) \in \mathbb{Z}[\![t]\!]$ に対して $f(t) \equiv 0 \pmod{p_\ell^{s_\ell}}$ であるとはその (加算無限個ある) 展開係数が全て $\mathrm{mod}\ p_\ell^{s_\ell}$ で消えていることを意味する. いまある多項式 $g(t)$ と形式的冪級数 $h(t)$ が存在して $f(t)$ が $f(t) \equiv g(t)h(t) \pmod{p_\ell^{s_\ell}}$ と「因数分解」できたとする. このときさらに (有限個の係数をチェックすれば判定できる主張) $g(t) \equiv 0 \pmod{p_\ell^{s_\ell}}$ が成り立つならば, 主張 $f(t) \equiv 0 \pmod{p_\ell^{s_\ell}}$ が従う. そこで次節では $U(t) \pmod{p^s}$ と $V(t) \pmod{p^s}$ の「因数分解」に注目する.

4 $U(t)$ と $V(t)$ が満たす合同式

主定理を証明する上で扱う $N_{m,a}$ (を前節 ($\clubsuit$) により正規化したもの) を素因数分解することで, 考えるべき p^s は $2^8, 3^5, 5^2, 7^2, p\ (11 \leq p \leq 113)$ であることが分かる. まずは指数が小さいものから順に考える.

命題 4.1. 任意の素数 p に対して以下の合同式が成り立つ:

$$U(t) \equiv \left(\sum_{m=0}^{[p/6]} u_m t^m \right) U(t^p) \pmod{p},$$
$$V(t) \equiv \left(\sum_{m=0}^{[p/6]} (6m+1) u_m t^m \right) U(t^p) \pmod{p}.$$

したがって特に $r \geq 1$ かつ $p \in \{2,3,5\}$ のとき $u_r \equiv 0 \pmod{p}$ となる.

特に $U(t), V(t) \pmod{p}$ が $U(t^p)$ を共通因数として持つことに注意する. 命題 4.1 の証明は Lucas の定理に基づく:

素数 p および非負整数 n, m, a, b $(0 \leq a, b \leq p-1)$ に対して

$$\binom{np+a}{mp+b} \equiv \binom{n}{m}\binom{a}{b} \pmod{p}$$

が成り立つ. ここで $\binom{0}{0} = 1$ および $x < y$ に対しては $\binom{x}{y} = 0$ とする.

以下の補題は [1] における Lemma 3.4 (i) と (ii) の特別な場合に対応する.

補題 4.2. 5 以上の素数 p と $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$F(x) = {}_3F_2\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}; 1, 1; x\right) = \sum_{m=0}^{\infty} B(m)x^m, \quad F_s(x) = \sum_{m=0}^{p^s-1} B(m)x^m$$

とおく. このとき以下の合同式が成り立つ:

$$\frac{F(x)}{F(x^p)} \equiv \frac{F_{s+1}(x)}{F_s(x^p)} \pmod{p^{s+1}}, \quad \frac{F^{(n)}(x)}{F(x)} \equiv \frac{F^{(n)}_{s+1}(x)}{F_{s+1}(x)} \pmod{p^{s+1}}.$$

ここで $f^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n}f(t)$ である $(n \geq 0)$.

これらの結果を適当な変数変換によって $U(t)$ と $V(t)$ に対する主張へと書き直すことで, 以下を得る.

命題 4.3. 以下の合同式が成り立つ:

$$\begin{aligned}
U(t) &\equiv (1 + 20t + 10t^2)U(t^5) \pmod{5^2},\\
V(t) &\equiv (1 + 15t + 5t^2)U(t^5) \pmod{5^2},\\
U(t) &\equiv \frac{1 + 22t + 7t^2 + 21t^3 + t^7 + 36t^8}{1 + t^7} U(t^7) \pmod{7^2},\\
V(t) &\equiv \frac{1 + 7t + 42t^2 + 7t^3 + 43t^7}{1 + t^7} U(t^7) \pmod{7^2}.
\end{aligned}$$

素数 $2, 3$ に対しては

$$F(z) = {}_2F_1\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}; 1; 432z\right) = \sum_{m=0}^{\infty} A(m)z^m, \quad F_s(z) = \sum_{m=0}^{p^s-1} A(m)z^m, \tag{4.1}$$

$$A(m) = A_6(m) = \frac{(6m)!}{(3m)!(2m)!m!} = \binom{3m}{m}\binom{6m}{3m} \quad (m \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

とおくとき補題 4.2 と同じ主張が成り立つ.

補題 4.4. $F(z)$ と $F_s(z)$ を式 (4.1) で定義される形式的冪級数と多項式とする. このとき $p \in \{2, 3\}$ および任意の $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して以下の合同式が成り立つ:

$$\frac{F(z)}{F(z^p)} \equiv \frac{F_{s+1}(z)}{F_s(z^p)} \pmod{p^{s+1}}, \quad \frac{F^{(n)}(z)}{F(z)} \equiv \frac{F^{(n)}_{s+1}(z)}{F_{s+1}(z)} \pmod{p^{s+1}}.$$

ここで $f^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n}f(t)$ である $(n \geq 0)$.

この補題は [20] の Lemma 11 と 12 の証明中の計算を流用することで得られる ($N = 6$ の場合に相当する). 適当な変数変換によって以下を得る.

命題 4.5. 以下の合同式が成り立つ:

$$U(t) \equiv (1 + 120t + 96t^2 + 128t^3)U(t^2) \pmod{2^8}, \tag{4.2}$$

$$V(t) \equiv (1 + 72t + 128t^2 + 128t^3 + 64t^4 + 128t^8)U(t^2) \pmod{2^8}, \tag{4.3}$$

$$U(t) \equiv (1 + 120t + 54t^2 + 189t^3 + 135t^4 + 81t^5 + 162t^6 + 81t^7 + 162t^{10})U(t^3) \pmod{3^5},$$

$$V(t) \equiv (1 + 111t + 216t^2 + 162t^3 + 135t^4 + 81t^5 + 81t^7 + 162t^9 + 162t^{10})U(t^3) \pmod{3^5}.$$

上式は mod 2^s $(1 \leq s \leq 7)$ や mod 3^s $(1 \leq s \leq 4)$ に対しても成立するため, これらの結果で主定理の証明に現れる全ての場合を尽くすことができる.

5　主定理の証明

本節では Fourier 係数の整数性が非自明かつ重さ w が最も大きい場合である $w = 114 \in \mathcal{S}_6$ のみを証明するが, 残りの場合も同様にして証明できる．まず補題 2.6 の (v) より

$$G_{114}^{(1)} \in \mathbb{Z}[\![q]\!] \;\Leftrightarrow\; P_{19}(t) \in \mathbb{Z}[\![t]\!]$$

が成り立つからこれを示せばよい．式 (3.7) に従って形式的冪級数 $P_{19}(t)$ を次のように変形する ($\widetilde{A_{9,6}}(t), \widetilde{B_{9,6}}(t) \in \frac{1}{51}\mathbb{Z}[t]$ より両辺に 51 を掛ける):

$$51 N_{9,6}\, t^{19}(1-1728t)^{-1/2} P_{19}(t) = 51\left(\widetilde{A_{9,6}}(t)V(t) - \widetilde{B_{9,6}}(t)U(t)\right) \in \mathbb{Z}[\![t]\!].$$

命題 4.1 を用いることで, 素数 $p \geq 11$ に対して以下の合同式を得る:

$$\begin{aligned} &51\left(\widetilde{A_{9,6}}(t)V(t) - \widetilde{B_{9,6}}(t)U(t)\right) \\ &\quad \equiv \left\{ 51\widetilde{A_{9,6}}(t) \sum_{m=0}^{[p/6]} (6m+1)u_m t^m - 51\widetilde{B_{9,6}}(t) \sum_{m=0}^{[p/6]} u_m t^m \right\} U(t^p) \pmod{p}. \end{aligned}$$

Mathematica を用いた数値計算により, 上式右辺の多項式部分が mod $p\,(11 \leq p \leq 113)$ で消えることが分かる．同様の計算を mod $2^8, 3^5, 5^2, 7^2$ に対して行うためには, 命題 4.3 と 4.5 を用いる．例えば式 (4.2) および (4.3) より

$$\begin{aligned} 51\left(\widetilde{A_{9,6}}(t)V(t) - \widetilde{B_{9,6}}(t)U(t)\right) \equiv \Big\{ & 51\widetilde{A_{9,6}}(t)(1 + 72t + 128t^2 + 128t^3 + 64t^4 + 128t^8) \\ & -51\widetilde{B_{9,6}}(t)(1 + 120t + 96t^2 + 128t^3) \Big\} U(t^2) \pmod{2^8} \end{aligned}$$

となり, 直接計算より右辺の多項式部分が mod 2^8 で消えることが分かる．残りの mod $3^5, 5^2, 7^2$ の場合も同様である．以上の各素数の冪に対する計算を組み合わせることで,

$$51 N_{9,6}\, t^{19}(1-1728t)^{-1/2} P_{19}(t) = 51\left(\widetilde{A_{9,6}}(t)V(t) - \widetilde{B_{9,6}}(t)U(t)\right) \equiv 0 \pmod{51 N_{9,6}}$$

を得る．これより $t^{19}(1-1728t)^{-1/2} P_{19}(t) \in \mathbb{Z}[\![t]\!]$ となるが, 補題 2.6 の (i) より $P_{19}(t) \in \mathbb{Z}[\![t]\!]$ であることが結論される．

6　今後の研究課題

本稿の内容はレベル 1 深さ 1 に関するものであるから, 素朴な一般化としてレベル付きや深さを増やす方向性がある．合同部分群 $\Gamma_0(N)$ と Fricke 群 $\Gamma_0^*(N)$ に関する Atkin polynomial や modular linear differential equation (MLDE) についての先行研究をまとめると

<table>
<tr><td></td><td>Atkin inner product
Atkin polynomials</td><td>MLDE
(Extremal) quasimodular forms</td></tr>
<tr><td>$\Gamma_0(N)$</td><td>Tsutsumi [17, 18] ($N = 2, 3, 4$)</td><td>Sakai–Tsutsumi [16] ($N = 2, 3, 4$)
Sakai–Shimizu [15] ($N = 2, 3, 4$)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\Gamma_0^*(N)$</td><td>Sakai [14] ($N = 5, 7$)</td><td>Kaneko–Koike [6] ($N = 2$)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Sakai [13] ($N = 2, 3$)</td></tr>
</table>

となり, これらの結果を基にして以下のような問題が考えられる．

- 命題 2.4 で見たように $G_w^{(1)}$ は超幾何級数表示を持つ. これをレベル 2 以上に拡張し, 幾つかの微分方程式の解の間に成り立つ漸化式や微分関係式を Grabner の方法に従って明らかにせよ.

- 定理 1.4 をレベル 2 以上, 深さ 1 以上へ拡張せよ (ただし ex-qmf の存在と一意性を示す必要がある).

謝辞

第 15 回福岡数論研究集会世話人の金子昌信先生, 權寧魯先生, 岸康弘先生, 高妻倫太郎先生, 松坂俊輝先生に, 今回の講演機会を与えていただいた事をこの場をお借りして感謝いたします.

参考文献

[1] B. Dwork, p-adic cycles, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. (1969), no. 37, 27–115.

[2] A. S. Feigenbaum, P. J. Grabner and D. P. Hardin, Eigenfunctions of the Fourier transform with specified zeros, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **171** (2021), no. 2, 329–367.

[3] P. J. Grabner, Quasimodular forms as solutions of modular differential equations, Int. J. Number Theory **16** (2020), no. 10, 2233–2274.

[4] P. J. Grabner, Asymptotic expansions for the coefficients of extremal quasimodular forms and a conjecture of Kaneko and Koike, Ramanujan J. **57** (2022), no. 3, 1021–1041.

[5] T. Kaminaka and F. Kato, Extremal quasimodular forms of lower depth with integral Fourier coefficients, Kyushu J. Math. **75** (2021), no. 2, 351–364.

[6] M. Kaneko and M. Koike, Quasimodular solutions of a differential equation of hypergeometric type, In: Galois theory and modular forms, 329–336, Dev. Math., 11, Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, 2004.

[7] M. Kaneko and M. Koike, On extremal quasimodular forms, Kyushu J. Math. **60** (2006), no. 2, 457–470.

[8] M. Kaneko and D. Zagier, Supersingular j-invariants, hypergeometric series, and Atkin's orthogonal polynomials, In: Computational perspectives on number theory (Chicago, IL, 1995), 97–126, AMS/IP Stud. Adv. Math., 7, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[9] A. Mono, On a conjecture of Kaneko and Koike, preprint, arXiv:2005.06882v1.

[10] T. Nakaya, Determination of normalized extremal quasimodular forms of depth 1 with integral Fourier coefficients, preprint, arXiv:2305.18669v1.

[11] T. Nakaya, On the orthogonality of Atkin-like polynomials and orthogonal polynomial expansion of generalized Faber polynomials, preprint, arXiv:2309.15360v1.

[12] F. Pellarin, On extremal quasi-modular forms after Kaneko and Koike, Kyushu J. Math. **74** (2020), no. 2, 401–413.

[13] Y. Sakai, The Atkin orthogonal polynomials for the low-level Fricke groups and their application, Int. J. Number Theory **7** (2011), no. 6, 1637–1661.

[14] Y. Sakai, The Atkin orthogonal polynomials for the Fricke groups of levels 5 and 7, Int. J. Number Theory **10** (2014), no. 8, 2243–2255.

[15] Y. Sakai and K. Shimizu, Modular differential equations with regular singularities at elliptic points for the Hecke congruence subgroups of low-levels, Math. J. Okayama Univ. **57** (2015), 1–12.

[16] Y. Sakai and H. Tsutsumi, Extremal quasimodular forms for low-level congruence subgroups, J. Number Theory **132** (2012), no. 9, 1896–1909.

[17] H. Tsutsumi, The Atkin inner product for $\Gamma_0(N)$, J. Math. Kyoto Univ. **40** (2000), no. 4, 751–773.

[18] H. Tsutsumi, The Atkin orthogonal polynomials for congruence subgroups of low levels, Ramanujan J. **14** (2007), no. 2, 223–247.

[19] D. Zagier, Elliptic modular forms and their applications, In: The 1-2-3 of modular forms, 1–103, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[20] V. V. Zudilin, Integrality of power expansions related to hypergeometric series, Math. Notes **71** (2002), no. 5-6, 604–616.