重さ2の保型形式の2次捻りに対するL関数の中心値の2進付値について*

足立 大雅 (九州大学)

1 序

本研究の動機は以下の問題である.

問題. 有理数体上の楕円曲線に付随する Mordell–Weil rank や Tate–Shafarevich 群の位数などの数論的不変量が, 2 次捻りによりどのように変化するか.

Birch and Swinnerton-Dyer (BSD) 予想により, 代数体 K 上の楕円曲線 E の Mordell–Weil rank は E の Hasse–Weil L 関数 $L(E/K, s)$ の $s = 1$ における零点の位数と等しくなることが期待されている. さらに, 強い BSD 予想では L 関数の中心値が $L(E/K, 1) \neq 0$ を満たすときに, その値が Tate–Shafarevich 群の位数や局所玉河数と結びつくことが予想されている. 本稿では, $K = \mathbb{Q}$ のときを扱う. 2 次拡大 $\mathbb{Q}(\sqrt{m})/\mathbb{Q}$ (d は平方因子をもたない整数) に付随する E の 2 次捻りを $E^{(m)}$ とする. 一般には $L(E^{(m)}/\mathbb{Q}, 1)$ は超越数であるため, その値の評価は非常に難しい. そこで, $E^{(m)}/\mathbb{Q}$ の model に付随する周期 Ω で割った値 $L^{(\mathrm{alg})}(E^{(m)}/\mathbb{Q}, 1) := L(E^{(m)}/\mathbb{Q}, 1)/\Omega$ が代数的数になることを用いて中心値を調べることができる. 以下の 2 点を研究することが上記の問題への有力なアプローチとなる:

(1) $L(E^{(m)}/\mathbb{Q}, 1) \neq 0$ となるような m の条件.

(2) $L(E^{(m)}/\mathbb{Q}, 1) \neq 0$ であれば, 各素数 p に対する $L^{(\mathrm{alg})}(E^{(m)}/\mathbb{Q}, 1)$ の p 進付値.

(1) については $\mathrm{ord}_{s=1} L(E^{(m)}/\mathbb{Q}, s)$ が 0, 1 になる m の密度がそれぞれ 1/2 ずつとなり, 2 以上となる m の密度は 0 となることが密度予想により期待されている (cf. [4], [6, Conjecture 1.1]).

素数 p に対して $L^{(\mathrm{alg})}(E^{(m)}/\mathbb{Q}, 1)$ の p 進付値を評価するという問題には多くの先行研究がある. まず虚数乗法をもつ楕円曲線に関する結果を述べる. C. Zhao は mod 4 で 1 となる Gauss 素数の積 D に対して, 素因子の数に関する帰納法を用いて $E_{D^2} : y^2 = x^3 - D^2 x$ の代数的部分の 2 進付値を Hecke L 関数の言葉で評価した ([14], [15]). Zhao の手法をもとに, 他の虚数乗法をもつ捻りの族に対してもその Hecke L 関数の代数的部分の 2 進付値を評価する研究が J. Coates らにより行われている ([3], [5], [9]).

次に虚数乗法をもつとは限らない有理数体上の楕円曲線に関しての結果を述べる. 有理数体上では, Wiles らにより示されたモジュラー性定理 ([1], [10]) より, ある newform $f \in S_2(\Gamma_0(N))$ (N は楕円曲線のコンダクター) の L 関数を調べればよい. m が奇数となるとき, 楕円曲線の

*本稿は, 第 15 回福岡数論研究集会における野本慶一郎氏 (株式会社光電製作所) と椎井亮太氏 (九州大学) との共同研究についての講演に基づく.

2 次捻り $E^{(m)}$ の L 関数は導手が M となる原始的 2 次 Dirichlet 指標 χ_M に対して, L 関数 $L(f, \chi_M, s) := \sum_n \frac{\chi_M(n)a_n}{n^s}$ と一致する. ただし, M は

$$M := \begin{cases} |m| & (m \equiv 1 \bmod 4), \\ 4|m| & (m \equiv 3 \bmod 4) \end{cases}$$

とする. 特に本研究では, $L(f, \chi_M, 1)$ の代数的部分の 2 進付値を評価することを目的としている. S. Zhai は $m \equiv 1 \bmod 4$ となる整数 m に対して, いくつかの条件下で $L(f, \chi_M, 1)$ の代数的部分の 2 進付値を, モジュラー記号を用いて評価した [11]. その後 S. Zhai は C. Li, L. Cai とともにその計算手法を改良し, より多くの 2 次捻りに対して 2 進付値の評価を行った ([2], [12], [13]).

本研究では, Zhai らの手法をさらに改良することで, より一般的な状況下で 2 進付値の評価を行うことに成功した. 以下, 主結果について述べるためにいくつかの記号を導入する.

$\mathcal{L}_f$ を f の周期格子 (§2 で定義する) とする. このとき, ある $\Omega_f^{\pm} \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\mathcal{L}_f = \Omega_f^+\mathbb{Z} \oplus i\Omega_f^-\mathbb{Z} \ \text{ または } \mathcal{L}_f = \Omega_f^+\mathbb{Z} \oplus \frac{\Omega_f^+ + i\Omega_f^-}{2}\mathbb{Z}$$

となることが知られている. また, $M := 4^n q_1 q_2 \cdots q_n$ ($n \in \{0, 1\}$, q_i たちは互いに異なる奇素数) とし, χ_M を導手 M の原始的 2 次 Dirichlet 指標, χ_M の符号を $\mathrm{sgn}(\chi_M) := \chi_M(-1)$ とする. 代数閉包 $\overline{\mathbb{Q}_2}$ と埋め込み $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_2}$ を固定し, v_2 を $v_2(2) = 1$ で正規化された $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の 2 進付値とする. 格子 $\mathcal{L}_f$ の形や n の値によって主張が煩雑になるので, ここでは主結果の概要を述べる (詳細は §3 で述べる).

定理 1.1 (A.–Nomoto–Shii)**.** $\mathfrak{v} := \min_{1 \le i \le r} \{v_2(a_{q_i} - 2)\} \le 2$ とすると

$$v_2\left(\frac{L(f, \chi_M, 1)}{\Omega_f^{\mathrm{sgn}(\chi_M)}}\right) \ge \mathfrak{v} \cdot r + \varepsilon_{M,f}.$$

ただし, $\varepsilon_{M,f}$ は M, f に依存する整数である. さらに, $\{v_2(a_{q_i} - 2)\}_{1 \le i \le r}$ が全て等しいなどの条件が満たされるときには, 上式の等号が成立する.

2 モジュラー記号と周期格子

$f \in S_2(\Gamma_0(N))$ を Fourier 係数が全て有理数となる正規化された固有形式, $E_f/\mathbb{Q}$ を f に対応する optimal な楕円曲線, $\phi : X_0(N) \to E_f$ を modular parametrization とする. E_f の global minimal model を一つ固定し, ω を Néron 微分とする. このとき, ω に対する E_f の周期格子は

$$\mathcal{L}_{E_f} = \begin{cases} \Omega_{E_f}^+\mathbb{Z} \oplus i\Omega_{E_f}^-\mathbb{Z} & (\Delta_{E_f} > 0), \\ \Omega_{E_f}^+\mathbb{Z} \oplus \frac{\Omega_{E_f}^+ + i\Omega_{E_f}^-}{2}\mathbb{Z} & (\Delta_{E_f} < 0) \end{cases}$$

という形をしている. ただし, Δ_{E_f} は固定された model の判別式を表す.

定義 2.1 (周期格子)**.** $r \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ を一つ固定する. このとき, f の周期格子 $\mathcal{L}_f$ を以下で定義する:

$$\mathcal{L}_f := \left\{ 2\pi i \int_r^{\gamma \cdot r} f(z)dz \,\middle|\, \gamma \in \Gamma_0(N) \right\}.$$

注意 2.2. 周期格子 $\mathcal{L}_f$ は r の取り方に依存しない.

$f(q)dq/q$ は $\mathbb{Q}$-線型空間 $S_2(\Gamma_0(N))$ の基底であるから, ある定数 $\nu_{E_f} \in \mathbb{Q}^\times$ が存在して

$$\nu_{E_f} f(q)\frac{dq}{q} = \phi^*\omega \tag{1}$$

が成り立つ. 定数 ν_{E_f} は Manin 定数と呼ばれ, $\nu_{E_f} = 1$ となることが予想されている. 本稿では簡単のため, $\nu_{E_f} = 1$ と仮定する. このとき, 式 (1) より $\mathcal{L}_f = \mathcal{L}_{E_f}$ となるので, 結局

$$\mathcal{L}_f = \begin{cases} \Omega_f^+\mathbb{Z} \oplus i\Omega_f^-\mathbb{Z} & (\Delta_{E_f} > 0), \\ \Omega_f^+\mathbb{Z} \oplus \frac{\Omega_f^+ + i\Omega_f^-}{2}\mathbb{Z} & (\Delta_{E_f} < 0) \end{cases}$$

という形をしていることがわかる. ただし, $\Omega_f^\pm = \Omega_{E_f}^\pm$ である. $\Delta_{E_f} > 0$ となるとき, $\mathcal{L}_f$ は rectangular であるといい, そうでないときは $\mathcal{L}_f$ を non-rectangular という.

定義 2.3 (モジュラー記号)**.** $r \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ に対して

$$\langle r\rangle_f^\pm := \pi i\int_{i\infty}^{r} f(z)dz \pm \pi i\int_{i\infty}^{-r} f(z)dz$$

と定める. 以降, 単に $\langle r\rangle_f^\pm$ を $\langle r\rangle^\pm$ と書く.

定義から $\langle -r\rangle^\pm = \pm\langle r\rangle^\pm$ であることや $\langle r\rangle^+$ が実数, $\langle r\rangle^-$ が純虚数であることがわかる. ここで

$$[r]^+ := \frac{\langle r\rangle^+}{\Omega_f^+}, \quad [r]^- := \frac{\langle r\rangle^-}{i\Omega_f^-}$$

とおく. このとき, $[r]^\pm \in \mathbb{Q}$ となることが知られている. 以下の定理により, L 関数の中心値はモジュラー記号と Dirichlet 指標の値の積の有限和で表されることが知られている.

定理 2.4 (Shimura–Manin, [7], [8, Theorem 5.6])**.** 導手が M である原始的 2 次 Dirichlet 指標 χ_M に対して次が成り立つ.

$$\frac{L(f,\chi_M,1)}{\Omega_f^{\mathrm{sgn}(\chi_M)}} = \frac{\tau(\chi_M)\chi_M(-1)}{M}\sum_{k\in(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^\times}\chi_M(k)\left[\frac{k}{M}\right]^{\mathrm{sgn}(\chi_M)}. \tag{2}$$

ただし, $\tau(\chi_M)$ は Gauss 和 $\tau(\chi_M) := \sum_{k=0}^{M-1}\chi_M(k)e^{\frac{2\pi ik}{M}}$ を意味する.

定理 2.4 から, 我々が取り組むべき問題は式 (2) の右辺の 2 進付値を計算することに帰着される.

注意 2.5. 定理 2.4 から, $L(f,\chi_M,1)/\Omega_f^{\mathrm{sgn}(\chi_M)}$ が代数的数であることがわかる.

3 主結果

本節では主結果である定理 1.1 を正確に記述する.

固有形式 f は §2 と同じものとし, その q 展開を $f(z) = \sum_n a_nq^n$ とする. 以降, δ_{ij} と書いたら Kronecker の delta を表すものとする. また, $M := 4^nm := 4^nq_1q_2\cdots q_r$ ($n \in \{0,1\}$, q_i たちは互いに異なる奇素数), $\mathfrak{v} := \min_{1\le i\le r}\{v_2(a_{q_i}-2)\} \le 2$ とする.

3.1 $\mathcal{L}_f$ が rectangular な場合

本節では, $\mathcal{L}_f$ が rectangular となるときを考える. まずは, $n=0$ の場合の結果を述べる.

定理 3.1 (A.–Nomoto–Shii)**.** $\mathcal{L}_f$ を rectangular, $n=0$ とする.
任意の $1 \leq i \leq r$ に対して $v_2(a_{q_i}-2) \leq 2$ ならば

$$v_2\left(\frac{L(f,\chi_m,1)}{\Omega_f^{\mathrm{sgn}(\chi_m)}}\right) \geq \mathfrak{v}\cdot r + \min\left\{\delta_{\mathfrak{v},0}, v_2\left(\frac{L(f,1)}{\Omega_f^+}\right)\right\}. \tag{3}$$

さらに, 任意の $1 \leq i \leq r$ に対して $\mathrm{sgn}(\chi_{q_i})=1$ ならば

$$v_2\left(\frac{L(f,\chi_m,1)}{\Omega_f^{\mathrm{sgn}(\chi_m)}}\right) \geq \mathfrak{v}\cdot r + \min\left\{1+\delta_{\mathfrak{v},0}, v_2\left(\frac{L(f,1)}{\Omega_f^+}\right)\right\}. \tag{4}$$

特に, 「$v_2(a_{q_1}-2)=\cdots=v_2(a_{q_r}-2)=0$ かつ $v_2(L(f,1)/\Omega_f^+)=1$」または「$v_2(a_{q_1}-2)=\cdots=v_2(a_{q_r}-2)=1$ かつ $v_2(L(f,1)/\Omega_f^+)=0$」であれば式 (4) の等号が成立する.

注意 3.2. 上記定理の一つ目の式において, 等号成立する例を個別に見つけることはできるが Fourier 係数と L 関数の中心値の代数的部分の 2 進付値の情報だけでは記述できない.

次に $n=1$ の場合の結果を述べる.

定理 3.3 (A.–Nomoto–Shii)**.** $\mathcal{L}_f$ を rectangular, $n=1$ とする. 任意の $1 \leq i \leq r$ に対して $v_2(a_{q_i}-2) \leq 2$ となるならば, 以下が成立する:

$$v_2\left(\frac{L(f,\chi_M,1)}{\Omega_f^{\mathrm{sgn}(\chi_M)}}\right) \geq \mathfrak{v}\cdot r - 1 + \min\left\{1, 1+v_2\left(\frac{L(f,1)}{\Omega_f^+}\right), v_2\left(\frac{L(f,\chi_4,1)}{\Omega_f^-}\right)\right\}.$$

特に, $v_2(a_{q_1}-2)=\cdots=v_2(a_{q_r}-2)=1$ かつ $v_2(L(f,\chi_4,1)/\Omega_f^-)=-1$ であれば上式の等号が成立する.
さらに, 任意の $1 \leq i \leq r$ に対して $\mathrm{sgn}(\chi_{q_i})=1$ となるならば以下が成立する:

$$v_2\left(\frac{L(f,\chi_M,1)}{\Omega_f^{\mathrm{sgn}(\chi_M)}}\right) \geq \mathfrak{v}\cdot r + \min\left\{1+\delta_{\mathfrak{v},0}, v_2\left(\frac{L(f,\chi_4,1)}{\Omega_f^-}\right)\right\}.$$

特に, 「$v_2(a_{q_1}-2)=\cdots=v_2(a_{q_r}-2)=0$ かつ $v_2(L(f,\chi_4,1)/\Omega_f^-)=0$」または「$v_2(a_{q_1}-2)=\cdots=v_2(a_{q_r}-2)=1$ かつ $v_2(L(f,\chi_4,1)/\Omega_f^-)=-1$」となるならば, 上式の等号が成立する.

3.2 $\mathcal{L}_f$ が non-rectangular な場合

本節では, $\mathcal{L}_f$ は non-rectangular であるとする.
まず, $n=0$ の場合の結果を述べる.

定理 3.4 (A.–Nomoto–Shii)**.** $\mathcal{L}_f$ を non-rectangular, $n=0$ とする. 任意の $1 \leq i \leq r$ に対して, $v_2(a_{q_i}-2) \leq 2$ ならば, 以下の式が成り立つ:

$$v_2\left(\frac{L(f,\chi_m,1)}{\Omega_f^{\mathrm{sgn}(\chi_m)}}\right) \geq \mathfrak{v}\cdot r + \min\left\{\delta_{\mathfrak{v},0}, v_2\left(\frac{L(f,1)}{\Omega_f^+}\right)\right\}.$$

さらに, 任意の $1 \leq i \leq r$ に対して $\mathrm{sgn}(\chi_{q_i})=1$ ならば, 以下の式が成り立つ:

$$v_2\left(\frac{L(f,\chi_m,1)}{\Omega_f^{\mathrm{sgn}(\chi_m)}}\right) \geq \mathfrak{v}\cdot r + \min\left\{1+\delta_{\mathfrak{v},0}, v_2\left(\frac{L(f,1)}{\Omega_f^+}\right)\right\}.$$

特に, 「$v_2(a_{q_1}-2)=\cdots=v_2(a_{q_r}-2)=0$ かつ $v_2(L(f,1)/\Omega_f^+)<1$」または「$v_2(a_{q_1}-2)=\cdots=v_2(a_{q_r}-2)=1$ かつ $v_2(L(f,1)/\Omega_f^+)<0$」であれば上式の等号が成立する.

次に $n=1$ のときの結果を述べる.

定理 3.5 (A.–Nomoto–Shii)**.** $\mathcal{L}_f$ を non-rectangular, $n=1$ とする. 任意の $1 \leq i \leq r$ に対して, $v_2(a_{q_i}-2) \leq 2$ ならば, 以下の式が成り立つ:

$$v_2\left(\frac{L(f,\chi_M,1)}{\Omega_f^{\mathrm{sgn}(\chi_M)}}\right) \geq \mathfrak{v}\cdot r + \min\left\{\delta_{\mathfrak{v},0}, v_2\left(\frac{L(f,1)}{\Omega_f^+}\right)\right\}.$$

特に, $v_2(a_{q_1}-2)=\cdots=v_2(a_{q_r}-2)=0$ かつ

$$v_2\left(\frac{L(f,\chi_4,1)}{\Omega_f^-}\right) < \min\left\{0, v_2\left(\frac{L(f,1)}{\Omega_f^+}\right)\right\},$$

または $v_2(a_{q_1}-2)=\cdots=v_2(a_{q_r}-2)=1$ かつ

$$v_2\left(\frac{L(f,\chi_4,1)}{\Omega_f^-}\right) < -1+\min\left\{0, v_2\left(\frac{L(f,1)}{\Omega_f^+}\right)\right\}$$

であれば, 上式において等号が成り立つ.

さらに, 任意の $1 \leq i \leq r$ に対して $\mathrm{sgn}(\chi_{q_i})=1$ ならば, 以下の式が成り立つ:

$$v_2\left(\frac{L(f,\chi_M,1)}{\Omega_f^{\mathrm{sgn}(\chi_M)}}\right) \geq \mathfrak{v}\cdot r + \min\left\{1+\delta_{\mathfrak{v},0}, v_2\left(\frac{L(f,1)}{\Omega_f^+}\right)\right\}.$$

特に, 「$v_2(a_{q_1}-2)=\cdots=v_2(a_{q_r}-2)=0$ かつ $v_2(L(f,\chi_4,1)/\Omega_f^-)<0$」または「$v_2(a_{q_1}-2)=\cdots=v_2(a_{q_r}-2)=1$ かつ $v_2(L(f,\chi_4,1)/\Omega_f^-)<-1$」となるならば, 上式において等号が成立する.

4 証明の概要

本節では, 定理 3.1-定理 3.5 の証明の概要を述べる. ただし, いずれの場合も全く同様に証明されるため, 本節後半では定理 3.1 の証明を行う. 証明の基本的な流れは Zhai 氏の論文 [11] で構成され, その後 [12], [13], Cai–Li–Zhai[2] において改良されたものに則っている. 証明のポイントとしては, 以下が挙げられる:

- M の素因数の数に関する帰納法 (Zhao's method) を用いる.
- 今回の目的は,
$$\sum_{k\in(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^\times} \chi_M(k) \left[\frac{k}{M}\right]^{\mathrm{sgn}(\chi_M)}$$
の 2 進付値の計算であるが, M だけでなく M の因数全てに対して上記と同様の和
$$\mathcal{T}_{D,M} := \sum_{k\in(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^\times} \chi_D(k) \left[\frac{k}{M}\right]^{\mathrm{sgn}(\chi_D)}$$
および $\mathcal{T}_{D,M}$ たちの和 $\sum_{D|M} \mathcal{T}_{D,M}$ を考える. 以降, 簡単のため $\mathcal{T}_M := \mathcal{T}_{M,M}$ と表す.

今回の共同研究により, M の素因数 q_i が $q_i \equiv 3 \bmod 4$ となる場合や M が 4 の倍数となる場合へと証明を拡張している.

まず, 帰納法より以下の補題が示すことができる.

補題 4.1. $M := 4^n m := 4^n q_1 q_2 \cdots q_r$ ($n \in \{0, 1\}$, q_i は互いに異なる奇素数) とする. このとき, 各 $k \in (\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^\times$ に対して, 以下が成り立つ:
$$\sum_D{}' \chi_D(k) = \begin{cases} \displaystyle\prod_{i=1}^r (1 + \chi_{q_i}(k)) & (n = 0), \\ \displaystyle\chi_4(k) \prod_{i=1}^r (1 + \chi_{q_i}(k)) & (n = 1). \end{cases}$$
ただし, $\sum'_D$ は「$n = 0$ ならば $D = d$ は m の正の因数を全てわたり, $n = 1$ ならば $D = 4d$ は m の正の因数全体をわたる」ことを意味する.

ここで, 初等的な計算により以下の等式がしたがう:
$$\sum_D{}' \mathcal{T}_{D,M} = \sum_{k\in(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^\times} \left(\sum_D{}' \chi_D(k)\right) \left(\left[\frac{k}{M}\right]^+ + \left[\frac{k}{M}\right]^-\right).$$
また, 証明は省略するがモジュラー記号の 2 進付値については以下が成り立つ.

補題 4.2. $M := 4^n m := 4^n q_1 q_2 \cdots q_r$ ($n \in \{0, 1\}$, q_i は互いに異なる奇素数) を N と互いに素な整数とする. また, k を M と互いに素な整数とする.

(i) $\mathcal{L}_f$ が rectangular ならば
$$\langle k/M \rangle^+ - \langle 0 \rangle^+ \in \Omega_f^+ \mathbb{Z}, \quad \langle k/M \rangle^- \in i\Omega_f^- \mathbb{Z}$$
が成り立つ.

(ii) $\mathcal{L}_f$ が non-rectangular ならば
$$2\langle k/M \rangle^+ - 2\langle 0 \rangle^+ \in \Omega_f^+ \mathbb{Z}, \quad 2\langle k/M \rangle^- \in i\Omega_f^- \mathbb{Z}$$
が成り立つ.

さらに, いずれの場合も以下が成り立つ:
$$v_2\left(\left[\frac{k}{M}\right]^+ + \left[\frac{k}{M}\right]^-\right) \geq \min\left\{0, v_2\left(\frac{L(f,1)}{\Omega_f^+}\right)\right\}.$$

命題 4.3. $M = 4^n q_1 \cdots q_r$ ($n \in \{0, 1\}$, q_i は互いに異なる奇素数) は N と互いに素とする. このとき

$$v_2\left(\sum_D{}' \mathcal{T}_{D,M}\right) \geq r + \min\left\{0, v_2\left(\frac{L(f,1)}{\Omega_f^+}\right)\right\}. \tag{5}$$

ただし, D は $n = 0$ のときは M の全ての正の因数を, $n = 1$ のときは $D \equiv 0 \bmod 4$ となるような正の因数 D をわたるものとする.

証明. 付値の性質と補題 4.1, 補題 4.2 から

$$\begin{aligned} v_2\left(\sum_D{}' \mathcal{T}_{D,M}\right) &\geq \min_{k \in (\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^\times} \left\{ v_2\left(\sum_D{}' \chi_D(k)\right) + v_2\left(\left[\frac{k}{M}\right]^+ + \left[\frac{k}{M}\right]^-\right)\right\} \\ &\geq \min_{k \in (\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^\times} \left\{ \sum_{i=1}^r v_2(1 + \chi_{q_i}(k)) + \min\left\{0, v_2\left(\frac{L(f,1)}{\Omega_f^+}\right)\right\}\right\} \\ &\geq r + \min\left\{0, v_2\left(\frac{L(f,1)}{\Omega_f^+}\right)\right\}. \end{aligned}$$

□

命題 4.4. M を命題 4.3 と同様にとる. M の正の因数 D と M/D の素因数 $q > 2$ に対して, 以下の等式が成立する:

$$\mathcal{T}_{D,M} = (a_q - 2\chi_D(q))\mathcal{T}_{D,\frac{M}{q}}.$$

証明の概要. まず, 集合 $(\mathbb{Z}/M\mathbb{Z})^\times$ は以下の集合

$$\left\{ \frac{kM}{q} + k' \,\middle|\, k \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times, k' \in \left(\mathbb{Z}\middle/\frac{M}{q}\mathbb{Z}\right)^\times \right\}$$

と同一視できる. この同一視により

$$\mathcal{T}_{D,M} = \sum_{k' \in (\mathbb{Z}/(M/q)\mathbb{Z})^\times} \chi_D(k') \sum_{k \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times} \left[\frac{k(M/q) + k'}{M}\right]^{\mathrm{sgn}(\chi_D)} \tag{6}$$

と表すことができる. ここで, モジュラー記号への Hecke 作用素 T_q の作用

$$T_q[r]^\pm = [qr]^\pm + \sum_{k \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}} \left[\frac{k+r}{q}\right]^\pm$$

において, $r = k'q/M$ を代入すると, 以下の等式が得られる:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}} \left[\frac{k(M/q) + k'}{M}\right]^{\mathrm{sgn}(\chi_D)} = a_q \left[\frac{k'q}{M}\right]^{\mathrm{sgn}(\chi_D)} - \left[\frac{k'q^2}{M}\right]^{\mathrm{sgn}(\chi_D)}. \tag{7}$$

さらに, 式 (7) を式 (6) に代入することにより主張を得る. □

命題 4.4 を繰り返し適用することで以下の系が得られる.

系 4.5. $M := 4^n m := 4^n q_1 q_2 \cdots q_r$ ($n \in \{0,1\}$, q_i は互いに異なる奇素数) とする．このとき

$$\mathcal{T}_{D,M} = \mathcal{T}_D \prod_{q \mid \frac{M}{D}} (a_q - 2\chi_D(q)).$$

系 4.5 から特に以下がしたがう:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{1,m} &= \prod_{i=1}^{r}(a_{q_i} - 2) \cdot \frac{L(f,1)}{\Omega_f^+}, \quad \mathcal{T}_{4,4m} = \prod_{i=1}^{r}(a_{q_i} - 2\chi_4(q)) \cdot \tau(\chi_4) \frac{L(f,\chi_4,1)}{\Omega_f^-}, \\ \mathcal{T}_{d,m} &= \prod_{q \mid \frac{m}{d}} (a_q - 2\chi_d(q)) \cdot \tau(\chi_d) \frac{L(f,\chi_d,1)}{\Omega_f^{\mathrm{sgn}(\chi_d)}} \ (d \neq 1, m). \end{aligned} \tag{8}$$

命題 4.3 と式 (8) を用いて定理 3.1 の証明を行う．

定理 3.1 の証明. 簡単のため $\mathfrak{v} = 0$ のときを示す．不等式 (5) より

$$v_2\left(\mathcal{T}_{1,m} + \sum_{\substack{d \mid m \\ d \neq 1, m}} \mathcal{T}_{d,m} + \mathcal{T}_m\right) \geq \min\left\{1, v_2\left(\frac{L(f,1)}{\Omega_f^+}\right)\right\}.$$

また, 式 (8) より

$$v_2(\mathcal{T}_{1,m}) = \sum_{i=1}^{r} v_2(a_{q_i} - 2) + v_2\left(\frac{L(f,1)}{\Omega_f^+}\right) \geq v_2\left(\frac{L(f,1)}{\Omega_f^+}\right).$$

主張を r に関する帰納法 (Zhao's method) により証明する．まず $r = 1$ のときを示す．この場合, 不等式 (5) は

$$v_2\left(\mathcal{T}_{1,m} + \mathcal{T}_m\right) \geq \min\left\{1, v_2\left(\frac{L(f,1)}{\Omega_f^+}\right)\right\}.$$

ここで, 式 (8) より

$$v_2(\mathcal{T}_{1,m}) = v_2\left(\frac{L(f,1)}{\Omega_f^+}\right) \geq \min\left\{1, v_2\left(\frac{L(f,1)}{\Omega_f^+}\right)\right\}$$

であるから, 上式と合わせて

$$v_2\left(\mathcal{T}_m\right) \geq \min\left\{1, v_2\left(\frac{L(f,1)}{\Omega_f^+}\right)\right\}$$

でなければならない．

$1, \ldots, r-1$ で主張が成り立つと仮定する．このとき式 (8) より, $d \mid m$ ($d \neq 1, m$) に対して

$$\begin{aligned} v_2(\mathcal{T}_{d,m}) &= \sum_{q \mid \frac{m}{d}} v_2(a_q - 2\chi_d(q)) + v_2(\mathcal{T}_d) \\ &= \sum_{q \mid \frac{m}{d}} v_2(a_q - 2) + v_2(\mathcal{T}_d) \\ &\geq v_2(\mathcal{T}_d) \\ &\geq \min\left\{1, v_2\left(\frac{L(f,1)}{\Omega_f^+}\right)\right\}. \end{aligned}$$

ただし, 最後の不等号は帰納法の仮定よりしたがう．よって以下の式を得る:

$$v_2\left(\sum_{\substack{d|m\\ d\neq 1,m}} \mathcal{T}_{d,m}\right) \geq \min\left\{1, v_2\left(\frac{L(f,1)}{\Omega_f^+}\right)\right\}.$$

あとは $r=1$ のときと同様の議論により定理 3.1 の式 (3) の証明が完了する．定理 3.1 の式 (3) 以降の部分についても, これまでの議論を用いることで証明できる． □

5　具体例

最後に, 主結果の具体例を挙げる．

$f\in S_2(\Gamma_0(34))$ を正規化された固有形式

$$f=q+q^2-2q^3+q^4-2q^6-4q^7+q^8+q^9+O(q^{11})$$

とする．このとき f に対応する optimal な楕円曲線は $E/\mathbb{Q}: y^2+xy=x^3-3x+1$ で与えられる．また, $\mathcal{L}_f$ は rectangular であり, $L(f,1)/\Omega_f^+=1/3$ が成り立つ．ここで, 集合 $\mathcal{M}$ を

$$\mathcal{M}:=\{m=q_1q_2\cdots q_r \,|\, q_i: \text{互いに異なる奇素数},\ \chi_{q_i}(-1)=1,\ v_2(a_{q_i}-2)=1\ (1\leq^\forall i\leq r)\}$$

とおくと

$$\mathcal{M}=\{5,\ 29,\ 39,\ 61,\ 109,\ 145,\ 173,\ 181,\ 185,\ 197,\ldots\}$$

がわかる．さらに, 密度定理により $\mathcal{M}$ は無限集合である．このとき, 定理 3.1 より

$$v_2\left(\frac{L(f,\chi_m,1)}{\Omega_f^{\mathrm{sgn}(\chi_m)}}\right)=1\cdot r+\min\{1+0,0\}=r$$

が得られる．特に, $L(f,\chi_m,1)\neq 0$ がしたがう．

謝辞

第 15 回福岡数論研究集会にて講演の機会を与えてくださった世話人の金子昌信先生 (九州大学), 岸康弘先生 (愛知教育大学), 高妻倫太郎先生 (立命館アジア太平洋大学), 松坂俊輝先生 (九州大学), 権寧魯先生 (九州大学), 共同研究者であり本稿作成にもご協力下さった野本慶一郎氏 (株式会社光電製作所), 椎井亮太氏 (九州大学) に深く感謝申し上げます．また, 本研究において筆者は九州大学マス・フォア・イノベーション卓越大学院プログラムの支援を受けています．この場を借りて感謝申し上げます．

参考文献

[1] C. Breuil, B. Conrad, F. Diamond and R. Taylor, On the modularity of elliptic curves over $\mathbb{Q}$: wild 3-adic exercises, J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), no. 4, 843–939.

[2] L. Cai, C. Li and S. Zhai, On the 2-part of the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture for quadratic twists of elliptic curves, J. Lond. Math. Soc. (2) **101** (2020), no. 2, 714–734.

[3] J. Coates, Y. Li, Y. Tian and S. Zhai, Quadratic twists of elliptic curves, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **110** (2015), no. 2, 357–394.

[4] D. Goldfeld, Conjectures on elliptic curves over quadratic fields, In: Number theory, Carbondale 1979 (Proc. Southern Illinois Conf., Southern Illinois Univ., Carbondale, Ill., 1979), 108–118, Lecture Notes in Math., 751, Springer, Berlin, 1979.

[5] Y. Kezuka, On the p-part of the Birch–Swinnerton-Dyer conjecture for elliptic curves with complex multiplication by the ring of integers of $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **164** (2018), no. 1, 67–98.

[6] D. Kriz and C. Li, Goldfeld's conjecture and congruences between Heegner points, Forum Math. Sigma **7** (2019), Paper No. e15, 80 pp.

[7] J. I. Manin, Cyclotomic fields and modular curves, Uspehi Mat. Nauk **26** (1971), no. 6, 7–71.

[8] J. I. Manin, Parabolic points and zeta functions of modular curves, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **36** (1972), 19–66.

[9] K. Nomoto, Lower bound for the 2-adic valuations of central L-values of elliptic curves with complex multiplication, to appear in Kyushu J. Math.

[10] A. Wiles, Modular elliptic curves and Fermat's last theorem, Ann. of Math. (2) **141** (1995), no. 3, 443–551.

[11] S. Zhai, Non-vanishing theorems for quadratic twists of elliptic curves, Asian J. Math. **20** (2016), no. 3, 475–502.

[12] S. Zhai, A lower bound result for the central L-values of elliptic curves, J. Number Theory **207** (2020), 356–366.

[13] S. Zhai, On the weak forms of the 2-part of Birch and Swinnerton-Dyer conjecture, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **168** (2020), no. 1, 197–209.

[14] C. Zhao, A criterion for elliptic curves with lowest 2-power in $L(1)$, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **121** (1997), no. 3, 385–400.

[15] C. Zhao, A criterion for elliptic curves with second lowest 2-power in $L(1)$, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **131** (2001), no. 3, 385–404.