

平方数の類似を解にもつ線形ディオファントス連立方程式

齋藤 耕太 (筑波大学)

1 研究の概要

全ての辺と面上の対角線が整数であるような直方体をオイラーの直方体 (Euler brick) と呼ぶ. さらに, 直方体の対角線も整数であるとき, オイラーの完全直方体 (perfect Euler brick) と呼ぶ. すなわち, 任意の2頂点を結ぶ線分の長さが全て整数である直方体をオイラーの完全直方体と呼ぶ. ここで, R を任意の直方体とし, 縦横高さの長さをそれぞれ \sqrt{k} , \sqrt{m} , \sqrt{l} と置く. 三平方の定理から次が成立する:

$$R \text{ がオイラーの直方体} \iff k, m, l, k+m, m+l, l+k \text{ が平方数である.} \quad (1.1)$$

すなわち, オイラーの直方体を発見することは平方数上の線形ディオファントス連立方程式を解くことに帰結される. この直方体は無限個存在することが知られている. 例えば

$$(\sqrt{k}, \sqrt{m}, \sqrt{l}) = (240, 117, 44), (275, 252, 240), (693, 480, 140), \dots$$

などが挙げられる [オンライン整数列大辞典, A031173, A031174, A031175]. しかしながら, オイラーの完全直方体が存在するかは未だに明らかになっていない. (1.1) の議論と同様にして, 三平方の定理から次が成立する.

観察 1.1. 以下は同値である:

1. R がオイラーの完全直方体である.
2. $k, m, l, k+m, m+l, l+k, k+m+l$ が平方数である.

実際に $k+m+l$ が平方数であるとき, R の直方体の対角線は $\sqrt{k+m+l}$ で与えられ, 条件により整数となる. 本研究では平方数の集合の類似として以下の $S(\alpha)$ という整数の集合を導入した. ここで, 任意の実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して, $[x]$ を x の整数部分と定める.

定義 1.2. 任意の実数 $\alpha > 0$ に対して, $S(\alpha) = \{[n\alpha^2] : n \in \mathbb{N}, n \geq \alpha^{1/2}\}$ と定義する.

観察 1.1 の線形方程式について平方数の集合上で考えていた問題を集合 $S(\alpha)$ に置き換えることで次を明らかにした [KS22]:

- I. 任意の $\alpha \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$ に対して, $(k, l, m) \in \mathbb{N}^3$ が無限個存在して

$$k, l, m, k+l, l+m, m+k, k+l+m \in S(\alpha). \quad (1.2)$$

- II. ほとんど至る $\alpha \in (0, 1)$ に対して, $(k, l, m) \in \mathbb{N}^3$ が無限個存在して (1.2) を満たす.

III. (1.2) を満たす組 $(k, \ell, m) \in \mathbb{N}^3$ が高々有限個となる $\alpha \in (0, 1)$ が存在するならば、オイラーの完全直方体は存在しない。

主結果 I, II において $\alpha = 1$ のときを証明することができれば、Euler の完全直方体が無限個存在することが示される。しかし、 $\alpha \rightarrow 1$ についてはわからない。一方で、主結果 III において (1.2) の有限性がオイラーの完全直方体の非存在性を導くことを明らかにした。また、実際にはより強い定量化した結果を得ている。詳しくは Section 3 で述べる。

2 研究の背景と動機

先行結果として Glasscock の Piatetski-Shapiro 列に関する研究 [Gla17, Gla20] が挙げられる。

定義 2.1. 任意の非整数 $\alpha > 1$ に対して、 $(\lfloor n^\alpha \rfloor)_{n \in \mathbb{N}}$ を指数 α の Piatetski-Shapiro 列と呼ぶ。また、 $\text{PS}(\alpha) = \{\lfloor n^\alpha \rfloor : n \in \mathbb{N}\}$ とおく。

例として以下を挙げる：

$$\text{PS}(1.2) = \{1, 2, 3, 5, 6, 8, 10, 12, \dots\}, \quad \text{PS}(2.2) = \{1, 4, 11, 21, 34, 51, 72, 97, \dots\}.$$

定義により α が大きくなると Piatetski-Shapiro 列の各項は指数的に増大する。すなわち、 α が増大するほど $\text{PS}(\alpha)$ はより疎な集合となり、疎な集合から線形関係式を見つける問題は一般には困難になると考えられる。Glasscock は Piatetski-Shapiro 列上の線形方程式 $y = ax + b$ について初めて研究を行い、次を示した。

定理 2.2 ([Gla17, Gla20]). $a, b \in \mathbb{R}$ を $a \notin \{0, 1\}$ 満たすものとし方程式 (E) $y = ax + b$ が $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ なる無限個の解を持つと仮定する。このとき、ほとんど至る $\alpha > 1$ に対して

- $\alpha < 2$ ならば、方程式 (E) は無限個の解 $(x, y) \in \text{PS}(\alpha)^2$ を持つ；
- $\alpha > 2$ ならば、方程式 (E) は高々有限子の解 $(x, y) \in \text{PS}(\alpha)^2$ を持つ。

さらに Glasscock は $\alpha < 2$ のときの結果から次の系を得ている。

系 2.3 ([Gla17, Corollary 1]). ほとんど至る $1 < \alpha < 2$ に対して、無限個の $(k, m, \ell) \in \mathbb{N}^3$ が存在して、

$$k, m, \ell, k + m, m + \ell, \ell + k, k + m + \ell \tag{2.1}$$

の全ての項が $\text{PS}(\alpha)$ の元である。

ここで、(2.1) の関係を満たす組の集合に名前を付けておく。任意の集合 $X \subseteq \mathbb{N}$ に対して

$$T(X) = \{(k, m, \ell) \in \mathbb{N}^3 : (2.1) \text{ の全ての項が } X \text{ の元であり, } k \leq m \leq \ell\}$$

と定義する。 (k, m, ℓ) が X 上のオイラーの完全直方体の関係式を満たせば、順番を入れ替えた組 (m, k, ℓ) , (k, ℓ, m) 等も同じ条件を満たす。したがって、 $T(X)$ においては $k \leq m \leq \ell$ という条件をつけて順番を固定している。Glasscock の結果を記号 $T(X)$ で表すと、「ほとんど至る $1 < \alpha < 2$ に対して $T(\text{PS}(\alpha))$ が有限となる」と書ける。さらに、この「ほとんど至る」を「任意」に取り替えても Glasscock の結果は成立する。

定理 2.4 ([Sai22, Corollary 1.2]). 任意の $1 < \alpha < 2$ に対して、 $T(\text{PS}(\alpha))$ は無限集合である。

しかしながら、Piatetski-Shapiro 列と平方数との間には大きいギャップがある。実際、固定した $\alpha \in (1, 2)$ に対して $n^2/[n^\alpha] \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) となってしまう。そこで本研究では次の問題を提起した。

問題 2.5 ([KS22, Question 1.1]). Piatetski-Shapiro 列よりも平方数に近い整数列 $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ で $T(\{s_n: n \in \mathbb{N}\})$ が無限集合となるようなものは存在するか?

我々はこの問題の回答として $S(\alpha) := \{[n^2]: n \geq \alpha^{-1/2}, n \in \mathbb{N}\}$ を考えた。

3 主結果

結果を述べる前にいくつか記号を定めておく。任意の $\alpha > 0$ に対して $T(\alpha) := T(S(\alpha))$ とおく。任意の $x > 1$ と $\alpha > 0$ に対して

$$T_{\leq x}(\alpha) := \{(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{N}^3: \alpha^{-1/2} \leq n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq x, ([\alpha n_1^2], [\alpha n_2^2], [\alpha n_3^2]) \in T(\alpha)\}$$

と定める。任意の $\alpha \in \mathbb{Q}$ に対して $\alpha = p/q$ を既約分数表示とすると、 $d(\alpha) = q$ と書く。各 $x \in \mathbb{R}$ に対して $\lceil x \rceil := -\lfloor -x \rfloor$ と定義する。

定理 3.1 ([KS22, Theorem 1.2]). 任意の $\alpha \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$ と $x > 1$ に対して、

$$\#T_{\leq x}(\alpha) \geq \left\lfloor \frac{\log(16x)}{4 \lceil \sqrt{2}d(\alpha) \rceil \log(1 + \sqrt{2})} \right\rfloor$$

が成立する。特に、 $T(\alpha)$ は各 $\alpha \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$ に対して無限集合である。

この結果から $\alpha \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$ を固定したとき、 $\#T_x(\alpha) \gg_\alpha \log x$ であることがわかった。ただし、 α が x に対して十分 1 に近いとき、より正確に言うと α の既約分数の分母 $d(\alpha)$ が十分に大きいとき、定理 3.1 は自明な評価 ($\#T_{\leq x}(\alpha) \geq 0$) しか与えていない。したがって、 $\alpha \rightarrow 1$ としてもオイラーの完全直方体の存在性はわからない。

次に、定理 3.1 の問題に対して測度論的にもアプローチした。

定理 3.2 ([KS22, Theorem 1.4]). $0 < s < t < 1$ を実数とする。ほとんど至る $\alpha \in (s, t)$ と任意の $\epsilon > 0$ に対してある $x_0 = x_0(\alpha, s, t, \epsilon) > 1$ が存在し、 $x \geq x_0$ ならば

$$\#T_{\leq x}(\alpha) \geq (1-t) \min(1-t, 2s) \frac{\log(16x)}{16 \log(1 + \sqrt{2}) + \epsilon}$$

が成り立つ。特に、 $T(\alpha)$ はほとんど至る $\alpha \in (0, 1)$ に対して無限集合である。

定理 3.1 と同様にして、定理 3.2 も $\#T_{\leq x}(\alpha) \gg_{s,t} \log x$ が成立することを示した。

次に定理 3.2 の例外点 α を考える。つまり、 $T(\alpha)$ が有限集合になる α について考える。そのような α が存在するのかわかっていない。仮に、存在すればオイラーの完全直方体の非存在性が導かれることがわかった。すなわち、類似物の $S(\alpha)$ における解の有限性が元の問題であるオイラーの完全直方体の非存在性を導出する。

定理 3.3 ([KS22, Theorem 1.5]). ある $\alpha > 0$ が存在して

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \#T_{\leq x}(\alpha)/x = 0 \tag{3.1}$$

が成立すると仮定する。このとき、オイラーの完全直方体は存在しない。特に、ある $\alpha > 0$ が存在して $T(\alpha)$ が有限集合となるならば、オイラーの完全直方体は存在しない。

条件 (3.1) についてであるが, 数値計算の結果, 適当な α においては成立することが予想できる. より強く, 我々は次の予想を提起した.

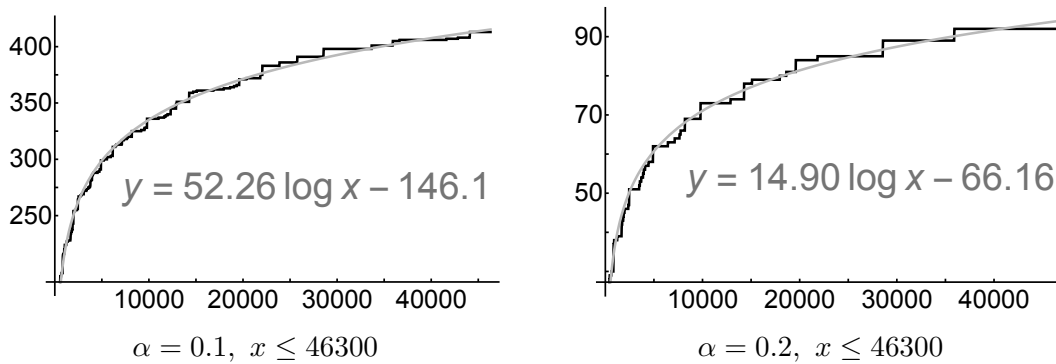
予想 3.4 ([KS22, Conjecture 7.2]). 適当な $\alpha \in (0, 1)$ に対し, ある $\lambda = \lambda(\alpha) > 0$ が存在して

$$\#T_{\leq x}(\alpha) = \lambda \log x + o(\log x) \quad (\text{as } x \rightarrow \infty)$$

が成立するだろう.

この予想の数値実験的な根拠を挙げる. 図 1 は $y = \#T_{\leq x}(\alpha)$ ($\alpha \in \{0.1, 0.2\}, 0 \leq x \leq 46300$) のグラフをプロットしたものである.

図 1



またこのグラフは関数 $y = \#T_{\leq x}(0.1)$ を基底 $\{1, \log x\}$ の線形結合によって近似したものである. 非常によく近似されているように見える. 計算には Mathematica と C++ を使用した. ただし, 基底の取り方に恣意性があるため間違った推論である可能性は捨てきれない. そこで, 別の基底 $\{1, x, x^2, \dots, x^{10}, \log x\}$ でも近似してみたところ, 近似関数として

$$\begin{aligned} & -77.8457 + 0.0050268x - 5.40591 * 10^{-7}x^2 + 5.25874 * 10^{-11}x^3 \\ & -2.07542 * 10^{-15}x^4 - 1.71858 * 10^{-19}x^5 + 2.42179 * 10^{-23}x^6 - 1.19269 * 10^{-27}x^7 \\ & + 2.97395 * 10^{-32}x^8 - 3.75833 * 10^{-37}x^9 + 1.91548 * 10^{-42}x^{10} + 41.8364 \text{Log}[x] \end{aligned}$$

を得た. ここで, $41.8364 \text{Log}[x]$ の項が数値計算的には主要項になっていることを観察する.

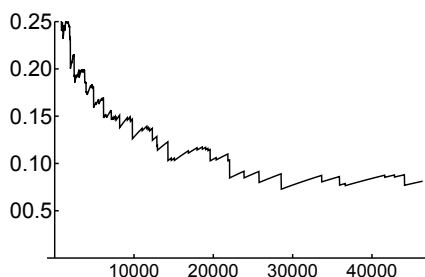
$$f(x) = 1 - \frac{\#T_{\leq x}(0.1)}{41.8364 \log x}$$

とおく. このとき, $f(x)$ のグラフをプロットすると図 2 を得る. 図 2 より, $f(x)$ は振動しているものの, 概ね減少し, 正の小さい定数に収束している. 一番大きい $x = 46300$ を代入すると $\#T_{\leq x}(0.1) = 413$, $41.8364 \log(x) = 449.44 \dots$ により

$$f(46300) = 0.08107 \dots$$

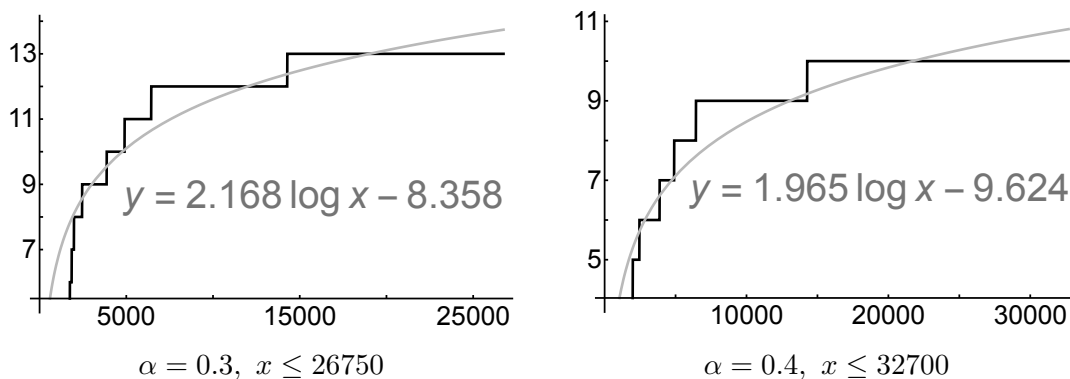
となり, かなり小さくなっている. 以上から, x^n ($n = 0, 1, \dots, 10$) での展開は範囲 ($x \leq 46300$) において $\lambda \log x$ の誤差項になっていると考えられる.

図 2



一方で $\alpha \in \{0.3, 0.4\}$ のとき, $T_{\leq x}(\alpha)$ の個数は $\alpha \in \{0.1, 0.2\}$ のときと比べると随分と小さい (図 3). 現状大きい α では予想 3.4 が真であるか偽であるかは推測できない.

図 3



4 証明の概略

最後に主定理の証明の概略を述べる. まず, 定理 3.1 と定理 3.2 について, 証明は主に Glasscock の結果 [Gla17] のアイデアを元に行っている. 次の 2 つが証明の重要な要素である.

- (1) $\sqrt{2}$ の有理数近似,
- (2) $S(\alpha)$ に含まれる与えられた公差をもつ項数 3 の等差数列の存在.

まず (1) から議論する. $\sqrt{2}$ の有理数近似を求めることは連分数展開することと同値である. また, $\sqrt{2}$ の連分数展開は以下のとおり扱いやすい形をしている:

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\ddots}}}} = [1; 2, 2, \dots].$$

G_n/F_n を $[1; \overbrace{2, \dots, 2}^n]$ の既約分数表示とする. このとき, $G_n = F_{n+1} - F_n$ となり, 2 項間漸化式 $F_{n+2} = 2F_{n+1} + F_n$ を満たす. また, $F_0 = 0, F_1 = 1$ ととれる. この数列 $(F_n)_{n \geq 1}$ をペル数

列と呼ぶ。ペル数列は形がフィボナッチ数列とよく似ており、実際、フィボナッチ数列と多くの性質を共有する。また、連分数展開の一般論から

$$|G_n/F_n - 2^{1/2}| \leq F_n^{-2}$$

が成立する。よって、 $\alpha G_n^2 \sim 2\alpha F_n^2$ となる。ただし、記号 \sim は右辺と左辺が“近い”ことを表しており、厳密な定義はここでは与えない。したがって、 αG_n^2 と αF_n^2 の小数部分をコントロールすることで、適当な $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$[\alpha G_n^2] = 2[\alpha F_n^2] \quad (4.1)$$

が成立する。この小数部分のコントロールが証明の最難関であるとも言える。この適当な n の見つけ方であるが、 α が有理数のときは F_n の性質をうまく用いることで発見できる。一方で α が一般の実数であるとき、 αF_n^2 のような指数型の数列の小数部分をコントロールすることは容易でない。そこで用いるのが測度論である。例えば [Bug12, Chapter 1] の議論によって、数列 $(\alpha F_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ はほとんど至る $\alpha \in (0, 1)$ に対して uniformly distributed modulo 1 となることがわかる。したがって、ゼロ集合を除けば αF_n^2 の小数部分の分布は単純なものになっている。

次に (2) について議論する。(4.1) が成立するような n をとる。このとき、公差が $[\alpha F_n^2]$ となるような項数 3 の $S(\alpha)$ の元からなる等差数列を発見する。この等差数列を見つけるアイデアは [SY21] から来ている。まず以下の等式から始める：各 $j \in \{-1, 0, 1\}$ に対して

$$\alpha(F_n^2/2 + j)^2 = \alpha(F_n^2/2)^2 + j\alpha F_n^2 + \alpha j^2 = [\alpha(F_n^2/2)^2] + j[\alpha F_n^2] + \delta(\alpha, n, j)$$

が成立する。ただし、 $\delta(\alpha, n, j) = \{\alpha(F_n^2/2)^2\} + j\{\alpha F_n^2\} + \alpha j^2$ とおく。このとき、

$$(\{\alpha(F_n^2/2)^2\}, \{\alpha F_n^2\})$$

の分布を考えることで、無限個の (4.1) を満たす n に対して $0 \leq \delta(\alpha, n, j) < 1$ が成立する。ここでも小数部分の細かい議論が必要となるが、詳細は省く。したがって、そのような $n \in \mathbb{N}$ と $j \in \{-1, 0, 1\}$ に対し

$$[\alpha(F_n^2/2 + j)^2] = [\alpha(F_n^2/2)^2] + j[\alpha F_n^2]$$

が成立する。これは $S(\alpha)$ の元からなる公差 $[\alpha F_n^2]$ の項数 3 の等差数列に他ならない。ただし、 F_n が偶数になるように n の動く範囲を制限する。

以上の議論をまとめると次が成立する：無限個の $n \in \mathbb{N}$ が存在して

$$(1) \quad [\alpha G_n^2] = 2[\alpha F_n^2];$$

$$(2) \quad \text{ある } H_n \in \mathbb{N} \text{ が存在して, } [\alpha H_n^2], [\alpha H_n^2] + [\alpha F_n^2], [\alpha H_n^2] + 2[\alpha F_n^2] \in S(\alpha).$$

したがって、 $(k, m, \ell) = ([\alpha F_n^2], [\alpha F_n^2], [\alpha H_n^2])$ とおくと、

$$k, m, \ell, k + m, m + \ell, \ell + k, k + m + \ell$$

の全ての項が $S(\alpha)$ の元となる。

最後に定理 3.3 の証明の概略について述べる。この証明は [MS21] の研究から着想を得ている。

対偶を示す。まず、オイラーの完全直方体が存在すると仮定する。このとき、ある $k, \ell, m, a, b, c, d \in \mathbb{N}$ が存在して

$$k^2 + \ell^2 = a^2, \quad \ell^2 + m^2 = b^2, \quad m^2 + k^2 = c^2, \quad k^2 + \ell^2 + m^2 = d^2.$$

が成立する. 任意の $\alpha > 0$ をとる. このとき, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}\alpha(nk)^2 + \alpha(nl)^2 &= \alpha(na)^2, & \alpha(nl)^2 + \alpha(nm)^2 &= \alpha(nb)^2, \\ \alpha(nm)^2 + \alpha(nk)^2 &= \alpha(nc)^2, & \alpha(nk)^2 + \alpha(nl)^2 + \alpha(nm)^2 &= \alpha(nd)^2\end{aligned}$$

が成立する. これら全ての項 $\alpha(nk)^2, \dots, \alpha(nd)^2$ の小数部分の分布を考える. この数列は定理 3.1, 定理 3.2 のときとは異なり, n について多項式オーダーとなっている. さらに, αx^2 は滑らかな関数であり, 差分も簡単に求まるため van der Corput 差分など一様分布論の道具が多く機能する. つまり, このような数列の小数部分の分布は難しくない. よって, 一様分布論により, 以下を満たす $n \in \mathbb{N}$ の下漸近密度は正となることがわかる:

$$\begin{aligned}[\alpha(nk)^2] + [\alpha(nl)^2] &= [\alpha(na)^2], & [\alpha(nl)^2] + [\alpha(nm)^2] &= [\alpha(nb)^2], \\ [\alpha(nm)^2] + [\alpha(nk)^2] &= [\alpha(nc)^2], & [\alpha(nk)^2] + [\alpha(nl)^2] + [\alpha(nm)^2] &= [\alpha(nd)^2].\end{aligned}$$

参考文献

- [Bug12] Y. Bugeaud, *Distribution modulo one and diophantine approximation*, Cambridge Tracts in Mathematics, 193, Cambridge University Press, Cambridge, 2012.
- [Gla17] D. Glasscock, Solutions to certain linear equations in Piatetski-Shapiro sequences, *Acta Arith.* **177** (2017), no. 1, 39–52.
- [Gla20] D. Glasscock, A perturbed Khinchin-type theorem and solutions to linear equations in Piatetski-Shapiro sequences, *Acta Arith.* **192** (2020), no. 3, 267–288.
- [KS22] Y. Kanado and K. Saito, A system of certain linear Diophantine equations on analogs of squares, preprint, arXiv:2205.12226.
- [MS21] T. Matsusaka and K. Saito, Linear Diophantine equations in Piatetski-Shapiro sequences, *Acta Arith.* **200** (2021), no. 1, 91–110.
- [Sai22] K. Saito, Linear equations with two variables in Piatetski-Shapiro sequences, *Acta Arith.* **202** (2022), 161–171
- [SY21] K. Saito and Y. Yoshida, Distributions of finite sequences represented by polynomials in Piatetski-Shapiro sequences, *J. Number Theory* **222** (2021), 115–156.