量子モジュラー形式について

村上 友哉 (東北大学)

1 序論

本稿は近年注目を集めている「量子モジュラー形式」という新しい対象のサーベイ記事である．本稿の内容は第 14 回福岡数論研究集会における筆者の講演「量子モジュラー形式について」に基づいている．

量子モジュラー形式は数論的対象でありながら, 不思議なことに 3 次元トポロジーや場の量子論, 頂点作用素代数といった様々な分野と関係する．また期待されている性質が様々あるが, 基本的なことですら未解明な部分が多々ある．そのような神秘的な対象である量子モジュラー形式に興味を持つきっかけとなれば幸いである．

本稿の構成を述べる．2 節では量子モジュラー形式の概要を述べ, 3 節では量子モジュラー形式に対して知られている様々な q 級数的性質を述べる．最後に 4 節では未解決問題を紹介する．

2 量子モジュラー形式とは

2.1 量子モジュラー形式の概略

整数論における最も重要な対象の一つに**モジュラー形式**がある．モジュラー形式は単に「対称性の高い複素関数」として抽象的に定義されるが, 不思議なことに様々な数学の分野の, それも非常に深い部分に思いがけない形で具体例として現れる．例を挙げると, 楕円曲線のモジュラー性定理, モンスター群のムーンシャイン, 最密球充填, 格子暗号, 等スペクトル問題 (太鼓の形を聴けるか？), Selberg ゼータ関数, スペクトルグラフ理論, 虚数乗法論, 超特異楕円曲線, 虚二次体の類数, 多重ゼータ値, 合同数問題, 整数の分割など枚挙にいとまがない．モジュラー形式を取り巻くこのような状況は Zagier によって “Modular forms are everywhere”「モジュラー形式は万物に宿る[1]」) と評されるほどである．

かくも豊穣な対象であるモジュラー形式が 3 次元トポロジーにおいても出現することが近年判明した．その現れ方は一風変わっており, 単にモジュラー形式が現れるのではなく, ある意味で「離散版モジュラー形式」とでも呼べるような対象として顕現する (本項最後の 2.1 を参照のこと)．それこそが本稿の主題である「量子モジュラー形式」である．

量子モジュラー形式が関わるのは 3 次元トポロジーのみに留まらず, 位相的場の理論や頂点作用素代数とも関係する．また数論においては擬(モック)テータ関数や偽(フォルス)テータ関数, Gauss 和, Dedekind 和との関係が知られており, モジュラー形式と同様に様々な文脈で量子モジュラー形式の具体例が出現することが分かっている．

その一方で, 量子モジュラー形式の定義や性質などの抽象論は現状ではまだ樹立されていない．このように具体例が先行し後追いで抽象論が整備されるというタイプの発展を遂げる理論

[1] この訳は筆者による．

は数学においてたくさん存在するが, 特にモジュラー形式論において顕著に見られるように思われる. 例えばWeierstrassの$\wp$関数やJacobiのテータ関数といった古典的な関数について, そのモジュラー形式としての側面が組織的に研究されたのは1985年のEichler–Zagier [15] が最初である. また近年爆発的に研究が推し進められている擬(モック)モジュラー形式の理論もそのようなタイプの発展を遂げている. 実際, 擬(モック)モジュラー形式の研究は1920年のRamanujanによる擬(モック)テータ関数の発見に端を発するが, その抽象的な定式化には実に80年以上の歳月を要している (2002年のZwegersの学位論文 [43] で画期的な進展が得られ, ほぼ同時期にBruinier–Funke [8] によって調和 Maass 形式が導入された後, 更にいくつかの重要な仕事を受けて Zagier [41] によって2009年に定式化された). 擬(モック)モジュラー形式の抽象論はまだ発展途上な部分も多く, 例えば古典的なモジュラー形式に対して知られている幾何的・表現論的な取り扱いはまだ完成していない. そのような擬(モック)モジュラー形式の研究状況を後追いしているのが現状の量子モジュラー形式の研究状況である.

注意 2.1. 上で「離散版モジュラー形式」という表現を用いたが, これはモジュラー形式がモジュラー変換則を満たす複素関数であるのに対して, 量子モジュラー形式はモジュラー変換則を満たす$\mathbb{Q}$上の写像であることを表す意図によるものであり, 量子力学で離散的な物理量が扱われることとは**無関係である**. 確かに「量子モジュラー形式」という語には「量子力学と関係するモジュラー形式の類似物」という意味が込められている. だがこれは「古典力学 $\leftrightarrow$ 量子力学」という対立における「連続的な物理量 $\leftrightarrow$ 離散的な物理量」の類似として「モジュラー形式 $\leftrightarrow$ 量子モジュラー形式」という対応を考えているわけでは**ない**. また「q類似」($q \to 1$ による極限が古典的な状況を復元するように変数qを加えること) を「量子化」と呼ぶこともあるが, この意味で量子モジュラー形式が「モジュラー形式の量子化」となっているわけでも**ない**.

「量子モジュラー形式」の「量子」はもっと間接的な由来である. すなわち, 数理物理学における**場の量子論**の手法を用いて得られる**量子不変量**という3次元トポロジーの対象があり, その量子不変量が量子モジュラー形式の例として現れることに由来するのである. 結果的に量子モジュラー形式は「離散版モジュラー形式」とでも呼べるような対象となっているが, これは偶然であると思われる.[2]

2.2 量子モジュラー形式の定義

量子モジュラー形式が発見される契機となったのはLawrence–Zagier [34] による3次元トポロジーの研究である. 彼らはWittenの漸近展開予想という3次元多様体に関する重要な予想を非自明で最も簡単な場合に解決したのだが, その鍵となったのは量子不変量と呼ばれる重要な不変量が偽(フォルス)テータ関数と呼ばれる無限級数の有理数[3]への極限値として表示されることを発見したことにある. ここで偽(フォルス)テータ関数とは定数$N \in \mathbb{Z}_{>0}$, $a \in \mathbb{Z}$に対し変数τに関する無限級数として

$$\widetilde{\theta}_{N,a}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{sgn}(n) q^{N(n+a)^2}, \quad q := e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}$$

[2]奇妙な符合ではあるので何か意味を見出せるのかもと期待したくなるが, 実現は難しいように筆者は考えている. なぜなら「量子モジュラー形式 $\leftrightarrow$ 量子不変量 $\leftrightarrow$ 場の量子論」の類似としてのモジュラー形式の対応物がトポロジーや数理物理に知られているわけではなく (そもそもモジュラー形式には量子化するまでもなく始めからqが付いている), またそもそも量子不変量が何かしらの不変量の量子化になっているわけではないためである.

[3]ここで言う「有理数」とは, モジュラー形式論の用語で言えば「カスプ」のことである.

のような表示式で定義されるものである．通常のテータ関数は

$$\theta_{N,a}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{N(n+a)^2}$$

と定義されるが, この無限和に符号の項を付け加えたものが 偽(フォルス) テータ関数とナイーブに呼ばれている．通常のテータ関数はモジュラー変換, すなわち変換 $\tau \mapsto -1/\tau$ に関する綺麗な変換則を満たすが, 偽(フォルス) テータ関数のモジュラー変換には誤差項が現れる．この歪んだモジュラー変換則において有理数への極限値を取ることで量子不変量が歪んだモジュラー変換則を満たすことが分かり, その帰結として Witten の漸近展開予想が解決されるのである．

以上の証明をまとめると, 結局のところ Lawrence–Zagier が示したのは量子不変量を写像 $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{C}$ とみなしたとき, それが歪んだモジュラー変換則を満たすということである．Zagier [42] はそのような写像 $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{C}$ は量子不変量の他にも多々存在することを発見し, それを「量子モジュラー形式」と命名した．ただし Zagier は「量子モジュラー形式」の正確な定義を与えることはせず, 代わりに少なくとも

> ある整数 κ に対し[4], $f(x+1) - f(x)$, $f(x) - x^{-\kappa} f(-1/x)$ が $\mathbb{R}$ のある開集合上の実解析的関数に延長される

という性質を満たしているべきであると Zagier [42] は述べている．従って現状では「量子モジュラー形式」は公理的に定義された対象ではなく, 数学的な現象を捉えるための用語である．一方で近年の研究論文では簡便のために, 上の性質を持つ関数を量子モジュラー形式と定義する, と言い切ってしまうことが多いので注意が必要である．

上で述べた量子モジュラー形式が満たすべき性質においてポイントとなるのは「実解析的関数に延長される」という部分である．通常のモジュラー形式の定義では

$$f(x+1) = f(x), \quad f(x) = x^{-\kappa} f(-1/x)$$

というずっと強い性質を仮定するが, もしこの誤差項無しのモジュラー変換則を f が満たすなら, ある定数 $c \in \mathbb{C}$ が存在して任意の互いに素な整数 h と $k > 0$ に対し $f(h/k) = ck^{\kappa}$ と書けることが分かり ([45, 観察 2.1]), 結局 f としては自明なものしか現れないことになる．従って量子モジュラー形式の場合にはモジュラー変換則に誤差項が生じるというのが肝要なのである．

2.3 量子モジュラー形式の例

現在知られている量子モジュラー形式の多くは次のような状況で現れる．

例 2.2. 上半平面 $\mathbb{H} := \{\tau \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$ 上の写像 $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ は $f(x+1) = f(x)$ を満たし, またある整数 κ に対し $\varphi(\tau) := f(\tau) - \tau^{-\kappa} f(-1/\tau)$ が $\mathbb{R}$ のある開集合上の実解析的関数に延長され, 更に任意の有理数 $x \in \mathbb{Q}$ に対し極限値 $f(x) := \lim_{\tau \to x} f(\tau)$ が収束すると仮定する．このとき写像 $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{C}$ は定義から量子モジュラー形式である．

この例における写像 $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ の例としては, 上述した 偽(フォルス) テータ関数や 擬(モック) モジュラー形式の他, 重さが 2 か奇数の Eisenstein 級数, モジュラー形式の Eichler 積分などがある．それらの有理数への極限値として種々の量子モジュラー形式の例が知られている．例えば Zagier [42]

[4] ここで固定している整数 κ はモジュラー形式論における「重さ」のことである．モジュラー形式論において重さは通常 k という文字で表すが, 写像 $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{C}$ の変数として $x = h/k$ を用いるため使用を避けた．

は量子モジュラー形式の例として, Dedekind 和, Ramanujan の関数 $\sigma(q)$[5] の 1 の冪根への極限値, 固定された判別式を持つ二次形式のある種の和, Kontsevich 級数, Poincaré ホモロジー球面の Witten–Reshetikhin–Turaev 不変量, 色付き Jones 多項式の六つを挙げている．これら六つの例を一般化する研究も多数あり, 例えば Dedekind 和の量子モジュラー性は「相互則 (reciprocity)」とも呼ばれ, Bettin–Conrey [6] の余接和を始めとして様々な状況への一般化や精密化がなされている ([2, 7, 5, 17, 18])[6]．Ramanujan の関数 $\sigma(q)$ の量子モジュラー性に関連する研究は [46, 1 節] で解説されている．Kontsevich 級数の量子モジュラー性の一般化は 3.2 で述べる．Witten–Reshetikhin–Turaev 不変量の量子モジュラー性に関する研究は [45, 4 節] にまとめてある．色付き Jones 多項式の量子モジュラー性については, 8 の字結び目の場合に Galoufalidis–Zaiger [20, Section 8] が証明を与えており, 更に彼らは一般の双曲結び目に対して予想を定式化している (後述の 4.1 参照)．またトーラス結び目の場合には樋上 [27], 樋上–Kirillov [29, 30], 樋上–Lovejoy [31] による研究がある．

以上から分かるように量子モジュラー形式の研究はその出自に起因して, 抽象論を樹立する方向というよりはむしろ, 興味深い具体例を個々に調べることで様々な数学的対象が「量子モジュラー性」という何か新しい性質を持つことを述べることに重点を置く方向で現在のところ進展している．

3　量子モジュラー形式の q 級数的現象

本節では, 古典的なモジュラー形式には見られない量子モジュラー形式特有の q 級数的現象を紹介する．これらの現象はいずれも特殊な場合に技巧的な計算によって観察されており理論的な理解はなされていない．なおこのような研究状況は q 級数の研究においてよく現れるように思われる．

また, 本節で紹介する現象はいずれも 3 次元トポロジーにおける量子不変量の研究に端を発している．筆者の感覚では, 量子モジュラー形式について深い仕事をするには 3 次元トポロジーからの動機が必要不可欠で, 純粋に数論的な動機のみで研究を行おうとすると適切な一般化の方向性を見失ってしまうことがあるように感じられる．例えば, 3.2 で紹介する現象ではある mod12 の Dirichlet 指標が現れる．これは数論の立場からすると単に Dirichlet 指標であるという性質だけに着目してしまいそうになるが (筆者の場合), 背後に隠れている結び目や 3 次元多様体から現れているということが実はどうやら重要なようである．つまり 3 次元トポロジーの方が数論よりも繊細に物事を見ていると述べられるかもしれない．そのため, 本節で紹介する量子モジュラー形式の現象を研究するためには 3 次元トポロジーからの考察が非常に重要であると筆者には思われる．

本節を通して Pochhammer 記号 $(a;q)_n = (a)_n := (1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{n-1})$ と q 二項係数

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} := \begin{cases} \dfrac{(q)_n}{(q)_m (q)_{n-m}} & \text{if } 0 \le m \le n, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

を用いる．

[5] これは擬(モック)テータ関数ではないので注意が必要である．このことは松坂俊輝氏に教えて頂いた．

[6] これらの対象は正確には上述した意味での量子モジュラー形式にはならないが, そのモジュラー変換則に分子や分母が変数として現れるという量子モジュラー形式を考察する上で大変示唆的な性質を持つので Zagier [42, Example 0] において “prototype” と称されている．

3.1 Mock v.s. False 現象

Mock v.s. False 現象とは, 量子モジュラー形式 $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{C}$ に対してある擬(モック)テータ関数 $f_0\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ とある偽(フォルス)テータ関数 $f_0^*\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ が存在して, 任意の有理数 x に対し

$$f(x) = \lim_{\tau \to x} f_0(\tau) = \lim_{\tau \to -x} f_0^*(\tau)$$

と表される現象のことである. このような現象は全ての量子モジュラー形式に対して確認されているわけではなく, ごく限られた例でのみ知られている. この現象が起こるのは擬(モック)テータ関数 $f_0(\tau)$ の Euler 型表示式で $q \mapsto q^{-1}$ としたときに偽(フォルス)テータ関数 $f_0^*(\tau)$ の Euler 型表示式に一致する状況の場合である.

Mock v.s. False 現象を初めて発見したのも Lawrence–Zagier [34] である. 彼らは Poincaré ホモロジー球面に関連した Mock v.s. False 現象を観察している.

それを受けて樋上 [24] は多くの擬(モック)テータ関数に対し Mock v.s. False 現象を確かめ, それらのうちのいくつかはある種の 3 次元多様体の Witten–Reshetikhin–Turaev 不変量と対応することを示している (対応の一覧は [24, pp. 527] にある). 樋上の得た等式を一つだけ紹介する.

定理 3.1 ([24, Proposition 1 and 2, Theorem 1])**.** Ramanujan の 5 階のモックテータ関数

$$\chi_0(q) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{(q^{n+1})_n}$$

に対し

$$\chi_0^*(q) := 2 - \chi_0(q^{-1}) = 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n(3n-1)/2}}{(q^{n+1})_n}$$

とおくと

$$\chi_0^*(q) = \sum_{n \geq 0,\, n^2 \equiv 1 \bmod 30} (-1)^{\lfloor n/30 \rfloor} q^{(n^2-1)/120} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n (q^n)_n$$

が成り立つ.

樋上 [24] はここに登場した偽(フォルス)テータ関数 $\chi_0^*(q)$ が Poincaré ホモロジー球面 $\Sigma(2,3,5)$ の Witten–Reshetikhin–Turaev 不変量 $\mathrm{WRT}_N(\Sigma(2,3,5))(N \in \mathbb{Z}_{>0})$ と関係することに注意している. 実際, Lawrence–Zagier によって

$$\zeta_N(\zeta_N - 1)\,\mathrm{WRT}_N(\Sigma(2,3,5)) = 1 - \frac{1}{2} \lim_{q \to \zeta_N} \chi_0^*(q)$$

が示されている.

なお, 3.1 は次項で紹介する “strange identity” ともみなせることに注意する.

Bringmann–Folsom–Rhoades [9] は普遍擬(モック)テータ関数という数論由来の無限級数に対する Mock v.s. False 現象を与えている. 以下に抜粋して紹介する.

定理 3.2 (Bringmann–Folsom–Rhoades [9])**.** 複素数 q, w であって

$$|q| < 1, \quad w \notin \{0, q^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

を満たすものに対し以下の等式が成立する.

(1) ([9, Theorem 4.1 and 4.2]) 普遍擬(モック)テータ関数

$$g_2(w;q) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q)_n}{(w)_{n+1}(w^{-1}q)_{n+1}} q^{n(n+1)/2}$$

に対し

$$g_2(w^{-1};q^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} w^{2n+1} q^{n^2}$$

が成り立つ.
(2) ([9, Theorem 3.1 and 3.2]) 普遍擬(モック)テータ関数

$$g_3(w;q) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(w)_{n+1}(w^{-1}q)_{n+1}} q^{n(n+1)}$$

と Dirichlet 指標

$$\chi_{12}(n) := \left(\frac{12}{n}\right) = \begin{cases} (-1)^m & n = 6m \pm 1, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

に対し

$$g_3(w^{-1};q^{-1}) = -w - w^2 \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{12}(n) w^{(n-1)/2} q^{(n^2-1)/24}$$

が成り立つ.
(3) ([9, Theorem 5.1 and 5.2]) 普遍擬(モック)テータ関数

$$K(w;q^{1/2}) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q^{1/2})_n}{(wq)_{n+1}(w^{-1}q)_n} (-1)^n q^{n^2/2}$$

に対し

$$K(w;q^{-1}) = (1-w) \sum_{n=0}^{\infty} w^n q^{n(n+1)/2} + \frac{w(q;q^2)_\infty}{(wq^2;q^2)_\infty (w^{-1}q^2;q^2)_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{3}\right) (-w)^{n-1} q^{(n^2-1)/3}$$

が成り立つ.

3.2 Strange identities

3.2.1 Zagier によるオリジナルの主張

結び目に対して **Kashaev 不変量**という非常に重要な不変量が定義される. 例えば非自明で最も簡単な結び目である三葉結び目に対し, その Kashaev 不変量は

$$\left. \sum_{n=0}^{N-1} (q)_n \right|_{q=\zeta_N}, \quad N \in \mathbb{Z}_{>0}$$

と表示されることが知られている．ただしここで $\zeta_N := e^{2\pi\sqrt{-1}/N}$ とおいた．この値は **Kontsevich 級数**と呼ばれる奇妙な無限級数

$$F(q) := \sum_{n=0}^{\infty} (q)_n$$

の $q = \zeta_N$ での値である ($n \geq N$ なら $(q)_n|_{q=\zeta_N} = 0$ であることに注意)．Kontsevich 級数 $F(q)$ は $\mathbb{C}$ の任意の開集合上で収束しないという著しい性質を持つことが知られているが，一方で 1 の冪根においては実質的に有限和となるため値が定まるのである．また $F(q)$ は形式冪級数としては $\mathbb{Z}[[q]]$ の元とみなすことはできないが，$\mathbb{Z}[[1-q]]$ の元とみなすことはできる ($(q)_n \in (1-q)^n\mathbb{Z}[q]$ であるため)．その展開

$$F(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n (1-q)^n$$

に現れる係数 ξ_n は Stoimenow 数と呼ばれ，Vassiliev 不変量という結び目の重要な不変量の上界を与えることが Stoimenow [39] によって示されている．そこで ξ_n の $n \to \infty$ に関する漸近挙動を調べることは結び目理論において重要な問題である．この問題は Zagier [40, Theorem 4] によって解決されたが，Zagier はその証明の中で非常に興味深い恒等式を発見した．それこそが彼によって名付けられた以下の “strange identity” である[7]．

定理 3.3 ([40, Theorem 2])**.** Dirichlet 指標 $\chi_{12} \colon \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ を

$$\chi_{12}(n) := \left(\frac{12}{n}\right) = \begin{cases} (-1)^m & n = 6m \pm 1, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定めると

$$-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{12}(n) n q^{(n^2-1)/24} \text{ “=” } \sum_{n=0}^{\infty} (q)_n$$

が成り立つ．ただしここで「“=”」は q が 1 の冪根のときに両辺の値が一致することを表す (なお実際には値だけでなく q の 1 の冪根への極限の漸近展開も一致する)．

この等式の奇妙なところは，左辺が $\mathbb{Q}[[q]]$ の元でありながら右辺はそうではなく 1 の冪根でのみ値を取る無限級数であるという点である．3.3 は次の q 級数に関する恒等式から従う．

定理 3.4 ([40, Theorem 2])**.** $\mathbb{Q}[[q]]$ の元としての等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{12}(n) n q^{(n^2-1)/24} = 2\sum_{n=0}^{\infty} ((q)_\infty - (q)_n) + (q)_\infty \left(1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1-q^n}\right)$$

が成り立つ．

この等式の右辺に現れる $(q)_\infty$ は q の 1 の冪根への極限を取ると消えるため，系として 3.3 が得られるのである．ここで Kontsevich 級数は $(q)_n$ の無限和だったので $\mathbb{Q}[[q]]$ の元にはならないが，右辺第 1 項は $(q)_\infty - (q)_n \in q^n\mathbb{Q}[[q]]$ の元なので無限和が $\mathbb{Q}[[q]]$ 内の元を定めることに注意する．

[7] 和訳するなら「Zagier の奇妙な等式」だろうか．

Kontsevich 級数のみならず, 3.4 に現れる他の級数も興味深い. 右辺第 2 項には重さ 2 の Eisenstein 級数が現れており, また左辺の無限級数は「Dedekind エータ関数の 1/2 階微分」と呼ばれるものである. この呼称は Dedekind エータ関数

$$\eta(\tau) := q^{1/24}(q)_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{12}(n) q^{(n^2-1)/24}$$

(この等式は Euler の五角数定理から従う) の $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ 階微分

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{12}(n) \left(2\pi\sqrt{-1}\frac{n^2-1}{24}\right)^k q^{(n^2-1)/24}$$

において形式的に $k = 1/2$ を代入することで左辺の無限級数がおおよそ復元できることに由来する. また左辺は「単項テータ関数 (unary theta series)」とも呼ばれ, その極限値は三葉結び目を -1 手術することで得られる 3 次元多様体である Poincaré ホモロジー球面の Witten–Reshetikhin–Turaev 不変量となるため, 3 次元トポロジーに由来する無限級数でもある.

3.4 における左辺の無限級数の 1 の冪根への極限に関する漸近展開は Mellin 変換による手法 ([34, pp. 98, Proposition], [45, 命題 6.5]) や Euler–Maclaurin の和公式による手法 ([11, Equation (2.8)], [14, Lemma 2.2], [45, 補題 6.6]) によって求めることができる. 特に $q \to 1$ への極限に関する漸近展開は次のように無限級数の等式として記述される ($F(q) \in \mathbb{Z}[[1-q]]$ だったので $F(q^{-t}) \in \mathbb{Q}[[t]]$ であることに注意).

系 3.5 ([40, Equation (4) and Theorem 3])**.** $\mathbb{Q}[[t]]$ 内での等式

$$q^{-1/24}\sum_{n=0}^{\infty}(q)_n\Bigg|_{q=e^{-t}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L(-2n-1,\chi_{12})}{n!}\left(-\frac{t}{24}\right)^n$$

が成り立つ.

Strange identity を拡張する研究の論文においてはこの形で strange identity が記述されることも多い. 3.5 において右辺が L 関数の特殊値の母関数となっていることは数論屋としては非常に興味深く思われるが, 一般に単項テータ関数の漸近展開に L 関数の特殊値が現れることは上で述べた漸近展開の手法から従うため, その部分はあまり深い数学的現象ではないように筆者には思われる. この等式におけるポイントはむしろ 3 次元トポロジーに由来するという部分にあると思われる. そのため等式に現れる χ_{12} を任意の Dirichlet 指標に拡張しようとしても中々うまくいかず, 3 次元トポロジーを起点に拡張を試みる方針の方が成功しているように思われる.

3.2.2 3 次元トポロジー的観点による拡張

そのような方針の第一歩として, strange identity を様々な結び目の場合に拡張することが考えられる. Kontsevich 級数は三葉結び目の Kashaev 不変量だったので, 他の結び目に対しても Kashaev 不変量を調べることで strange identity の拡張が得られることが期待される.

一般に量子不変量を計算するのは非常に困難であるため, 3 次元トポロジーの研究においては特別な結び目やそれを含む無限族に対して計算を試みるという方針がとられることが多いようである. 三葉結び目を含む結び目の無限族としてはトーラス結び目 $T_{p,q}$ が知られている (三葉結び目はトーラス結び目 $T_{(3,2)}$ である) ので, この無限族に対して strange identity を拡張できるかというのは自然な問いであろう. 樋上 [23] はトーラス結び目 $T_{(2k+1,2)}$ に対して Kashaev 不変量を計算することにより, 以下の strange identity 型の恒等式の予想群を得た.

予想 3.6 ([23, Conjecture 3.10])**.** $k \geq 1$ に対し

$$
\begin{aligned}
F^{(2k+3,2)}(q) := & \sum_{n_1\geq 0,\, n_2\geq\cdots\geq n_{2k}\geq 0} \frac{(q)_{n_1+n_2}}{(q)_{n_2-n_3}\cdots(q)_{n_{2k-1}-n_{2k}}}(-1)^{n_3+\cdots+n_{2k}} \\
& \quad \times q^{-n_1n_2+(n_3^2+\cdots n_{2k}^2+n_3+\cdots+n_{2k})/2} \\
= & \sum_{m_1,\dots m_{2k}=0}^{\infty} \frac{(q)_{m_1+\cdots+m_{2k}}}{(q)_{m_2}\cdots(q)_{m_{2k-1}}}(-1)^{3m_3+\cdots+2km_{2k}} \\
& \quad \times q^{-m_1m_2+\sum_{i=3}^{2k}((i/2-1-m_1)m_i+(m_i+\cdots m_{2k})^2/2)},
\end{aligned}
$$

$$
\chi_{8k+12}(n) := \begin{cases} \varepsilon\varepsilon' & n \equiv 4k+6+(2k+3)\varepsilon+2\varepsilon' \bmod 8k+12 \text{ for some } \varepsilon, \varepsilon' \in \{\pm 1\}, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}
$$

とおくと

$$
F^{(2k+3,2)}(e^{-t}) = -\frac{1}{2}e^{t(2k+1)^2/(2k+3)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L(-2n-1,\chi_{8k+12})}{n!}\left(-\frac{t}{8(2k+3)}\right)^n
$$

が成り立つ.

この予想は筆者が調べた限りでは現在でも解かれていないようである.

また, 樋上 [27] はトーラス結び目の Kashaev 不変量に関連して以下の公式を得ている.

定理 3.7 ([27, Theorem 1])**.** 指標 $\chi_{20}^{(0)}, \chi_{20}^{(1)} \colon \mathbb{Z}/20\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ を

$$
\chi_{20}^{(0)}(n) := \begin{cases} 1 & n \equiv \pm 3 \bmod 20, \\ -1 & n \equiv \pm 7 \bmod 20, \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases} \quad
\chi_{20}^{(1)}(n) := \begin{cases} 1 & n \equiv \pm 1 \bmod 20, \\ -1 & n \equiv \pm 9 \bmod 20, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}
$$

で定義すると

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}(q)_n\sum_{m=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} q^{m^2+m}\Bigg|_{q=e^{-t}} &= -\frac{1}{2}q^{-9/40}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L(-2n-1,\chi_{20}^{(0)})}{n!}\left(-\frac{t}{40}\right)^n, \\
\sum_{n=0}^{\infty}(q)_{n-1}\sum_{m=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} q^{m^2}\Bigg|_{q=e^{-t}} &= -\frac{1}{2}q^{-1/40}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L(-2n-1,\chi_{20}^{(1)})}{n!}\left(-\frac{t}{40}\right)^n
\end{aligned}
$$

が成り立つ.

三葉結び目を含む結び目の無限族としてはツイスト結び目 K_p $(p \in \mathbb{Z}_{>0})$ というクラスも知られている. 樋上 [28] はツイスト結び目の Kashaev 不変量を考察することで次の strange identity 型の恒等式を証明している.

定理 3.8 ([28, Theorem 3.4])**.** 正整数 $p \geq 2$ に対し周期写像 $\chi_{12(6p-1)} \colon \mathbb{Z}/12(6p-1)\mathbb{Z} \to \{0, \pm 1\}$ を

$$
\chi_{12(6p-1)}(n) := \begin{cases} -\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 & \begin{array}{l} n \equiv 6(6p-1)+6\varepsilon_1+2(6p-1)\varepsilon_2+3(6p-1)\varepsilon_3 \\ \bmod 12(6p-1) \text{ for some } \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \{\pm 1\}, \end{array} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}
$$

とおくと

$$\sum_{0\le n_1\le\cdots\le n_p} q^{n_p}(q^{n_p+1})_{n_p+1}\prod_{i=1}^{p-1} q^{n_i(n_i+1)}\begin{bmatrix} n_{i+1} \\ n_i \end{bmatrix} \text{``$=$''} -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\chi_{12(6p-1)}(n)q^{(n^2-(6p+5)^2)/24(6p-1)}$$

が成り立つ.

なお, この結果の $p=1$ の場合は 3.1 に相当する.

3.8 の樋上 [28] による証明はトポロジーの手法を用いる大変興味深いものである. 議論の出発点はツイスト結び目 K_p の -1 手術によって得られる 3 次元多様体が Brieskorn ホモロジー球面 $\Sigma(2,3,6p-1)$ と呼ばれるものになることである. このことを用いると $\Sigma(2,3,6p-1)$ の unified Witten–Reshetikhin–Turaev 不変量を K_p の射影図から計算することができる. ここで unified Witten–Reshetikhin–Turaev 不変量とは葉廣 [21, 22] によって 3 次元多様体に対し定義された変数 q を持つ量子不変量で, その 1 の冪根における値が Witten–Reshetikhin–Turaev 不変量を復元する ([21, Theorem 4.4],[22, Theorem 1.2]) という著しい性質を持っている. そのため $\Sigma(2,3,6p-1)$ の Witten–Reshetikhin–Turaev 不変量の変数 q に関する表示式が K_p から得られる. この表示式こそが主張の左辺に現れる無限級数である. 一方で $\Sigma(2,3,6p-1)$ の Witten–Reshetikhin–Turaev 不変量はある偽(フォルス)テータ関数の冪根への極限値として表されることが樋上 [25] によって示されているが, その偽(フォルス)テータ関数こそが主張の右辺に現れる無限級数である. 以上の議論から 3.8 の等式が得られるのである.

以上の議論では葉廣の定理という飛び道具を使っており大変示唆的である. 一方でこの方法では主張の「“=”」という等式 (q が 1 の冪根のときに両辺の値が一致することを表す) を 3.4 のように $(q)_\infty$ を含む q 級数の等式の形に持ち上げることはできないように思われる. そのようなことが純粋な q 級数の議論のみから示すことが出来るのかという問いは興味深い. もし出来るのであれば葉廣の定理を用いない 3.8 の別証明が与えられることになる.

3.2.3 数論的観点による拡張

次に strange identity を純粋に数論的観点から拡張した研究を紹介する.

一つ目の研究は Ramanujan によるものである. いわゆる “Ramanujan’s Lost Notebook” に遺された以下の公式は Zagier の strange identity の変種とみなせる.

定理 3.9 ([1, Entry 7.3.1, 7.3.2, 7.3.3])**.**

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n(n+1)/2}}{(-q)_n} = 1+q\sum_{n=0}^{\infty}(q)_n(-q)^n = 2\sum_{n=0}^{\infty}((-q)_\infty-(-q)_n)+(q)_\infty\left(1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{1-q^n}\right).$$

この等式に 3 次元トポロジーによる意味を付けられるのかは筆者には分からない.

Strange identity に L 関数の特殊値の母関数が現れることに注目し, その変種を考察した研究として Andrews–Jiménez-Urroz–Ono [3], Lovejoy–Ono [33], Bringmann–Kane [10, Theorem 1.2] がある. [3] と [33] には Ono [38, Chapter 10] による解説もある.

Andrews–Jiménez-Urroz–Ono [3] が示した公式は次のものである.

定理 3.10 ([3, Theorem 4 and 5], [38, Theorem 10.23])**.** $\zeta(s)$ を Riemann ゼータ関数とし

$$\chi_2(n) := \begin{cases} 1 & n\equiv \pm 1 \bmod 8, \\ -1 & n\equiv \pm 3 \bmod 8, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおくと

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\zeta(-2n-1)}{n!}(4^{n+1}-1)\,(-t)^n=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q)_n}{(-q)_n}\bigg|_{q=e^{-t}},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L(-2n-1,\chi_2)}{n!}\left(-\frac{t}{8}\right)^n=-2e^{-t/8}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q)_n}{(-q^{1/2})_n}\bigg|_{q=e^{-2t}}$$

が成り立つ.

Lovejoy–Ono [33] は部分テータ関数とフォルステータ関数に関する q 級数の公式を示し, その系として以下の公式を得た.

定理 3.11. (1) (Lovejoy–Ono [33, Example 1 and 2], [38, Example 10.20 and 10.21])

$$\chi_{-4}(n):=\begin{cases}\pm 1 & n\equiv \pm 1 \bmod 4,\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

とおくと

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L(-2n,\chi_{-4})}{n!}\,(-t)^n&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q^{1/2})_n}{(-q^{1/2})_{n+1}}q^{n/2+1/4}\bigg|_{q=e^{-4t}}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q)_n(q^{-1/2})_n(q^{1/2})_{n+1}}{(q)_{2n+1}}(-1)^nq^{n(n+1)/2+1/16}\bigg|_{q=e^{-16t}}\end{aligned}$$

が成り立つ.
(2) (Lovejoy–Ono [33, Example 2], [38, Example 10.22])

$$\chi_5(n):=\left(\frac{5}{n}\right)=\begin{cases}1 & n\equiv\pm1 \bmod 5,\\ -1 & n\equiv \pm 2 \bmod 5,\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

とおくと

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L(-2n-1,\chi_5)}{n!}\,(-t)^n=\frac{d}{dz}G_{\chi_5}(z;q)\bigg|_{z=1,q=e^{-t}}$$

が成り立つ. ただし

$$\begin{aligned}G_{\chi_5}(z;q^{1/25}):=\sum_{n=0}^{\infty}&\left((z^{-5}q^{2/5})_n(z^5q^{3/5})_{n+1}z^{-1}q^{1/25}-(z^{-5}q^{4/5})_n(z^5q^{1/5})_{n+1}z^{-2}q^{4/25}\right)\\&\times\frac{(q)_n}{(q)_{2n+1}}(-1)^nq^{n(n+1)/2}\end{aligned}$$

とおく.

また Bringmann–Kane [10] は実二次体の Dedekind ゼータ関数の特殊値の母関数に関する strange identity を与えている.

定理 3.12 (Bringmann–Kane [10, Theorem 1.2])**.** 実二次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ の Dedekind ゼータ関数と Hecke L 関数

$$\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})}(s) := \sum_{I \subset \mathbb{Z}[\sqrt{2}]} N(I)^{-s}, \quad L_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})}\left(s, \left(\frac{-4}{N(\cdot)}\right)\right) := \sum_{I \subset \mathbb{Z}[\sqrt{2}]} \left(\frac{-4}{N(I)}\right) N(I)^{-s}$$

に対し

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})}(-n)}{n!} \left(-\frac{t}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left.\frac{\theta_{0,n}(-q)}{(-q;-q)_n(-q;-q^2)_{n+1}}\right|_{q=e^{-t}},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})}(-n)}{n!} \left(-\frac{t}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left.\frac{\theta_{0,n}(-q)}{(-q;-q)_n(-q;-q^2)_{n+1}}\right|_{q=e^{-t}}$$

が成り立つ. ただしここで

$$\theta_{i,n}(q) := (q)_n \sum_{j=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-2j \end{bmatrix} q^{(2j+i)^2/2}$$

とおいた.

4 量子モジュラー形式にまつわる未解決問題

本稿の冒頭でも強調したように量子モジュラー形式の研究状況はまだまだ発展途上である. 本節では本稿の締めくくりとして量子モジュラー形式にまつわる様々な未解決問題を述べる.

2 節で述べたように量子モジュラー形式には 3 次元トポロジーに由来する例が多くあった. そこで次のナイーブな予想が考えられる.

予想 4.1 (量子モジュラー性予想 (ナイーブ版), Gukov, Garoufalidis–Zagier [20])**.**
量子不変量は何らかの量子モジュラー性を持つであろう.

なお実際には Gukov や Garoufalidis–Zagier [20] はホモロジカルブロックや色付き Jones 多項式といった具体的な量子不変量に対して明確に量子モジュラー性を予想している. それら予想群に通底する哲学を筆者なりにまとめたのが 4.1 である.

より明確に述べられている形の量子モジュラー性予想としては, Garoufalidis–Zagier による “Refined Quantum Modularity Conjecture” ([20, pp. 33, Equation (56)]) や, Gukov–Pei–Putrov–Vafa らによる次の予想がある.

予想 4.2. (1) (Gukov–Pei–Putrov–Vafa [19, Conjecture 2.1, Equation (A.28)]) 負定値鉛管多様体に対し, そのホモロジカルブロックの 1 の冪根への極限は Witten–Reshetikhin–Turaev 不変量で記述されるであろう.
(2) (Gukov–Pei–Putrov–Vafa [19], Bringmann–Mahlburg–Milas [14, Conjecture 1.4]) 次数 3 以上の頂点が r 個の重み付き木から定まる負定値鉛管多様体に対し, その Witten–Reshetikhin–Turaev 不変量は深さ r の量子モジュラー形式をなすであろう.

この予想は Seifert ホモロジー球面に対しては Lawrence–Zagier [34], 樋上 [25, 26] によって解決されており, 更に別証明が藤–岩木–村上–寺嶋 [16], Andersen–Mistegard [4], 松坂–寺

嶋 [36] によって与えられている．より広いクラスの多様体に対しては未解決だが, Bringmann–Mahlburg–Milas [14], 森–村上 [35], 村上 [37] による進展がある．詳細は [45, 4 節] を参照のこと．

純粋に数論的な動機から量子モジュラー形式を追及する方向としては以下の問題が考えられる．

問題 4.3. (1)「量子モジュラー形式」の適切な定義を与え, それらがなす $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間の有限次元性を証明せよ．
(2) 量子モジュラー形式のなすベクトル空間への全射があるような擬(モック)モジュラー形式や偽(フォルス)モジュラー形式 ([13]) のなすベクトル空間を構成し, それら二つのベクトル空間の同型を示すことによって Mock v.s. False 現象を拡張・定式化せよ．
(3) 量子モジュラー形式のなすベクトル空間を $\mathbb{C}[[q]]$ や $\mathbb{C}[[1-q]]$ の部分空間として特徴付けよ．
(4) 量子モジュラー形式のなすベクトル空間を葉廣環

$$\widehat{\mathbb{Z}[q]} := \varprojlim_{n} \mathbb{Z}[q]/((q)_n) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n(q)(q)_n \;\middle|\; a_n(q) \in \mathbb{Z}[q] \right\}$$

の部分空間として特徴付けることによって strange identity を拡張・定式化せよ．
(5) 量子モジュラー形式に対して「Fourier 係数」に相当する量を定義し, その p 進的な振る舞いについて研究せよ．
(6) 量子モジュラー形式への Hecke 作用の研究としては Lee [32] があるが, これを拡張する形で量子モジュラー形式への Hecke 作用を定義し, Hecke 固有形式の例を与えよ．また量子モジュラー形式の L 関数を定義し, その Euler 積表示を与えよ．
(7) 量子モジュラー形式の幾何的解釈および保型表現論的解釈を与えよ．
(8) 量子モジュラー形式のモジュラー変換に現れる誤差項の理論的解釈を与えよ．またそれに L 関数の特殊値が現れる理由を解明せよ．
(9) Dedekind 和やその拡張概念が満たす量子モジュラー性の理論的解釈を与えよ．
(10) Zagier [42] が与えた六つの量子モジュラー形式の例を一般化せよ．
(11) 多重 Eisenstein 級数のモジュラー変換則を記述し, それによって多重ゼータ値の量子モジュラー性を証明せよ．
(12) 深さ付き量子モジュラー形式や指標付き量子モジュラー形式 (Bringmann–Kaszian–Milas [11]), ベクトル値深さ付き量子モジュラー形式 ([12]) に対して上の問いを追及せよ．
(13) 偽(フォルス)不定値テータ関数や擬(モック) Maass テータ関数 ([44]) などの様々なテータ関数の変種に対してその量子モジュラー性を記述せよ．

これらの問題はひとえに「量子モジュラー形式とは一体何者なのか？」という問いに尽きている．この神秘的な対象が一体どのような相貌を具えているのか, 心魅かれてやまない．

謝辞

第 14 回福岡数論研究集会にて私に講演の機会を下さった世話人の金子昌信先生 (九州大学), 権寧魯先生 (九州大学), 岸康弘先生 (愛知教育大学), 松坂俊輝さん (九州大学) に深く感謝申し上げます．私の研究生活を通して懇切丁寧にご指導頂いた指導教員である山内卓也先生 (東北大学) に深く感謝いたします．本稿の内容については寺嶋郁二先生 (東北大学), 森祥仁さん (東北大学), 樋上和弘先生 (九州大学), 松坂俊輝さん (九州大学), Robert Osbern さん (University

College Dublin) に多くのご教授を頂きました．また本研究は JSPS 科研費 JP20J20308 の助成を受けたものです．ここに感謝いたします．

参考文献

[1] G. E. Andrews and B. C. Berndt, Ramanujan's lost notebook. Part II, Springer, New York, 2009.

[2] J. S. Auli, A. Bayad and M. Beck, Reciprocity Theorems for Bettin–Conrey Sums, preprint, arXiv:1601.06839.

[3] G. E. Andrews, J. Jiménez-Urroz and K. Ono, q-series identities and values of certain L-functions, Duke Math. J. **108** (2001), no. 3, 395–419.

[4] J. E. Andersen and W. E. Mistegard, Resurgence Analysis of Quantum Invariants of Seifert Fibered Homology Spheres, preprint, arXiv:1811.05376v4.

[5] S. Bettin and J. B. Conrey, Period functions and cotangent sums, Algebra Number Theory **7** (2013), no. 1, 215–242.

[6] S. Bettin and J. B. Conrey, A reciprocity formula for a cotangent sum, Int. Math. Res. Not. IMRN 2013, no. 24, 5709–5726.

[7] S. Bettin, On the reciprocity law for the twisted second moment of Dirichlet L-functions, Trans. Amer. Math. Soc. **368** (2016), no. 10, 6887–6914.

[8] J. H. Bruinier and J. Funke, On two geometric theta lifts, Duke Math. J. **125** (2004), no. 1, 45–90.

[9] K. Bringmann A. Folsom and R. C. Rhoades, Partial theta functions and mock modular forms as q-hypergeometric series, Ramanujan J. **29** (2012), no. 1, 295–310.

[10] K. Bringmann and B. Kane, New identities involving sums of the tails related to real quadratic fields, Ramanujan J. **23** (2010), no. 1-3, 243–251.

[11] K. Bringmann, J. Kaszian and A. Milas, Higher depth quantum modular forms, multiple Eichler integrals, and $\mathfrak{sl}_3$ false theta functions, Res. Math. Sci. **6** (2019), no. 2, Paper No. 20, 41 pp.

[12] K. Bringmann, J. Kaszian and A. Milas, Vector-valued higher depth quantum modular forms and higher Mordell integrals, J. Math. Anal. Appl. **480** (2019), no. 2, 123397, 22 pp.

[13] K. Bringmann, J. Kaszian, A. Milas and C. Nazaroglu, Higher depth false modular forms, preprint, arXiv:2109.00394.

[14] K. Bringmann, K. Mahlburg and A. Milas, Higher depth quantum modular forms and plumbed 3-manifolds, Lett. Math. Phys. **110** (2020), no. 10, 2675–2702.

[15] M. Eichler and D. Zagier, The theory of Jacobi forms, Progress in Mathematics, 55, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1985.

[16] H. Fuji, K. Iwaki, H. Murakami and Y. Terashima, Witten-Reshetikhin-Turaev function for a knot in Seifert manifolds, Comm. Math. Phys. **386** (2021), no. 1, 225–251.

[17] A. Folsom, Twisted Eisenstein series, cotangent-zeta sums, and quantum modular forms, Trans. London Math. Soc. **7** (2020), no. 1, 33–48.

[18] M. Goubi, A. Bayad and M. O. Hernane, Explicit and asymptotic formulae for Vasyunin-cotangent sums, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) **102(116)** (2017), 155–174.

[19] S. Gukov, D. Pei, P. Putrov and C. Vafa, BPS spectra and 3-manifold invariants, J. Knot Theory Ramifications **29** (2020), no. 2, 2040003, 85 pp.

[20] S. Garoufalidis and D. Zagier, Knots, perturbative series and quantum modularity, preprint, arXiv:2111.06645.

[21] K. Habiro, On the quantum $\mathfrak{sl}_2$ invariants of knots and integral homology spheres, In: Invariants of knots and 3-manifolds (Kyoto, 2001), 55–68, Geom. Topol. Monogr., 4, Geom. Topol. Publ., Coventry, 2002.

[22] K. Habiro, A unified Witten-Reshetikhin-Turaev invariant for integral homology spheres, Invent. Math. **171** (2008), no. 1, 1–81.

[23] K. Hikami, Volume conjecture and asymptotic expansion of q-series, Experiment. Math. **12** (2003), no. 3, 319–337.

[24] K. Hikami, Mock (false) theta functions as quantum invariants, Regul. Chaotic Dyn. **10** (2005), no. 4, 509–530.

[25] K. Hikami, On the quantum invariant for the Brieskorn homology spheres, Internat. J. Math. **16** (2005), no. 6, 661–685.

[26] K. Hikami, On the quantum invariants for the spherical Seifert manifolds, Comm. Math. Phys. **268** (2006), no. 2, 285–319.

[27] K. Hikami, q-series and L-functions related to half-derivatives of the Andrews–Gordon identity, Ramanujan J. **11** (2006), no. 2, 175–197.

[28] K. Hikami, Hecke type formula for unified Witten-Reshetikhin-Turaev invariants as higher-order mock theta functions, Int. Math. Res. Not. IMRN 2007, no. 7, Art. ID rnm 022, 32 pp.

[29] K. Hikami and A. N. Kirillov, Torus knot and minimal model, Phys. Lett. B **575** (2003), no. 3-4, 343–348.

[30] K. Hikami and A. N. Kirillov, Hypergeometric generating function of L-function, Slater's identities, and quantum invariant, St. Petersburg Math. J. **17** (2006), no. 1, 143–156.

[31] K. Hikami and J. Lovejoy, Torus knots and quantum modular forms, Res. Math. Sci. **2** (2015), no. 1, 1–15.

[32] S. Lee, Quantum modular forms and Hecke operators, Res. Number Theory **4** (2018), no. 2, 1–13.

[33] J. Lovejoy and K. Ono, Hypergeometric generating functions for values of Dirichlet and other L functions, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **100** (2003), no. 12, 6904–6909.

[34] R. Lawrence and D. Zagier, Modular forms and quantum invariants of 3-manifolds, Asian J. Math. **3** (1999), no. 1, 93–107.

[35] A. Mori and Y. Murakami, Witten–Reshetikhin–Turaev invariants, homological blocks, and quantum modular forms, preprint, arXiv:2110.10958.

[36] T. Matsusaka and Y. Terashima, Modular transformations of homological blocks for Seifert fibered homology 3-spheres, preprint, arXiv:2112.06210.

[37] Y. Murakami, Witten–Reshetikhin–Turaev invariants and homological blocks for plumbed homology spheres, preprint, arXiv:2205.01282.

[38] K. Ono, The web of modularity: arithmetic of the coefficients of modular forms and q-series, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 102, Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[39] A. Stoimenow, Enumeration of chord diagrams and an upper bound for Vassiliev invariants, J. Knot Theory Ramifications **7** (1998), no. 1, 93–114.

[40] D. Zagier, Vassiliev invariants and a strange identity related to the Dedekind eta-function, Topology **40** (2001), no. 5, 945–960.

[41] D. Zagier, Ramanujan's mock theta functions and their applications (after Zwegers and Ono-Bringmann), Seminaire Bourbaki, Vol. 2007/2008, Asterisque, No. 326 (2009), Exp. No. 986, vii–viii, 143–164 (2010).

[42] D. Zagier, Quantum modular forms, In: Quanta of maths, 659–675, Clay Math. Proc., 11, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010.

[43] S. P. Zwegers, Mock theta functions, PhD thesis, Universiteit Utrecht, 2002.

[44] S. P. Zwegers, Mock Maass theta functions, Q. J. Math. **63** (2012), no. 3, 753–770.

[45] 村上友哉, 非 Seifert 多様体に対する量子不変量の量子モジュラー性, preprint, RIMS 講究録に掲載予定.

[46] 松坂俊輝, 量子モジュラー形式と Seifert 多様体に対する homological block の保型変換則, preprint, RIMS 講究録に掲載予定.