L 関数の零点と非斉次の微分方程式について

金城 俊輝 (九州大学)

1 導入

先行研究となる志村五郎の研究 [S] の内容と, その背景となる諸結果に関して復習する. Riemann のゼータ関数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \quad (1 < \mathrm{Re}\, s)$$

に代表される L 関数の解析的性質に関する研究は, Riemann 以来数多くの数学者によってなされてきた. 主な主題としては, 解析接続, 関数等式, 零点の分布などがある. 特に次に述べる予想は, 多くの数学者を魅了してきた.

予想 1.1 (Riemann)**.** Riemann のゼータ関数 $\zeta(s)$ の非自明な零点の実部はすべて 1/2 である.

Riemann 自身は素数定理の精密化への興味からこの予想に至り, 発表以後様々な数学者によって証明が試みられてきた. その中で, 現在有力な証明の方針として考えられているのは, Hilbelt と Polya による次の主張である.

予想 1.2 (Hilbert-Polya)**.** $\zeta(s)$ の零点は, ある Hilbert 空間上の自己共役作用素の固有値と対応がある.

Hilbert と Polya はそれぞれ独立にこのような主張をした (cf. [W] [O]). この予想は発表当時はそれほど注視されてはいなかったようだが, 後の様々な研究により次第に注目されるようになっていった. 特に次に述べる Selberg の結果は Hilbert と Polya の予想の証明が Riemann 予想の証明に有効だと考えるには十分な結果のひとつである. Selberg は, Selberg のゼータ関数と呼ばれる Riemann 多様体に付随する幾何学的な量から定まるオイラー積によって定義される関数に関するリーマン予想を証明した. より正確にはリーマン予想と考えている多様体のある作用素の固有値問題を関連付けることで Riemann 予想を証明した. 以下, Riemann 面 $\Gamma\backslash\mathcal{H}_2$ (h_2 は複素上半平面, Γ は第一種 Fucks 群) の場合に主張を述べる. この場合, Selberg のゼータ関数 $\zeta_{\mathrm{Sel}}(s)$ は

$$\zeta_{\mathrm{Sel}}(s) = \prod_{l \in \mathrm{Prim}(\Gamma)} \prod_{n=0}^{\infty} (1 - N(l)^{-s-n})$$

で与えられる. ここで, $\mathrm{Prim}(\Gamma)$ は素測地線の共役類の集合, $N(l)$ は l のノルム.

定理 1.1 (Selberg)**.** s_0 を $\zeta_{Sel}(s)$ の零点とすると, 双曲ラプラシアン $\mathfrak{L}_2 = y^2(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})$ について, 固有値が $s_0(1-s_0)$ の $\mathcal{H}_2$ 上二乗可積分な Γ に関する保型関数が存在する. 逆に,$\mathfrak{L}$ に関して固有値が $s_0(1-s_0)$ の $\mathcal{H}_2$ 上の二乗可積分な Γ に関する保型関数が存在すれば, s は Selberg のゼータ関数の零点である.

志村五郎は, Selberg の結果について, リーマンのゼータ関数のようなディリクレ級数に対して類似の結果を求めること, 特に保型性を持つ関数の空間でラプラシアンの固有値とディリクレ級数の零点を結び付けることを問題にした. 志村は, 二つの $SL_2(\mathbb{Z})$ に関する保型形式 $f=\sum a_n q^n$,$g=\sum b_n q^n$ $(q=e^{2\pi iz})$ の Rankin-Selberg 型の L 関数, つまり,

$$\sum \overline{a_n} b_n n^{-s}$$

で定義される L 関数について, 次のような主張を得た. 簡単のため f と g の重さが等しいと仮定する.

定理 1.2 (Shimura)**.** $s(1-s)$ をラプラシアン $\mathfrak{L}_2$ の固有値, 実解析的アイゼンシュタイン級数 E_s の極, 1/2 のいずれでもないと仮定する. $L(s)=(4\pi)^{-s}\Gamma(s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overline{a_n}b_n}{n^s}$ に対して, 次の性質を満たす関数 $F_s:\mathcal{H}_2\to\mathbb{C}$ が存在する.

1. F_s は C^∞ 級の $SL_2(\mathbb{Z})$ に関する保型関数.
2. $[\mathfrak{L}_2-s(1-s)]F_s=p$.
3. $F_s(z)=L(s)y^{1-s}/(2s-1)+O(e^{-\pi y})$ as $y\to\infty$.
4. $\mathrm{Re}\,(s)>1/2$ または $L(s)=0$ ならば, $\mathrm{Im}\,[s(1-s)]\langle F_s,F_s\rangle=\mathrm{Im}\,[\langle F_s,p\rangle]$.
5. $s=1/2+it$ (t は 0 でない実数) に対して, $4t\mathrm{Im}\,[\langle F_s,p\rangle]=|L(s)|^2$ if $s=1/2+it$ with $0\neq t\in\mathbb{R}$.
6. $L(s_0)=0$ のとき, $(1-2s_0)\langle E_{\bar{s_0}},F_{s_0}\rangle=dL(s_0)/ds$.

ただし, ここで $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $\mathcal{H}_2$ の Peterson 内積.

特に $\mathrm{Re}\,s\geq 1/2$ となる $L(s)$ の零点 s_0 について, $\mathrm{Im}\,[\langle F_{s_0},p\rangle]=0$ と $\mathrm{Re}\,(s_0)=1/2$ であることが同値となる. つまり, $\mathrm{Re}\,(s_0)>1/2$ で $\mathrm{Im}\,[\langle F_{s_0},p\rangle]\neq 0$ を示せれば, $L(s)$ に関する Riemann 予想が証明できることになる. さらに志村は $\eta(z)$ のべき乗に付随する対称 L 関数を考えることで, 上記の $L(s)$ として, Riemann のゼータ関数を因子に持つような L 関数が取れることを指摘した. そして, 高次の群上の保型関数で L 関数とこのような対応をする保型関数の族が構成できるかを問題として提出した.

今回, 志村の結果を n 次元実上半空間上の保型形式で志村の結果の類似を得たので, 次節で紹介する.

2 主結果

主結果を説明するためにまず, 記号, 用語について準備する.

$$\mathcal{H}_n=\{(x_1,\cdots,x_{n-1},y)\mid y>0\},\qquad d\mu(z)=\frac{dx_1\cdots dx_{n-1}dy}{y^n},$$
$$\mathfrak{L}_n=-(\partial^2/\partial x_1^2+\cdots+\partial/\partial x_{n-1}^2+\partial/\partial x_{n-1}^2)+(n-2)y\partial/\partial y,\quad \lambda(s)=s(k-1-s).$$

$\mathcal{H}_n$ を n 次元上半空間という. $\mathcal{H}_n$ には, 符号 $(1,n-1)$ の直交群の単位連結成分 $SO_0(1,n-1)$ が推移的に作用しており, $d\mu(z)$ は $SO_0(1,n-1)$ の作用について不変な測度となる. $z\in\mathcal{H}_n$ への $\gamma\in SO_o(1,n-1)$ の作用を γz で表すことにする. Γ を $SO_0(1,n-1)$ の離散部分群で余有限かつ余コンパクトでないもので, cusp の同値類の個数が 1 であると仮定する. このとき, Γ に関する (Maass の) 保型関数とは, 次の条件を満たす関数 $f:\mathcal{H}_n\to\mathbb{C}$ をいう.

1. (保型性) $f(\gamma z) = f(z)$.

2. $(\mathfrak{L}_n - \lambda(s))\, f(z) = 0$.

3. (Fourier 展開)

$$f(z) = \sum_{0 \neq \nu \in L} a_\mu y^{\frac{n}{2}} K_{s-\frac{n-1}{2}}(2\pi|\nu|y) e^{2\pi\langle\langle v,x\rangle\rangle} + \begin{cases} a_0 y^s + b_0 y^{n-1-s} & \left(s \neq \dfrac{n-1}{2}\right), \\ a_0 y^{\frac{n-1}{2}} + b_0 \log y & \left(s = \dfrac{n-1}{2}\right). \end{cases}$$

ここで $a_0, b_0, a_\nu \in \mathbb{C}$, L は Γ によって定まる $\mathbb{R}^{n-1}$ の格子, K_s は第 2 種変形ベッセル関数, $z = (x_1, \cdots, x_{n-1}, y)$ に対して, $x = (x_1, \cdots, x_{n-1})$ と置いた.

$a_0 = b_0 = 0$ のとき, cusp 関数と呼ぶ. また, 1 の性質のみを満たす関数も Γ に関する保型関数と呼ぶ.

$$E_s(z) = \sum_{\Gamma_\infty \backslash \Gamma} y(\gamma z)^s$$

を Γ のアイゼンシュタイン級数という. ここで Γ_∞ は Γ の放物的部分群, $y(z)$ は z の y 成分を表す.

$$f(z) = \sum_{0 \neq \nu \in L} a_\mu y^{\frac{n}{2}} K_{s-\frac{n-1}{2}}(2\pi|\nu|y) e^{2\pi\langle\langle v,x\rangle\rangle},$$
$$g(z) = \sum_{0 \neq \nu \in L} b_\mu y^{\frac{n}{2}} K_{s-\frac{n-1}{2}}(2\pi|\nu|y) e^{2\pi\langle\langle v,x\rangle\rangle}$$

をそれぞれ固有値が $\lambda(a_1)$,$\lambda(a_2)$ の Γ に関する cusp 関数とする.

$$L(s) = \int_{\Gamma \backslash \mathcal{H}_n} \overline{f(z)} g(z) E_s(z) d\mu(z) = \Gamma_{a_1,a_2}(s) \sum_{\nu \in L} \overline{a_\nu} b_\nu |\nu|^s$$

と置く. ここで,

$$\Gamma_{a_1,a_2}(s) = \frac{2^{s-2}(2\pi)^{-s-1}}{\Gamma(1-s)} \Gamma(\frac{n-s+a_1+a_2}{2}) \\ \times \Gamma(\frac{1-s-a_1+a_2}{2}) \Gamma(\frac{1-s+a_1-a_2}{2}) \Gamma(\frac{2-n-s-a_1-a_2}{2}).$$

以上のもとで, 主結果は次の定理である.

定理 2.1 (主結果)**.** 複素数 s をパラメータとする $\mathcal{H}_n$ 上の関数で次の性質を満たすものが存在する.

自然数 m と $\lambda(s)$ が $\mathfrak{L}_n$ の固有値, アイゼンシュタイン級数 E_s, $\frac{n-1}{2}$ のいずれでもない複素数 s に対して, 次の性質を満たす $\mathcal{H}_n$ 上の C^∞ 級関数 $f_s^{\langle m \rangle}(z)$ が存在する.

(I-1) $f_{s_0}^{\langle m \rangle}$ が $y \to \infty$ のとき急減少であることと $L(s)$ が $s = s_0$ で m 位より位数の高い零点を持つことは同値.

(I-2) $[\mathfrak{L}_n - \lambda(s)]^m f_s^{\langle m \rangle} = 0$.

(I-3) $L(s)$ が $s = s_0$ で m 位の零点を持つとき,

$$\left(\frac{d\lambda}{ds}(s_0)\right)^{m+1} \langle E_{\bar{s}_0}, f_{s_0}^{\langle m \rangle}\rangle = \frac{d^m L}{ds^m}(s_0).$$

さらに, $m = 1$ の場合に次が成り立つ.

(I-4) $\mathrm{Im}\,[s(n-1-s)]\langle f_s^{\langle 1\rangle}, f_s^{\langle 1\rangle}\rangle = \mathrm{Im}\,[\langle f_s^{\langle 1\rangle}, p\rangle]$ if $\mathrm{Re}\,(s) > (n-1)/2$ or $L(s) = 0$.

(I-5) $4t\ \mathrm{Im}\,[\langle f_{\bar{s}}^{\langle 1\rangle}, p_n\rangle] = |L(s)|^2$ if $s = (n-1)/2 + it$ with $0 \neq t \in \mathbb{R}$.

(I-6) $(n-1-2s_0)\langle E_{\bar{s}_0}, f_{s_0}^{\langle 1\rangle}\rangle = dL(s_0)/ds$ if $L(s_0) = 0$.

$n = 2$, $m = 0$ のとき, 志村の結果の $k_1 = k_2$ の場合となる.

3 証明のスケッチ

保型的グリーン関数と呼ばれる s でパラメトライズされた $\mathcal{H}_n \times \mathcal{H}_n \setminus \mathbf{diag}(\mathcal{H}_n)$ 上の関数を使う. 保型的グリーン関数 $G_s(z,w)$ $(z, w \in \mathcal{H}_n,\ s \in \mathbb{C})$ の基本的な性質をいかに列挙する. 詳細は [MW], [GT] を参照.

1. $G_s(z,w) = G_s(w,z)$.

2. $G_s(z,w)$ は, 変数 z について Γ に関する保型関数.

3. G_s は, s について全平面で有理型関数.

4. 滑らかな Γ に関する保型関数 $\phi(z)$ について, $F_s(z) = \langle \overline{\phi}, G_s(z,\cdot)\rangle$ が収束するなら, F_s は Γ に関する保型関数で次の微分方程式を満たす.

$$[\mathfrak{L} - s(n-1-s)]F_s(z) = \phi(z).$$

5. $y(z) > y' = y(w)$ のとき, G_s は次の Fourier 展開を持つ.

$$G_s(z,w) = \sum_{v \in L^*} g_v(y,w,s) e^{2\pi i \langle\langle x, v\rangle\rangle},$$
$$g_0(y,w,s) = C_\infty\ E_s(w) y^{n-1-s}/(n-1-2s),$$
$$g_v(y,w,s) = C_\infty y^{\frac{n}{2}} K_{s-\frac{n-1}{2}}(2\pi|v|y) \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} h_v(\gamma w) h_v(z) = y^{\frac{n}{2}} I_{s-\frac{n-1}{2}}(2\pi|v|y) e^{-2\pi i \langle\langle x', v\rangle\rangle}.$$

ここで, $I_s(z)$ は第一種変形ベッセル関数, $\langle\langle \cdot,\cdot\rangle\rangle$ は $\mathbb{R}^{n-1}$ の標準内積.

最後の主張に関しては, 引用文献にはないが $n = 2$ の場合の [Z] の証明と同様にして証明することができる.

今,

$$f_s^{\langle 1\rangle}(z) = \int p(w) G_s(z,w) d\mu(w)$$

と置くと, $G_s(z,w)$ の性質から (I-2) が従うことがわかる. カスプにおける漸近展開は, unfolding の方法を用いて $f_s^{\langle 1\rangle}(z)$ のフーリエ展開を求め, 各係数関数の増大度を調べることでわかる.

$m > 1$ の場合のために次の補題を準備する.

補題 3.1.

$$\frac{d}{ds}[\mathfrak{L}_n - \lambda(s)] = [\mathfrak{L}_n - \lambda(s)]\frac{d}{ds} + \frac{d\lambda}{ds}(s).$$

この補題は直接計算で容易にわかる．今,

$$f_s^{\langle m\rangle} = \frac{1}{(m-1)!}\left(\left(\frac{d\lambda}{ds}(s)\right)^{-1}\frac{d}{ds}\right)^{m-1} f_s^{\langle 1\rangle}$$

と置く．m に関する帰納法により, (I-2) を示そう．$m = 1$ の場合はすでに成り立っている．$m-1$ の場合に成り立つとする．このとき, 補題を用いて

$$\begin{aligned}
[\mathfrak{L} - \lambda(s)]f_s^{\langle m\rangle} &= \frac{1}{m-1}\left(\frac{d\lambda}{ds}(s)^{-1}\frac{d}{ds}\right)[\mathfrak{L} - \lambda(s)]f_s^{\langle m-1\rangle} + \frac{1}{m-1}f_s^{\langle m-1\rangle} \\
&= \frac{1}{m-1}\left(\frac{d\lambda}{ds}(s)^{-1}\frac{d}{ds}\right)f_s^{\langle m-2\rangle} + \frac{1}{m-1}f_s^{\langle m-1\rangle} \\
&= \frac{m-2}{m-1}f_s^{\langle m-1\rangle} + \frac{1}{m-1}f_s^{\langle m-1\rangle} \\
&= f_s^{\langle m-1\rangle}.
\end{aligned}$$

よって, $[\mathfrak{L} - \lambda(s)]^m f_s^{\langle m\rangle} = [\mathfrak{L} - \lambda(s)]^{m-1} f_s^{\langle m-1\rangle} = p$ となり主張を得る．

次に, (I-1) の証明の方針について述べる．$m = 1$ の場合は, [S] と同様の方法で $f_s^{\langle 1\rangle}$ の Fourier 展開の係数関数の増大度を評価することでわかる．$m > 1$ の場合は $f_s^{\langle 1\rangle}$ の Fourier 展開を項別微分して各項を比較すると

$$f_s^{\langle m\rangle} = \frac{1}{(m-1)!}\left(\left(\frac{d\lambda}{ds}(s)\right)^{-1}\frac{d}{ds}\right)^{m-1}(L(s)y^{k-s}) + O(e^{-ay})$$

を得る．これより, $\frac{1}{(m-1)!}\left(\left(\frac{d\lambda}{ds}(s)\right)^{-1}\frac{d}{ds}\right)^{m-1}(L(s)y^{k-s}) = 0$ となる s の条件を求めればよい．$y^{s-n+1}\left(\left(\frac{d\lambda}{ds}(s)\right)^{-1}\frac{d}{ds}\right)^{m-1}(L(s)y^{k-s})$ は $(n-1-s)^{-(2m-2-p-k)}\frac{d^kL}{ds^k}(s)$ $(0 \leq k+p \leq m-1)$ の $\mathbb{Z}$ 係数の線形和を $(\log y)^p$ の係数とする $\log y$ の多項式となること, 特に, p 次の係数で $\frac{d^{m-1-p}L}{ds^{m-1-p}}(s)$ の係数は 0 ではないことがわかる．$\log y$ の次数が大きいものから順に係数が 0 になる条件を見ていくことで主張の同値性を得る．(I-3) は (I-2) と $\mathfrak{L}_n$ が Peterson 内積について自己共役作用素であることを用いて次の計算をすることでわかる．

$$\begin{aligned}
(\lambda(s) - \lambda(s_0))^{m+1}\langle \overline{f_{s_0}^{\langle m\rangle}}, E_s\rangle &= (\lambda(s) - \lambda(s_0))^m\langle \overline{[\mathfrak{L}_n - \lambda(s_0)]f_{s_0}^{\langle m\rangle}}, E_s\rangle \\
&= (\lambda(s) - \lambda(s_0))^m\langle \overline{f_{s_0}^{\langle m-1\rangle}}, E_s\rangle \\
&= \cdots \\
&= (\lambda(s) - \lambda(s_0))\langle \overline{f_{s_0}}, E_s\rangle \\
&= \langle \overline{[\mathfrak{L}_n - \lambda(s_0)]f_{s_0}}, E_s\rangle \\
&= \langle \overline{p}, E_s\rangle \\
&= L(s).
\end{aligned}$$

(I-4) は,

$$\mathrm{Im}\,[s(n-1-s)]\langle f_s, f_s\rangle = \frac{1}{2}(\langle f_s, \mathfrak{L}_n f_s - p\rangle - \langle \mathfrak{L}_n f_s - p, f_s\rangle) = \mathrm{Im}\,\langle f_s, p\rangle$$

より従う．(I-5) の証明の方針を述べる．$\Gamma\backslash\mathcal{H}_n$ の基本領域と $\{z \in \mathcal{H}_n \mid y(z) < M\}$ $(M > 0)$ の共通部分を D_M と置く．このとき，積分 $\int_{D_M} \overline{\mathfrak{L}_n f_s^{\langle 1\rangle}} f_s^{\langle 1\rangle} - \overline{f_s^{\langle 1\rangle}} \mathfrak{L}_n f_s^{\langle 1\rangle} d\mu(z)$ を考える．これを Stokes の定理を用いて計算し $M \to \infty$ とすると $i(2t)^{-1}|L(s)|^2$ が得られる．一方で，$\int_D \overline{\mathfrak{L}_n f_s^{\langle 1\rangle}} f_s^{\langle 1\rangle} - \overline{f_s^{\langle 1\rangle}} \mathfrak{L}_n f_s^{\langle 1\rangle} d\mu(z)$ について，(I-2) の性質を使うことにより，

$$\mathrm{Im} \int_{D_M} (\overline{\lambda(s) f_s^{\langle 1\rangle} + p}) f_s^{\langle 1\rangle} d\mu(z)$$

になることがわかる．$\lambda(s)$ と $\int_{D_M} \overline{f_s^{\langle 1\rangle}(z)} f_s^{\langle 1\rangle}(z) d\mu(z)$ は実数であることから，$M \to \infty$ のとき，この値は $i\mathrm{Im}\,\langle p, f_s\rangle$ となることがわかる．両方の結果を比較して整理することで (I-5) が得られる．

4　コメント

(A) 志村は，虚二次体の Hecke の L 関数についても類似の結果を得ている ([S] 参照)．講演のときに述べたように，実 2 次体のデデキントゼータに関して同様の結果を得ることができる．また，モンスター群の位数を割る素数 p について，重さ 2 の $\Gamma_0(p)$ のカスプ形式に付随する L 関数についても同様の保型関数の族を構成することができる．

(B) 今回 n 次元の実上半空間の場合について論じたが，原理的には階数 1 の対称領域に関して同様のことができると思う．理由は，この場合の保型グリーン関数が既に構成されており，その性質もグリーン関数を使って構成した関数のカスプでの漸近挙動を除いて，n 次元の実上半空間の場合とほぼ同じだからである．一般の場合に漸近挙動を調べるためには，グリーン関数の Fourier 展開を明示的に得ることが問題となる．この問題が解決できれば，階数 1 の対称領域上の cusp 関数についての Rankin-Selberg 型の L 関数に対して，今回の主定理と同様の主張を証明できると思う．

謝辞

講演の機会をくださった主催の九州大学の金子昌信氏，権寧魯氏，松坂俊輝氏，愛知教育大学の岸康弘氏に感謝を申し上げます．

参考文献

[GT] Y. Gon and M. Tsuzuki, The resolvent trace formula for rank one Lie groups, Asian J. Math. **6** (2002), no. 2, 227–252.

[MW] R. Miatello and N. R. Wallach, The resolvent of the Laplacian on locally symmetric spaces, J. Differential Geom. **36** (1992), no. 3, 663–698.

[O] A. Odlyzko, Correspondence about the origins of the Hilbert-Polya Conjecture, `http://www.dtc.umn.edu/~odlyzko/polya/index.html`.

[S] G. Shimura, *L*-functions and eigenvalue problems, In: Algebraic analysis, geometry, and number theory (Baltimore, MD, 1988), 341–396, Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD, 1989.

[W] A. Weil, 数学の創造ー著作集自註 (新版) (杉浦光夫訳), 日本評論社, 2018

[Z] D. Zagier, 保型形式論の話題から, 九大講義録, 1992.