総実体に付随する conical zeta 値と Dedekind zeta 値について

戸次 鵬人 (慶應義塾大学)

概 要

Conical zeta 値とは, 錐に付随した無限級数として定まる実数で, 多重ゼータ値の拡張の一つともみなせるものである. 錐が有理的な場合には, conical zeta 値は円分多重ゼータ値を用いて書けることが知られているが, 非有理な錐の場合にはあまり多くのことは知られていないようである. 本稿では, 有理的とは限らない代数的錐の conical zeta 値について論じる. 具体的には, 総実体から定まる錐に付随する conical zeta 値たちと Dedekind zeta 値との間に成立する関係について, 具体例を中心として紹介する. 本稿は, 第１４回福岡数論研究集会における筆者の講演内容をまとめたものである.

1 序: Conical zeta 値

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする. $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $I = (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in (\mathbb{R}^n - \{0\})^r$ に対し,

$$C_I := \sum_{i=1}^{r} \mathbb{R}_{>0}\alpha_i \subset \mathbb{R}^n$$

とおく. ($r = 0, I = \emptyset$ のときは $C_\emptyset := \{0\}$ とする.)

定義 1.1. (1) 部分集合 $C \subset \mathbb{R}^n$ が錐 (cone) であるとは, ある $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $I = (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in (\mathbb{R}^n - \{0\})^r$ に対し, $C = C_I$ の形であることとする. (文献によっては, このような錐は, open convex polyhedral cone などと呼ばれることもある.)
(2) 錐 $C \subset \mathbb{R}^n$ が有理的錐であるとは, ある $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $I = (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in (\mathbb{Q}^n - \{0\})^r$ に対し, $C = C_I$ の形であることとする.
(3) より一般に, 部分体 $K \subset \mathbb{R}$ に対し, 錐 $C \subset \mathbb{R}^n$ が K 有理的錐であるとは, ある $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $I = (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in (K^n - \{0\})^r$ に対し, $C = C_I$ の形であることとする. また, 錐 $C \subset \mathbb{R}^n$ が代数的錐であるとは, ある代数的部分体 $K \subset \mathbb{R}$ に対して K 有理的錐であることとする.
(4) 錐 $C \subset \mathbb{R}^n$ が総正であるとは, $C \subset \mathbb{R}^n_{>0}$ であることとする.

以下が本稿の主題となる conical zeta 値の定義である. Cf. [5], [2].

定義 1.2. $C \subset \mathbb{R}^n_{>0}$ を総正な錐とし, $\boldsymbol{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n_{>0}$ を多重指数とする. このとき, 無限級数

$$\zeta_C(\boldsymbol{k}) := \sum_{x \in \mathbb{Z}^n \cap C} \frac{1}{x^{\boldsymbol{k}}}$$

が収束する時, $\zeta_C(\boldsymbol{k})$ を $C, \boldsymbol{k}$ に付随する conical zeta 値と呼ぶ. ただし, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ に対し, $x^{\boldsymbol{k}} = x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$ である.

例 1.3. $e_1, \dots, e_n$ を $\mathbb{R}^n$ の標準基底とする, i.e., $e_i = (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0)$.
(1) $C = \sum_{i=1}^n \mathbb{R}_{>0} e_i = \mathbb{R}^n_{>0}$ の場合,

$$\zeta_C(\boldsymbol{k}) = \zeta(k_1) \cdots \zeta(k_n).$$

ただし, $\zeta(s)$ は Riemann zeta 関数.
(2) $C = \sum_{i=1}^n \mathbb{R}_{>0} \sum_{j=i}^n e_j = \mathbb{R}_{>0}(e_1 + \cdots + e_n) + \mathbb{R}_{>0}(e_2 + \cdots + e_n) + \cdots + \mathbb{R}_{>0} e_n \subset \mathbb{R}^n_{>0}$ の場合,

$$\zeta_C(\boldsymbol{k}) = \sum_{x_1 < x_2 < \cdots < x_n} \frac{1}{x^{\boldsymbol{k}}} = \zeta(k_1, \dots, k_n).$$

ただし, $\zeta(k_1, \dots, k_n)$ は多重ゼータ値.

より一般に, $C \subset \mathbb{R}^n_{>0}$ が有理的錐の場合, conical zeta 値 $\zeta_C(\boldsymbol{k})$ については以下が知られている.

定理 1.4 (Terasoma [5])**.** $C \subset \mathbb{R}^n_{>0}$ を総正な有理的錐とすると, conical zeta 値 $\zeta_C(\boldsymbol{k})$ は円分多重ゼータ値の $\mathbb{Q}^{ab}$ 線形結合で書ける.

一方で, $C \subset \mathbb{R}^n_{>0}$ が有理的とは限らない場合の, conical zeta 値 $\zeta_C(\boldsymbol{k})$ の数論的性質については, 筆者の知る限り, あまり多くのことは知られていないようである. そこで, 本稿では, $C \subset \mathbb{R}^n_{>0}$ が有理的とは限らない代数的錐の場合に, conical zeta 値 $\zeta_C(\boldsymbol{k})$ の数論的性質について論じる. 具体的には, 総実体から定まる代数的錐に付随する conical zeta 値たちと Dedekind zeta 値の間に成立する関係について報告する.

2 主結果

F を n 次の総実代数体とし,

$$\tau_1, \dots, \tau_n \colon F \hookrightarrow \mathbb{R}$$

を F の $\mathbb{R}$ への n 個の埋め込みとする. このとき, $F_{\mathbb{R}} := F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ とおくと, $\tau_1, \dots, \tau_n$ によって, 同型

$$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \colon F_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$$

が誘導される. 部分集合 $A \subset F_{\mathbb{R}}$ に対し,

$$A_+ := \{a \in A \mid \tau(a) \in \mathbb{R}^n_{>0}\}$$

によって, A の総正部分をあらわす.

また, $\mathcal{O}_F$ で F の整数環をあらわし, $\mathcal{O}_{F,+}^\times$ でその総正単数群をあらわす. このとき, 分数イデアル $\mathfrak{a} \subset F$ に対し, F の $\mathfrak{a}^{-1}$ に付随する (狭義) 部分ゼータ関数 $\zeta_{F,+}(\mathfrak{a}^{-1}, s)$ が, 以下のように定義される:

$$\zeta_{F,+}(\mathfrak{a}^{-1}, s) := \sum_{x \in \mathfrak{a}_+ / \mathcal{O}_{F,+}^\times} \frac{1}{N_{F/\mathbb{Q}}(x)^s}, \quad \mathrm{Re}(s) > 1.$$

ここで, $\mathfrak{a}^{-1}$ は $\mathfrak{a}$ の逆分数イデアルで, $N_{F/\mathbb{Q}}$ は体の拡大 $F/\mathbb{Q}$ に付随するノルムである.
加えて,

$$F' := \tau_1(F) \cdots \tau_n(F) \subset \mathbb{R}$$

を $\mathbb{R}$ 内における, $\tau_1(F), \dots, \tau_n(F)$ の合成体とする.
このとき, 以下が今回の主結果である.

定理 2.1. $F, \mathfrak{a}$ を前述のとおりとする．このとき, 有限個の総正な F' 有理的錐 $C_1, \dots, C_m \subset \mathbb{R}^n_{>0}$ が存在して, 任意の $k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ に対して以下が成立する:

$$\zeta_{F,+}(\mathfrak{a}^{-1}, k) \in \frac{1}{\sqrt{d_F}} \sum_{i=1}^{m} \sum_{\substack{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^n_{>0} \\ |\boldsymbol{k}|=nk}} \mathbb{Q}\zeta_{C_i}(\boldsymbol{k}).$$

ここで, d_F は F の判別式, $|\boldsymbol{k}| := k_1 + \cdots + k_n$ は多重指数 $\boldsymbol{k} = (k_1, \dots, k_n)$ の重さをあらわす．すなわち, 部分ゼータ関数の $k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ での値 $\zeta_{F,+}(\mathfrak{a}^{-1}, k)$ は必ず, 有限個の総正な F' 有理的錐と重さ nk の多重指数に付随する conical zeta 値の有理線型結合を $\sqrt{d_F}$ で割った値として書ける．

注意 2.2. (1) 本定理において $\zeta_{F,+}(\mathfrak{a}^{-1}, k)$ の記述に現れる有限個の錐や, $\zeta_{C_i}(\boldsymbol{k})$ の係数は, 新谷 [4] による錐分割の方法などを用いて具体的に計算することができる．しかしそれらは一意的ではない．
(2) 部分ゼータ関数の値 $\zeta_{F,+}(\mathfrak{a}^{-1}, k)$ については, Siegel-Klingen の定理によって, k が臨界的な場合には, $\sqrt{d_F}$ および π の冪を除いて有理数となることが知られている, cf. [4]. 一方で本定理の特色は, conical zeta 値を用いることで, 臨界値も非臨界値も統一的に記述している点となる．

例 2.3. $F = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, $\mathfrak{a} = \mathcal{O}_F = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{5}}{2}]$ の場合を考える．この場合,

$$\mathcal{O}_F^\times = \{\pm 1\} \times \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^\nu \middle| \nu \in \mathbb{Z} \right\},$$
$$\mathcal{O}_{F,+}^\times = \left\{ \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^\nu \middle| \nu \in \mathbb{Z} \right\}$$

であり, 従って $\mathrm{Re}(s) > 1$ に対し,

$$\zeta_{F,+}(\mathfrak{a}^{-1}, s) = \sum_{x \in \mathcal{O}_{F,+}/\mathcal{O}_{F,+}^\times} \frac{1}{N_{F/\mathbb{Q}}(x)^s} = \sum_{x \in (\mathcal{O}_F - \{0\})/\mathcal{O}_F^\times} \frac{1}{|N_{F/\mathbb{Q}}(x)|^s} = \zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(s)$$

となっている．ここで, $\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(s)$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ の Dedekind zeta 関数である．
　$F'(= F)$ 有理的錐 $C \subset \mathbb{R}^n_{>0}$ を

$$C = \mathbb{R}_{>0}\left(1, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) + \mathbb{R}_{>0}\left(1, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_{>0} \mid -x_1^2 + 3x_1x_2 - x_2^2 > 0\}$$

とおく．このとき, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ に対し,

$$\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(k) = \zeta_{F,+}(\mathfrak{a}^{-1}, k) \in \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{\substack{(k_1,k_2) \in \mathbb{Z}^2_{>0} \\ k_1+k_2=2k}} \mathbb{Q}\zeta_C(k_1, k_2) \tag{2.1}$$

が成立する．すなわち, 定理 2.1 が錐 C に対して成り立つ．また, 例えば $k = 2, 3$ のときには, $\zeta_C(k_1, k_2)$ の係数を具体的に計算することで,

$$\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(2) = \frac{1}{5\sqrt{5}}(4\zeta_C(1,3) + 3\zeta_C(2,2)), \tag{2.2}$$
$$\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(3) = \frac{1}{25\sqrt{5}}(12\zeta_C(1,5) + 18\zeta_C(2,4) + 11\zeta_C(3,3)) \tag{2.3}$$

となっていることがわかる．

注意 2.4. $\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(2)$ は $\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(s)$ の臨界値であり, $\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(2) = \frac{2\pi^4}{75\sqrt{5}}$ であることが知られている．一方, $\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(3)$ は非臨界値であり, Siegel-Klingen の定理の範疇ではないが, このように conical zeta 値を用いて記述されている, cf. 注意 2.2 (2).

3 主結果の証明のアイデア (例 2.3 の場合)

定理 2.1 の証明は非常に初等的に行える．以下では, 定理 2.1 の証明を例 2.3 の場合に限って与える．すなわち, 式 (2.1) の証明を与える．一般の場合の証明は現在準備中の論文で与える予定であるが, そのアイデアの中心をなす部分は, 以下の具体例に対する証明に含まれている．

3.1 Hecke の積分公式

証明の出発点となるのは, $\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(k)$ の積分表示を与える次の古典的な公式である．

定理 3.1. $k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ に対し,

$$G_{2k}(z) := \sum_{(x_1,x_2)\in\mathbb{Z}^2-\{0\}} \frac{1}{(x_1 z + x_2)^{2k}}, \quad z \in \mathfrak{H}$$

を (レベル 1) 重さ $2k$ の正則 Eisenstein 級数とする．ここで, $\mathfrak{H}$ は上半平面である．このとき, 任意の $z_0 \in \mathfrak{H}$ に対し, 以下が成立する:

$$\int_{z_0}^{\frac{2z_0+1}{z_0+1}} (-z^2+z+1)^{k-1} G_{2k}(z)dz = \begin{cases} \frac{4((k-1)!)^2 5^{k-1}\sqrt{5}}{(2k-1)!}\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(k) & \text{if } k\text{: even} \\ 0 & \text{if } k\text{: odd.} \end{cases}$$

しかし, これだと k が奇数の場合を扱えておらず, 今回我々が用いるのは, これを少し変形した以下の形の公式である．(Eisenstein 級数の和の範囲を変形している.)

定理 3.2. 任意の $k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $z_0 \notin (-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty)$ に対し, 以下が成立する:

$$\int_{z_0}^{\frac{2z_0+1}{z_0+1}} (-z^2+z+1)^{k-1} \sum_{\substack{(x_1,x_2)\in\mathbb{Z}^2 \\ -x_1^2+x_1x_2+x_2^2>0}} \frac{1}{(x_1 z + x_2)^{2k}} dz = \frac{2((k-1)!)^2 5^{k-1}\sqrt{5}}{(2k-1)!}\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(k).$$

Proof. 簡単のため, 以下のように記号を置く:

$$\begin{aligned} A &:= \{(x_1,x_2)\in\mathbb{Z}^2 \mid -x_1^2+x_1x_2+x_2^2>0\}, \\ D &:= \mathbb{C} - ((-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty)), \\ \gamma_0 &:= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ \Gamma &:= \{\gamma_0^\nu \mid \nu \in \mathbb{Z}\} \subset SL_2(\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Γ は A に行ベクトルへの右からの行列の積として自由に作用し, また一次分数変換によって D に作用している:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z := \frac{az+b}{cz+d}.$$

このとき, まず左辺の積分の中身が, D 上の Γ 不変な正則 1 形式であることが, 容易に確認でき, このことから, 左辺の積分が z_0 や積分路の取り方によらないことがわかる. $z_0 \in D$ と, z_0 から $\gamma_0 z_0$ への D 内の道 I_0, また A/Γ の完全代表系 $A_0 \subset A$ を固定する. すると, いわゆる unfolding によって, 左辺の積分は以下のように計算できる:

$$\begin{aligned}
LHS &= \int_{I_0} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \sum_{(x_1,x_2)\in A_0} (-(\gamma_0^\nu z)^2 + \gamma_0^\nu z + 1)^{k-1} \frac{1}{(x_1(\gamma_0^\nu z) + x_2)^{2k}} d(\gamma_0^\nu z) \\
&= \sum_{(x_1,x_2)\in A_0} \int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} (-z^2+z+1)^{k-1} \frac{1}{(x_1 z + x_2)^{2k}} dz \\
&= \frac{((k-1)!)^2 5^{k-1}\sqrt{5}}{(2k-1)!} \sum_{(x_1,x_2)\in A_0} \frac{1}{(-x_1 + x_1x_2 + x_2^2)^k} \\
&= \frac{((k-1)!)^2 5^{k-1}\sqrt{5}}{(2k-1)!} \sum_{\substack{x \in \mathcal{O}_F/\mathcal{O}_{F,+}^\times \\ N_{F/\mathbb{Q}}(x)>0}} \frac{1}{N_{F/\mathbb{Q}}(x)^k} \\
&= \frac{((k-1)!)^2 5^{k-1}\sqrt{5}}{(2k-1)!} 2\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(k) = RHS.
\end{aligned}$$

よって示したい等式が得られた. ただし, 3 番目の等号においては, 次に述べる公式を, $a = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, k_1 = k_2 = k-1$ として用いた. □

補題 3.3. $x_1, x_2, a, b \in \mathbb{C}$ が $x_1 a + x_2 \neq 0, x_1 b + x_2 \neq 0$ を満たすとする. このとき, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し, 以下が成り立つ:

$$\int_a^b (b-z)^{k_1} (z-a)^{k_2} \frac{dz}{(x_1 z + x_2)^{2+k_1+k_2}} = \frac{k_1! k_2!}{(k_1+k_2+1)!} \frac{(b-a)^{k_1+k_2+1}}{(x_1 a + x_2)^{k_1+1}(x_1 b + x_2)^{k_2+1}}.$$

Proof. まず $k_1 = k_2 = 0$ の場合を示し, その後, $y_1 = x_1 a + x_2, y_2 = x_1 b + x_2$ と変数変換し, 両辺に微分作用素 $\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^{k_1} \left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^{k_2}$ を作用させれば所望の等式が得られる. □

3.2 式 (2.1) の証明

定理 3.2 において, $z_0 = 0 \notin (-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty)$ ととり, その後 $z = \frac{w}{w+1}$ と変数変換することで, 以下を得る:

$$\begin{aligned}
\frac{2((k-1)!)^2 5^{k-1}\sqrt{5}}{(2k-1)!} \zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(k) &= \int_0^1 (-z^2+z+1)^{k-1} \sum_{\substack{(x_1,x_2)\in \mathbb{Z}^2 \\ -x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 > 0}} \frac{1}{(x_1 z + x_2)^{2k}} dz \\
&= \int_0^\infty (w^2+3w+1)^{k-1} \sum_{\substack{(x_1,x_2)\in \mathbb{Z}^2 \\ -x_1^2 + 3x_1x_2 - x_2^2 > 0}} \frac{1}{(x_1 w + x_2)^{2k}} dw \\
&= 2 \sum_{(x_1,x_2)\in C\cap\mathbb{Z}^2} \int_0^\infty (w^2+3w+1)^{k-1} \frac{1}{(x_1 w + x_2)^{2k}} dw.
\end{aligned}$$

ここで,

$$(w^2+3w+1)^{k-1} =: \sum_{a=0}^{2k-2} c_a w^a, \quad c_a \in \mathbb{Z}$$

と展開する．これを代入することで,

$$\begin{aligned}\frac{2((k-1)!)^2 5^{k-1}\sqrt{5}}{(2k-1)!}\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(k) &= 2\sum_{a=0}^{2k-2} c_a \sum_{(x_1,x_2)\in C\cap\mathbb{Z}^2}\int_0^\infty \frac{w^a}{(x_1 w + x_2)^{2k}}dw \\ &= 2\sum_{a=0}^{2k-2} c_a \frac{a!(2k-2-a)!}{(2k-1)!}\sum_{(x_1,x_2)\in C\cap\mathbb{Z}^2}\frac{1}{x_1^{a+1}x_2^{2k-(a+1)}} \\ &= 2\sum_{a=0}^{2k-2} c_a \frac{a!(2k-2-a)!}{(2k-1)!}\zeta_C(a+1, 2k-(a+1))\end{aligned}$$

を得る．よって, 式 (2.3) が示された．ただし, 2 番目の等式では, 補題 3.3 の両辺を $(b-a)^{k_1}$ で割って $a\to 0, b\to\infty$ の極限を取ることによって得られる公式を使った.

3.3 式 (2.2), (2.3) の導出

式 (2.1) の証明における c_a を, $k=2,3$ のときに具体的に計算すると,

$$\begin{aligned}(w^2+3w+1)^{2-1} &= w^2+3w+1, \\ (w^2+3w+1)^{3-1} &= w^4+6w^3+11w^2+6w+1\end{aligned}$$

となる．また, 錐 C の形から,

$$(x_1, x_2)\in C \iff (x_2, x_1)\in C$$

であることから, $\zeta_C(k_1,k_2)=\zeta_C(k_2,k_1)$ となっていることにも注意すると, 以下が得られる:

$$\begin{aligned}\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(2) &= \frac{1}{5\sqrt{5}}\left(2\zeta_C(1,3)+3\zeta_C(2,2)+2\zeta_C(3,1)\right) \\ &= \frac{1}{5\sqrt{5}}\left(4\zeta_C(1,3)+3\zeta_C(2,2)\right), \\ \zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(3) &= \frac{1}{4\cdot 25\sqrt{5}}(24\zeta_C(1,5)+6\cdot 6\zeta_C(2,4)+4\cdot 11\zeta_C(3,3)+6\cdot 6\zeta_C(4,2)+24\zeta_C(5,1)) \\ &= \frac{1}{25\sqrt{5}}\left(12\zeta_C(1,5)+18\zeta_C(2,4)+11\zeta_C(3,3)\right).\end{aligned}$$

よって式 (2.2), (2.3) が示せた.

3.4 一般の総実体の場合についてのコメント

一般の総実体の場合 (定理 2.1) も, 証明の基本的な方針は上述の例 2.3 の場合と同じである．すなわち, 定理 3.2, 補題 3.3 の適切な高次元版を用いることで証明を行う.

まず, 定理 3.2 の高次元版に関しては, 無限級数

$$\sum_{\substack{(x_1,x_2)\in\mathbb{Z}^2 \\ -x_1^2+x_1x_2+x_2^2>0}} \frac{1}{(x_1 z + x_2)^{2k}}$$

のかわりに, 適切な F' 有理的な錐 $C \subset \mathbb{R}^n$ に対する

$$\psi_{nk,C}(y) := \sum_{x \in C \cap \mathbb{Z}^n} \frac{1}{\langle x, y \rangle^{n+nk}}, \quad y \in V_C \subset \mathbb{C}^n$$

を考える. ただし, $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$ に対し, $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ はドット積をあらわし, $V_C \subset \mathbb{C}^n$ は $\psi_{nk,C}$ が収束する適切な開集合である.

また, 補題 3.3 の高次元版としては, 以下の Feynman parametrization と呼ばれる積分公式が存在し, それを用いる. Cf. [1, Proposition 7.1.3]. (この公式は Hurwitz [3] なども使っていたもので, [1] では Hurwitz の公式とも呼んでいる.)

命題 3.4 (Feynman parametrization)**.** $x, \xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{C}^n$ が $\mathrm{Re}(\langle x, \xi_i \rangle) > 0$, $i = 1, \dots, n$ を満たし, $\xi_1, \dots, \xi_n$ は $\mathbb{C}$ 上の基底となっているとする. また, $\xi_1^*, \dots, \xi_n^*$ を $\langle -, - \rangle$ に関する $\xi_1, \dots, \xi_n$ の双対基底であるとする. さらに, $\Delta_{n-1} = \{(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n_{>0} \mid \sum_{i=1}^n t_i = 1\}$ を標準 $(n-1)$ 単体とし,

$$\sigma_{(\xi_1, \dots, \xi_n)} \colon \Delta_{n-1} \to \mathbb{C}^n; (t_1, \dots, t_n) \mapsto \sum_{i=1}^n t_i \xi_i$$

を, $\xi_1, \dots, \xi_n$ が張るアフィン $(n-1)$ 単体とする. また, $\mathbb{C}^n$ 上の $(n-1)$ 形式 $\omega(y)$ を

$$\omega(y) := \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} y_i dy_1 \wedge \dots \wedge \check{dy_i} \wedge \dots \wedge dy_n$$

で定める. ただし, $\check{dy_i}$ は dy_i を除くことを意味する.

このとき, $\boldsymbol{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ に対して, 次が成立する:

$$\int_{\sigma_{(\xi_1, \dots, \xi_n)}} \langle \xi_1^*, y \rangle^{k_1} \cdots \langle \xi_n^*, y \rangle^{k_n} \frac{\omega(y)}{\langle x, y \rangle^{n+|\boldsymbol{k}|}} = \frac{\boldsymbol{k}!}{(n+|\boldsymbol{k}|-1)!} \frac{\det(\xi_1, \dots, \xi_n)}{\langle x, \xi_1 \rangle^{k_1+1} \cdots \langle x, \xi_n \rangle^{k_n+1}}.$$

ただし, $|\boldsymbol{k}| = k_1 + \dots + k_n$, $\boldsymbol{k}! = k_1! \cdots k_n!$ であり, また, $\det(\xi_1, \dots, \xi_n)$ においては $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ を $n \times n$ 行列とみなしている.

証明については, 例えば [3] や [1, Proposition 7.1.3] を参照されたい. また, 補題 3.3 は実際この命題の $n = 2$ の場合となっている.

定理 2.1 の証明の詳細については, 現在準備中の論文で改めて与える予定である.

4 課題

本稿における主結果 (定理 2.1) によって, 錐が非有理的な場合でも, 特定の代数的錐に付随する conical zeta 値の適切な有理線型結合が, 総実体の Dedekind zeta 値と結びつくことがわかった. 一方で, この結果からは, 個々の conical zeta 値 $\zeta_C(\boldsymbol{k})$ の性質については, 未知のままとなっている. 従って, 錐が代数的な場合に限っても, 個々の conical zeta 値 $\zeta_C(\boldsymbol{k})$ の数論的あるいは幾何学的な性質の探求は今後の課題となる. 例えば

- 個々の conical zeta 値 $\zeta_C(\boldsymbol{k})$ は, (Dedekind zeta 値に限らなくてもよい) 何か興味深い数論幾何的不変量と関係するか？(例えば錐が有理的な場合は, conical zeta 値は多重ゼータ値や円分多重ゼータ値と関係し, 従ってモチーフの周期と関係した.)

- 個々の conical zeta 値 $\zeta_C(\boldsymbol{k})$ の良い積分表示などはあるか？
- 数値実験を行うためには, $\zeta_C(\boldsymbol{k})$ の良い近似値が必要となるが, どのように計算すれば, 効率良く高い精度の近似値が得られるか？

といった問いに対して, 今後何か新しい発見があれば非常に興味深いと考えている.

謝辞

本稿の内容は, 第１４回福岡数論研究集会における講演に基づいており, このたび貴重な講演の機会を下さった, 世話人の金子昌信先生, 権寧魯先生, 岸康弘先生, 松坂俊輝さんに, 心より感謝いたします. 本研究は JSPS 科研費 JP20J01008 の助成を受けたものです.

参考文献

[1] H. Bekki, Shintani-Barnes cocycles and values of the zeta functions of algebraic number fields, to appear in Algebra & Number Theory, arXiv:2104.09030.

[2] L. Guo, S. Paycha and B. Zhang, Conical zeta values and their double subdivision relations, Adv. Math. **252** (2014), 343–381.

[3] A. Hurwitz, Über die Anzahl der Klassen positiver ternärer quadratischer Formen von gegebener Determinante, Math. Ann. **88** (1922), no. 1-2, 26–52.

[4] T. Shintani, On evaluation of zeta functions of totally real algebraic number fields at non-positive integers. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **23** (1976), no. 2, 393–417.

[5] T. Terasoma, Rational convex cones and cyclotomic multiple zeta values, preprint, arXiv:math/0410306.