

# Multivariable generalizations of Zhao's generalized 2-1 formula and Zagier's 2-3-2 formula

広瀬 稔 (九州大学)

## 概要

本項は, 第 13 回福岡数論研究集会での講演内容について纏めたものである. 本項で述べる結果は, 全て九州大学の佐藤信夫氏との共同研究によるものである.

## 1 Introduction

Zagier の 2-3-2 公式とは Zagier によって証明された, 多重ゼータ値についての重要な関係式である. 著者は佐藤氏との共同研究で, Zagier の 2-3-2 公式を反復ベータ積分とも呼ぶべき量との関係式に一般化した. これは, Zagier の 2-3-2 公式の非常に広範な一般化であり, Zagier の 2-3-2 公式を何段階も一般化することにより得られる. 本稿ではこれについて次の順で解説していきたい.

1. Zagier の 2-3-2 公式 (定理 3)
2. Zagier の 2-3-2 公式の反復積分による言い換え (定理 11)
3. 定理 11 の一般化 (定理 12)
4. 定理 12 の多変数化 (定理 13)
5. 定理 13 の一般化となる, 反復ベータ積分の間の関係式 (定理 16)

なお, 定理 16 は, Zhao の一般 2-1 公式と呼ばれる交代的多重ゼータ値の間の関係式 ([4, limit of Theorem 2.3]) の一般化にもなっている.

## 2 Zagier の 2-3-2 公式とその言い換え

Zagier の 2-3-2 公式とは, 多重ゼータ値についてのある線形関係式である. 早速だが, 多重ゼータ値の定義から始めよう.

**定義 1.** 非負整数を 0 個以上並べた組  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_d)$  を index と呼ぶ. また,  $d = 0$  もしくは  $k_d > 1$  のとき  $\mathbf{k}$  を許容的な index と呼ぶ.

**定義 2.** 許容的な index  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_d)$  に対して, 多重ゼータ値  $\zeta(\mathbf{k}) \in \mathbb{R}$  を

$$\zeta(\mathbf{k}) = \sum_{0 < m_1 < \dots < m_d} \frac{1}{m_1^{k_1} \dots m_d^{k_d}}$$

で定める.

Zagier の 2-3-2 公式は次のような式である.

**定理 3** (Zagier's 2-3-2 formula, [3]). 任意の  $a, b \geq 0$  に対して

$$\begin{aligned} & \zeta(\overbrace{2, \dots, 2}^a, 3, \overbrace{2, \dots, 2}^b) \\ &= 2 \sum_{r=1}^{a+b+1} (-1)^r \left( \binom{2r}{2a+2} - (1-2^{-2r}) \binom{2r}{2b+1} \right) \zeta(2r+1) \zeta(\overbrace{2, \dots, 2}^{a+b-r+1}). \end{aligned}$$

この公式は,  $\mathbb{Z}$  上の混合テイトモチーフの構造に関する Brown の定理 ([1]) の証明でも本質的な役割を果たす重要な定理である. 以下では, Zagier の 2-3-2 公式の右辺をより見やすい形に書き直すことを考える. まず,  $(1-2^{-2r})\zeta(2r+1)$  については, 次のように変形できる:

$$\begin{aligned} (1-2^{-2r})\zeta(2r+1) &= (1-2^{-2r}) \sum_{0 < m} \frac{1}{m^{2r+1}} \\ &= \sum_{0 < m} \frac{1}{m^{2r+1}} - \sum_{0 < m} \frac{2}{(2m)^{2r+1}} \\ &= \sum_{0 < m} \frac{(-1)^{m-1}}{m^{2r+1}}. \end{aligned}$$

これ以上の変形には, 反復積分の概念が必要となる.

**定義 4.**  $a_1, \dots, a_k$  を複素数とする. また  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  を複素平面上のパスで  $\gamma((0, 1)) \subset \mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$  を満たすものとする. また, 始点  $\gamma(0)$  を  $a_0$  と置き, 終点  $\gamma(1)$  を  $a_1$  とする. また, 収束性のために,  $t_0 \neq t_1$  と  $t_k \neq t_{k+1}$  を仮定する. このとき反復積分記号を

$$I_\gamma(a_0; a_1, \dots, a_k; a_{k+1}) := \int_{0 < t_1 < \dots < t_k < 1} \frac{d\gamma(t_1)}{\gamma(t_1) - a_1} \dots \frac{d\gamma(t_k)}{\gamma(t_k) - a_k}$$

で定義する.

多重ゼータ値や,  $(1-2^{-2r})\zeta(2r+1)$  は, 反復積分によって表すこともできる.

**命題 5** ([2, eq. (25)]).  $z_1, \dots, z_{d+1}$  を複素数,  $k_1, \dots, k_d$  を正の整数とし, 更に  $|z_{d+1}| < \min(|z_1|, \dots, |z_d|)$  と  $(z_d, k_d) \neq (z_{d+1}, 1)$  を仮定する. このとき

$$\begin{aligned} & I(0; z_1, \{0\}^{k_1-1}, z_2, \{0\}^{k_2-1}, \dots, z_d, \{0\}^{k_d-1}; z_{d+1}) \\ &= \sum_{0 < m_1 < \dots < m_d} \frac{z_1^{-m_1} z_2^{m_1-m_2} \dots z_d^{m_{d-1}-m_d} z_{d+1}^{m_d}}{m_1^{k_1} \dots m_d^{k_d}} \\ &= \sum_{0 < m_1 < \dots < m_d} \frac{1}{m_1^{k_1} \dots m_d^{k_d}} \binom{z_2}{z_1}^{k_1} \dots \binom{z_{d+1}}{z_d}^{k_d}. \end{aligned}$$

**系 6.** 許容的なインデックス  $\mathbb{k} = (k_1, \dots, k_d)$  に対して,

$$\zeta(\mathbb{k}) = (-1)^d I(0; 1, \{0\}^{k_1-1}, \dots, 1, \{0\}^{k_d-1}; 1).$$

**系 7.**  $r > 0$  に対して

$$(1-2^{-2r})\zeta(2r+1) = I(0; 1, \{0\}^{2r}; -1).$$

最後に,  $\zeta(\{2\}^n) = \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!}$  となることはよく知られている (例えば 3 の p.979 を参照せよ).  
 以上より Zagier の 2-3-2 公式の右辺は次の形となる:

$$2 \sum_{r=1}^{a+b+1} (-1)^{r+1} \left( \binom{2r}{2a+2} I(0; 1, \{0\}^{2r}; 1) + \binom{2r}{2b+1} I(0; 1, \{0\}^{2r}; -1) \right) \times \frac{\pi^{2(a+b-r+1)}}{(2a+2b-2r+3)!}.$$

ここに現れる各項は接基点を端点とするパスに対する反復積分の概念を用いると, 更に書き直すことができる. 以下では  $0'$  を 0 を基点, 1 を接ベクトルとする接基点とし,  $0''$  を 0 を基点,  $-1$  を接ベクトルとする接基点とする. このとき, 以下が成立する.

**命題 8.**  $r \geq a+1$  に対して

$$\binom{2r}{2a+2} I(0; 1, \{0\}^{2r}; 1) = I(0'; \{0\}^{2r-2a-2}, 1, \{0\}^{2a+2}; 1).$$

**命題 9.**  $r \geq b+1$  に対して

$$\binom{2r}{2b+1} I(0; 1, \{0\}^{2r}; -1) = -I(0''; \{0\}^{2r-2b-1}, 1, \{0\}^{2b+1}; -1).$$

**命題 10.**  $\gamma_C$  を原点を反時計周りに半周する  $0'$  から  $0''$  へのパスとすると,  $r \leq a+b+1$  に対して

$$\frac{\pi^{2(a+b-r+1)}}{(2a+2b-2r+3)!} = I_{\gamma_C}(0''; \{0\}^{2a+2b-2r+3}; 0') \times (\pi i) \times (-1)^{a+b-r+1}.$$

以上より  $a' = 2a+2$ ,  $b' = 2b+1$ ,  $r = 2s$  と置くと Zagier の 2-3-2 公式の右辺は更に次の形となる:

$$\frac{2(-1)^{a+b}}{\pi i} \sum_{\substack{\min(a', b') \leq s \leq a'+b' \\ s: \text{even}}} \left( I(0'; \{0\}^{s-a'}, 1, \{0\}^{a'}; 1) - I(0''; \{0\}^{s-b'}, 1, \{0\}^{b'}; -1) \right) \times I_{\gamma_C}(0''; \{0\}^{a'+b'-s}; 0'). \quad (1)$$

ここで少々天下りのだが次の反復積分を考えよう:

$$I_\alpha(1; \{0\}^{a'}, 1, \{0\}^{b'}; -1).$$

ここでパス  $\alpha$  は 1 から  $0'$  へ左向きに進み, 原点を反時計周りに半周して  $0''$  に到達し, さらに  $-1$  へ左向きに進むパスとする. このとき反復積分の path composition formula から,

$$I_\alpha(1; \{0\}^{a'}, 1, \{0\}^{b'}; -1) = \sum_{a' \leq s \leq a'+b'} I(1; \{0\}^{a'}, 1, \{0\}^{s-a'}; 0') I_{\gamma_C}(0'; \{0\}^{a'+b'-s}; 0'') + \sum_{b' \leq s \leq a'+b'} I_{\gamma_C}(0'; \{0\}^{a'+b'-s}; 0'') I(0''; \{0\}^{s-a'-b'}; -1)$$

となる. これを (1) と比べることで, Zagier の 2-3-2 公式の右辺が次の形でかけることがわかる:

$$(-1)^{a+b+1} \Re \left( \frac{2}{\pi i} I_\alpha(1; \{0\}^{a'}, 1, \{0\}^{b'}; -1) \right).$$

ここで  $\Re(z)$  は  $z$  の実部を表す. ここで反復積分の新たな記法を導入しておこう. 点  $p$  から  $q$  へのパス  $\gamma$  と, 微分形式  $\omega_1, \dots, \omega_k$  に対して

$$I_\gamma(p; \omega_1 \cdots \omega_k; q) := \int_{0 < t_1 < \cdots < t_k < 1} \omega_1(\gamma(t_1)) \cdots \omega_k(\gamma(t_k))$$

と置く. また  $z \in \mathbb{C}$  に対して, 微分形式  $e_z$  を  $e_z(t) = \frac{dt}{t-z}$  で定める. 定義より

$$I_\gamma(a_0; a_1, \dots, a_k; a_{k+1}) = I_\gamma(a_0; e_{a_1} \cdots e_{a_k}; a_{k+1})$$

であり, よって

$$I_\alpha(1; \{0\}^{a'}, 1, \{0\}^{b'}; -1) = I_\alpha(1; e_0^{a'} e_1 e_0^{b'}; -1)$$

である. また

$$I_\alpha(1; e_0^{a'+b'+1}; -1) \in \mathbb{R}$$

より

$$\Re\left(\frac{2}{\pi i} I_\alpha(1; e_0^{a'} e_1 e_0^{b'}; -1)\right) = \Re\left(\frac{1}{\pi i} I_\alpha(1; e_0^{a'} (2e_1 - e_0) e_0^{b'}; -1)\right)$$

となる. 一方, 変数変換  $t \mapsto t^{-1}$  より

$$I_\alpha(1; e_0^{a'} (2e_1 - e_0) e_0^{b'}; -1) = -I_{\bar{\alpha}}(1; e_0^{a'} (2e_1 - e_0) e_0^{b'}; -1) = \overline{-I_\alpha(1; e_0^{a'} (2e_1 - e_0) e_0^{b'}; -1)}$$

となるので

$$I_\alpha(1; e_0^{a'} (2e_1 - e_0) e_0^{b'}; -1)$$

は純虚数である. よって Zagier の 2-3-2 公式の右辺は次の形となる:

$$(-1)^{a+b+1} \frac{1}{\pi i} I_\alpha(1; e_0^{a'} (2e_1 - e_0) e_0^{b'}; -1).$$

Zagier の 2-3-2 公式の左辺

$$\zeta(\overbrace{2, \dots, 2}^a, 3, \overbrace{2, \dots, 2}^b)$$

についても, 少し考察する. まず, 多重ゼータ値の反復積分表示より

$$\begin{aligned} \zeta(\overbrace{2, \dots, 2}^a, 3, \overbrace{2, \dots, 2}^b) &= (-1)^{a+b+1} I(0; \overbrace{1, 0, \dots, 1, 0}^{2a}, 1, 0, 0, \overbrace{1, 0, \dots, 1, 0}^{2b}; 1) \\ &= (-1)^{a+b+1} I(0; \overbrace{1, 0, \dots, 1, 0}^{a'+1}, \overbrace{0, 1, \dots, 0, 1}^{b'+1}; 1) \end{aligned}$$

となる. ここで三点リーダーによって省略した箇所は, 全て  $0, 1$  を交互に並べていることを表している.

以上より, Zagier の 2-3-2 公式の非常に簡明な言い換えが可能となる.

**定理 11** (Zagier の 2-3-2 公式の H.-Sato による言い換え). 任意の  $x \in 3 + 2\mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $y \in 2 + 2\mathbb{Z}_{\geq 0}$  に対して

$$I(\overbrace{0; 1, 0, \dots, 1, 0}^x, \overbrace{0, 1, \dots, 0, 1}^y; 1) = \frac{1}{\pi i} I_\alpha(1; e_0^{x-1} (2e_1 - e_0) e_0^{y-1}; -1).$$

### 3 Zagier の 2-3-2 公式の一般化

定理 11 をさらに考察する. まず左辺は, 変数変換して  $I(\overbrace{1; -1, 1, \dots, -1, 1}^x, \overbrace{1, -1, \dots, 1; -1}^y)$  とかけることに注意する. 具体例として  $x = 5, y = 4$  の場合を考えよう. 更に  $f_z := 2e_{z/2} - e_0$  と置く. このとき, 少々わざとらしく位置を調整して左辺と右辺を書くと次のようになる.

$$I(1 \quad ; \quad -1 \quad , \quad 1 \quad , \quad -1 \quad , \quad 1 \quad , \quad 1 \quad , \quad -1 \quad , \quad 1 \quad ; \quad -1) \\ \frac{1}{\pi i} I_\alpha(1; f_0 \quad f_0 \quad f_0 \quad f_0 \quad f_2 \quad f_0 \quad f_0 \quad f_0 \quad ; -1)$$

右辺の反復積分の成分には左辺の反復積分の隣り合う成分の和が現れているのが見て取れるだろう. このような等式はより一般にも成立する. これが Zagier の 2-3-2 公式の一般化の一段階目である.

**定理 12** (H.-Sato).  $a_0, \dots, a_{k+1} \in \{\pm 1\}$  とし, 更に  $1 = a_0 \neq a_1$  かつ  $a_k \neq a_{k+1} = -1$  とする. このとき

$$I(a_0; a_1, \dots, a_k; a_{k+1}) = \frac{1}{\pi i} I_\alpha(a_0; f_{a_0+a_1} f_{a_1+a_2} \cdots f_{a_k+a_{k+1}}; a_{k+1}).$$

### 4 multivariable generalization of generalized Zagier's 2-3-2 formula

本節では定理 12 を, さらに多変数化する. 安直には

$$I(a_0; a_1, \dots, a_k; a_{k+1}) = \frac{1}{\pi i} I_\alpha(a_0; f_{a_0+a_1} f_{a_1+a_2} \cdots f_{a_k+a_{k+1}}; a_{k+1})$$

が  $1, -1$  以外の  $a_0, \dots, a_{k+1}$  でも成立することを期待したくなるが, それは正しくない. そこで,  $f_{a_0+a_1}$  以外の別の微分形式を見つけるというのが基本方針となる. つまり  $x, y \in \{\pm 1\}$  に対しては  $f_{x,y} = f_{x+y}$  となり, 更に

$$I(a_0; a_1, \dots, a_k; a_{k+1}) = \frac{1}{\pi i} I_\alpha(a_0; f_{a_0, a_1} f_{a_1, a_2} \cdots f_{a_k, a_{k+1}}; a_{k+1})$$

が成立するような微分形式を見つけたい. 結論から言えば, 実際そのような微分形式は存在し, それは少し見た目の複雑な微分形式

$$f_{x,y}(t) = 2d \log(\sqrt{t^2 - 2xt + 1} + \sqrt{t^2 - 2yt + 1}) - \frac{dt}{t}$$

で与えられる. 本稿では, 変数変換を用いてより見通しのよい方法で定理 12 を多変数化しよう. まずは定理 12 を変数変換で言い換えることから始める. ここで考える変数変換は  $u = (t+t^{-1})/2$  である. この変数変換により上半平面  $\{t \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(t) > 0\}$  と領域  $\{u \in \mathbb{C} \mid u \notin \mathbb{R}_{\geq 1} \cup \mathbb{R}_{\leq -1}\}$  は一対一に対応する. またパス  $\alpha$  は,  $1$  から  $-1$  への直線パスとホモトピックなパスに対応する. また微分形式の対応は

$$f_2(t) = \frac{du}{u-1}, \quad f_{-2}(u) = \frac{du}{u-1}, \quad f_0(u) = \frac{du}{\sqrt{(u-1)(u+1)}}$$

となる. ただしここで  $\sqrt{(u-1)(u+1)}$  は  $u=0$  のとき  $i$  となる枝を選んでいる. よって定理 12 は次の形に書ける:

$$I(a_0; a_1, \dots, a_k; a_{k+1}) = \frac{1}{\pi i} I_\alpha(a; \omega_{a_0, a_1} \omega_{a_1, a_2} \cdots \omega_{a_k, a_{k+1}}; a_{k+1})$$

$$(\omega_{x,y}(t) := \frac{dt}{\sqrt{(t-x)(t-y)}}).$$

これは実はより一般のパラメータで成立する.

**定理 13** (H.-Sato).  $a_0, \dots, a_{k+1}$  を複素数とし,  $\gamma$  を  $a_0$  から  $a_{k+1}$  への自己交叉のないパスで更に端点以外は  $a_0, \dots, a_{k+1}$  を通らないものとし, 更に  $a_0 \neq a_1$  と  $a_k \neq a_{k+1}$  とする. このとき

$$I_\gamma(a_0; a_1, \dots, a_k; a_{k+1}) = \frac{1}{\pi i} I_\gamma(a; \omega_{a_0, a_1} \omega_{a_1, a_2} \cdots \omega_{a_k, a_{k+1}}; a_{k+1}).$$

## 5 反復ベータ積分

本節では, 反復ベータ積分を導入し, それを用いて主定理を述べる.

**定義 14.** 複素数  $x, y, \alpha, \beta$  に対して微分形式  $[x, y]_{\alpha, \beta}$  を

$$[x, y]_{\alpha, \beta}(t) = \frac{1}{(t-x)^\alpha (t-y)^{1-\beta}}$$

で定義する.

**定義 15.** 複素数  $z_0, \dots, z_{n+1}$  と  $\alpha_0, \dots, \alpha_{n+1}$  であって, 更に  $\Re(\alpha_0) < 1$  および,  $z_0$  から  $z_{n+1}$  へのパス  $\gamma$  に対し反復ベータ積分を

$$L \left( \begin{array}{c} z_0, \dots, z_{n+1} \\ \alpha_0, \dots, \alpha_{n+1} \end{array} \right) = I_\gamma(z_0; [z_0, z_1]_{\alpha_0, \alpha_1}, [z_1, z_2]_{\alpha_1, \alpha_2}, \dots, [z_n, z_{n+1}]_{\alpha_n, \alpha_{n+1}}; z_{n+1})$$

で定義する. この積分は  $z_0 \neq z_1, z_n \neq z_{n+1}, \Re(\alpha_0) < 1, \Re(\alpha_{n+1}) > 0$  のとき収束する.

さて, 一般に  $[x, y]_{\alpha, \beta}(t)$  は  $\alpha, \beta$  が整数でない場合, べき乗関数の枝を指定する必要がある. ただし  $L \left( \begin{array}{c} z_0, \dots, z_{n+1} \\ \alpha_0, \dots, \alpha_{n+1} \end{array} \right)$  の定義では, 枝の指定が本質的に必要となる箇所は  $(t-z_0)^{\alpha_0}$  の枝と  $(t-z_{k+1})^{\alpha_{k+1}}$  のみであることを注意したい. 更に商

$$\frac{L \left( \begin{array}{c} z_0, \dots, z_{n+1} \\ \alpha_0, \dots, \alpha_{n+1} \end{array} \right)}{L \left( \begin{array}{c} z_0, z_{n+1} \\ \alpha_0, \alpha_{n+1} \end{array} \right)}$$

を考えれば, これは枝の取り方を恣意的に決めなくても, 自然に定まる量である.

**定理 16** (H.-Sato).  $\gamma$  を自己交叉のないパスとし,  $\alpha_0 - \beta_0 = \alpha_1 - \beta_1 = \cdots = \alpha_{n+1} - \beta_{n+1}$  のとき

$$\frac{L \left( \begin{array}{c} z_0, \dots, z_{n+1} \\ \alpha_0, \dots, \alpha_{n+1} \end{array} \right)}{L \left( \begin{array}{c} z_0, z_{n+1} \\ \alpha_0, \alpha_{n+1} \end{array} \right)} = \frac{L \left( \begin{array}{c} z_0, \dots, z_{n+1} \\ \beta_0, \dots, \beta_{n+1} \end{array} \right)}{L \left( \begin{array}{c} z_0, z_{n+1} \\ \beta_0, \beta_{n+1} \end{array} \right)}.$$

定理 16 は,  $L$  が微分方程式

$$\left[ (z_{n+1} - z_n) \frac{\partial}{\partial z_{n+1}} - (\alpha_{n+1} - \alpha_n) \right] L \left( \begin{array}{c} z_0, \dots, z_{n+1} \\ \alpha_0, \dots, \alpha_{n+1} \end{array} \right) = L \left( \begin{array}{c} z_0, \dots, z_{n-1}, z_{n+1} \\ \alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_{n+1} \end{array} \right)$$

を満たすことから従う. この微分方程式は,

$$\left[ (\beta - \alpha) + (x - y) \frac{\partial}{\partial y} \right] \left( \frac{1}{(t-x)^\alpha (t-y)^{1-\beta}} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{(t-x)^{\alpha-1} (t-y)^{1-\beta}} \right)$$

と

$$\frac{1}{(t-z_n)^{\alpha_n-1} (t-z_{n+1})^{1-\alpha_{n+1}}} \times [z_{n-1}, z_n]_{\alpha_{n-1}, \alpha_n}(t) = [z_{n-1}, z_{n+1}]_{\alpha_{n-1}, \alpha_{n+1}}(t)$$

の帰結である.

定理 16 の系として定理 13 が得られることを確認しよう. これは

$$L \left( \begin{array}{c} a_0, \dots, a_{k+1} \\ \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2} \end{array} \right) = I(a; \omega_{a_0, a_1} \omega_{a_1, a_2} \cdots \omega_{a_k, a_{k+1}}; a_{k+1}),$$

$$L \left( \begin{array}{c} a_0, a_{k+1} \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \end{array} \right) = \pi i,$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} L \left( \begin{array}{c} a_0, \dots, a_{k+1} \\ \alpha, \dots, \alpha \end{array} \right) / L \left( \begin{array}{c} a_0, \dots, a_{k+1} \\ \alpha, \dots, \alpha \end{array} \right) = I(a_0; a_1, \dots, a_k; a_{k+1})$$

から従う.

## 参考文献

- [1] F. Brown, Mixed Tate motives over  $\mathbb{Z}$ , Ann. of Math. (2) **175** (2012), no. 2, 949–976.
- [2] A. B. Goncharov, Multiple polylogarithms and mixed Tate motives, 2001, arXiv: math/0103059.
- [3] D. Zagier, Evaluation of the multiple zeta values  $\zeta(2, \dots, 2, 3, 2, \dots, 2)$ , Ann. of Math. (2) **175** (2012), no. 2, 977–1000.
- [4] J. Zhao, Identity families of multiple harmonic sums and multiple zeta star values, J. Math. Soc. Japan **68** (2016), no. 4, 1669–1694.