Euler 和のドリーニュ型基底について

佐藤 信夫 (九州大学)

概 要

本稿では, 九州大学の広瀬稔氏との共同研究において得られたオイラー和のドリーニュ型基底についての成果について報告する.

1 導入

1.1 多重ゼータ値・オイラー和とは

N を自然数とする. 各 N に対して収束インデックスの集合 $\mathbb{I}_N$ を

$$\mathbb{I}_N := \left\{ \binom{k_1,k_2,\cdots,k_d}{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_d} \,\middle|\, d\in\mathbb{Z}_{\geq 0},\, {\scriptstyle k_1,k_2,\ldots,k_d\in\mathbb{Z}_{>0}, \atop \varepsilon_1^N=\varepsilon_2^N=\cdots=\varepsilon_d^N=1},\, \binom{k_d}{\varepsilon_d}\neq\binom{1}{1} \right\}$$

で定め, 収束インデックス $\boldsymbol{k}=\binom{k_1,k_2,\cdots,k_d}{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_d}\in\mathbb{I}_N$ に対して, 多重 L 値と呼ばれる複素数

$$\zeta(\boldsymbol{k}) := \sum_{0<m_1<\cdots<m_d} \frac{\varepsilon_1^{m_1}\varepsilon_2^{m_2}\cdots\varepsilon_d^{m_d}}{m_1^{k_1}m_2^{k_2}\cdots m_d^{k_d}}$$

を定義する. 収束インデックスの条件 $\binom{k_d}{\varepsilon_d}\neq\binom{1}{1}$ は, $\zeta(\boldsymbol{k})$ の定義級数の収束条件にほかならない.

$N=1,2$ の場合, $\zeta(\boldsymbol{k})$ は実数であり, それぞれ多重ゼータ値 ($N=1$), 交代多重ゼータ値またはオイラー和 ($N=2$) という固有の名前で呼ばれている. 本稿では特に $N=1,2$ の場合についてのみ取り扱う. そのため, 一般の N では使えない少々ad-hoc な記号法ではあるものの, 省スペースのため, $\binom{k}{1}$ を k, $\binom{k}{-1}$ を $\overline{k}$ と書くことにする.

多重ゼータ値やオイラー和の間には様々な $\mathbb{Q}$ 上の関係式が知られている. 例えば,

$$\zeta(1,2)=8\zeta(1,\overline{2})=\zeta(3)$$

や

$$4\zeta(1,3)=\zeta(4)$$

などはその最もシンプルな例である. 多重ゼータ値の研究とは, 言ってしまえば多重ゼータ値の満たす関係式の研究である. そこで, 根源的な問いとして次の問題が考えられる.

問題 1. 多重ゼータ値 (あるいはオイラー和) の満たす関係式を完全に記述せよ.

定義の単純さから, (交代) 多重ゼータ値の関係式など簡単に記述できるのではないかと思われる方もいるかも知れない. しかしながら, (交代) 多重ゼータ値の満たす関係式の全体像は意外なほど複雑で奥深く, 多くの数学者の膨大な研究にもかかわらず, その理解はいまだ道半ばである. 本稿の目的は, オイラー和の場合に, この問題のモチーフ的なバージョンに対するある意味で完全な解答を与えることである.

1.2 既存の研究について

この節では, 本稿の主結果に関係する既存の研究について少し紹介する.

定義 (重さ・レベル)**.** インデックス $\boldsymbol{k} = \binom{k_1,k_2,\cdots,k_d}{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_d} \in \mathbb{I}_N$ に対して, $\boldsymbol{k}$ の「重さ」を

$$\mathrm{wt}(\boldsymbol{k}) := \sum_{i=1}^{d} k_i,$$

$\boldsymbol{k}$ の「レベル」を

$$\mathrm{lev}_N(\boldsymbol{k}) := \begin{cases} \sum_{i=1}^{d} |k_i - 2| & N = 1 \\ d & N = 2 \end{cases}$$

で定義する.

重さはともかく, レベルの定義は $N = 1$ と $N = 2$ の場合でまるで違うため, 「なんだか一貫性のない定義だな」という印象を持たれるかもしれない. しかしこの定義は, 混合テイトモチーフの理論から一般的に定まるレベルというフィルター構造と実は整合的である.

さて, $\mathbb{I}_N$ の重さ・レベルを固定した部分集合

$$\mathbb{I}_N(k) := \{\boldsymbol{k} \in \mathbb{I}_N \mid \mathrm{wt}(\boldsymbol{k}) = k\},$$
$$\mathbb{I}_N(k, d) := \{\boldsymbol{k} \in \mathbb{I}_N \mid \mathrm{wt}(\boldsymbol{k}) = k,\ \mathrm{lev}_N(\boldsymbol{k}) \le d\}$$

を定義しておく. また, $\mathbb{J} \subset \mathbb{I}_N$ (A は $\mathbb{Q}$ 代数) と, $\mathbb{Q}$ の部分環 R, $f : \mathbb{I}_N \longrightarrow M$ (M は R 加群) に対して, $\mathbb{J}$ に属するインデックスに対する f の値が生成する M の R 部分加群を

$$f(\mathbb{J})_R := \mathrm{span}_R\{f(\boldsymbol{k}) \mid \boldsymbol{k} \in \mathbb{J}\}$$

で表すことにする ($f = \zeta$ すなわち多重ゼータ値やオイラー和の場合は, $M = \mathbb{R}$ である). 重さが異なる多重ゼータ値やオイラー和には関係式がない, すなわち

$$\zeta(\mathbb{I}_N)_{\mathbb{Q}} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \zeta(\mathbb{I}_N(k))_{\mathbb{Q}} \quad (N = 1, 2)$$

であることが予想されている (直和予想). そこでザギエは, 重さ k の多重ゼータ値の張る $\mathbb{Q}$ 線形空間の次元

$$\dim \zeta(\mathbb{I}_1(k))_{\mathbb{Q}}$$

を (与えられた実数の有限集合に対して, それらの $\mathbb{Z}$-線形和で 0 に近いものを探す効率的な計算アルゴリズムを用いて) 数値的に調べ, ブロードハーストもまた同様の手法で

$$\dim \zeta(\mathbb{I}_2(k))_{\mathbb{Q}}$$

を調べ, 次の予想を定式化した.

予想 ($N = 1$: ザギエ, $N = 2$: ブロードハースト)**.** $N = 1, 2$ に対して $d_N(k)$ をそれぞれ

$$\sum_{k \ge 0} d_1(k) t^k = \frac{1}{1 - t^2 - t^3},$$
$$\sum_{k \ge 0} d_2(k) t^k = \frac{1}{1 - t - t^2}$$

で定めるとき,

$$\dim \zeta(\mathbb{I}_1(k))_{\mathbb{Q}} = d_1(k),$$
$$\dim \zeta(\mathbb{I}_2(k))_{\mathbb{Q}} = d_2(k)$$

であろう.

これらの予想について $\dim \mathcal{Z}(\mathbb{I}_N(k))_{\mathbb{Q}} \geq d_N(k)$ (つまり多重ゼータ値やオイラー和同士の $\mathbb{Q}$ 上の線形独立性) を示すことは, 現状では手のつけられない絶壁の難問だと考えられている. この方向で知られている結果はごく限定的である. 例えばアペリーは天才的なアイディアによって $\zeta(3)$ のよい有理近似列を構成して無理性を証明したが, これは 1 と $\zeta(3)$ の $\mathbb{Q}$ 上の線形独立性

$$\zeta(\mathbb{I}_1(0))_{\mathbb{Q}} + \zeta(\mathbb{I}_1(3))_{\mathbb{Q}} = \zeta(\mathbb{I}_1(0))_{\mathbb{Q}} \oplus \zeta(\mathbb{I}_1(3))_{\mathbb{Q}}$$

と等しい (直和予想の一部分). しかしながら, 個別の k について $\dim \zeta(\mathbb{I}_1(k))_{\mathbb{Q}} > 1$ が示されている k は一つもない.

一方で, $\dim \mathcal{Z}(\mathbb{I}_N(k))_{\mathbb{Q}} \leq d_N(k)$ (つまり多重ゼータ値やオイラー和の間に豊富な関係式があること) は, 手の届き得る代数的な問題である. 実際, 次が証明されている. [5]

定理 ($N = 1$: 寺杣 [6], $N = 2$: ドリーニュ-ゴンチャロフ [3])**.** $N = 1, 2$ に対して,

$$\dim \zeta(\mathbb{I}_N(k))_{\mathbb{Q}} \leq d_N(k).$$

この結果の証明には, 混合テイトモチーフの深い理論が使われる. $N = 1$ の場合, おおまかには次のような理屈である ($N = 2$ の場合は $\mathbb{Z}$ を $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ に置き換える).

- 実数値の $\zeta(\boldsymbol{k})$ を抽象周期に持ち上げたモチーフ的 $\zeta^{\mathfrak{m}}(\boldsymbol{k})$ が構成できる. 「持ち上げであること」すなわち $\zeta^{\mathfrak{m}}(\mathbb{I}_N(k))_{\mathbb{Q}} \twoheadrightarrow \zeta(\mathbb{I}_N(k))_{\mathbb{Q}}$ が存在することから, $\dim \zeta(\mathbb{I}_N(k))_{\mathbb{Q}} \leq \dim \zeta^{\mathfrak{m}}(\mathbb{I}_N(k))_{\mathbb{Q}}$.

- 構成したモチーフ的多重ゼータ値 $\zeta^{\mathfrak{m}}(\boldsymbol{k})$ はある $\mathbb{Z}$ 上の混合テイトモチーフの “実な” 周期である. また, $\mathbb{Z}$ 上の混合テイトモチーフの “実な” 周期のなす環は混合テイトモチーフの一般論から

$$\mathcal{H}_1 = \left(\bigoplus_{\substack{r \geq 0 \\ i_1, \ldots, i_r > 0}} K_{2i_1-1}(\mathbb{Z})_{\mathbb{Q}} \otimes \cdots \otimes K_{2i_r-1}(\mathbb{Z})_{\mathbb{Q}} \right) \otimes \mathbb{Q}[\zeta^{\mathfrak{m}}(2)]$$

  と同型である (ここで $K_{2i-1}(\mathbb{Z})_{\mathbb{Q}}$ は $\mathbb{Z}$ の $2i-1$ 次 K 群にテンソル $\mathbb{Q}$ した $\mathbb{Q}$ 線形空間). よって, $\mathcal{H}_1$ の重さが k の元のなす部分空間の次元を $d_1'(k)$ とおくと, 包含関係から $\dim \zeta^{\mathfrak{m}}(\mathbb{I}_N(k))_{\mathbb{Q}} \leq d_1'(k)$ (ただし, $\mathcal{H}_1$ における重さは $K_{2i_1-1}(\mathbb{Z})_{\mathbb{Q}}$ の生成元に対して i, $\zeta^{\mathfrak{m}}(2)$ に対して 2 と定義する).

- 次元公式

$$\dim K_{2i-1}(\mathbb{Z})_{\mathbb{Q}} = \begin{cases} 1 & i > 1, \text{ odd} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

から,

$$\sum_{k=0}^{\infty} d'_1(k)t^k = \frac{1}{1-\sum_{i\geq 1}\dim K_{2i-1}(\mathcal{O})_{\mathbb{Q}}t^i} \times \frac{1}{1-t^2}$$
$$= \frac{1}{1-\frac{t^3}{1-t^2}} \times \frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{1-t^2-t^3},$$

すなわち, $d'_1(k) = d_1(k)$ である.

以上の事実を合わせると, $\dim \zeta(\mathbb{I}_1(k))_{\mathbb{Q}} \leq d_1(k)$ が得られる.

さて, $\dim \zeta(\mathbb{I}_N(k))_{\mathbb{Q}} = d_N(k)$ を示すことは無理だとしても, ゴンチャロフ, ブラウンによって構成されたモチーフ的多重ゼータ値について $\dim \zeta^{\mathfrak{m}}(\mathbb{I}_N(k))_{\mathbb{Q}} = d_N(k)$ を示すことであれば, 純代数的な問題である. いま,

$$\mathbb{B}_1 := \{(k_1, k_2, \ldots, k_m) \in \mathbb{I}_1 \mid m \geq 0,\, k_1, k_2, \ldots, k_m \in \{2, 3\}\},$$
$$\mathbb{B}_2 := \{(k_1, k_2, \ldots, k_{m-1}, \overline{k_m}) \in \mathbb{I}_2 \mid m \geq 0,\, k_2, \ldots, k_m : \mathrm{odd}\}$$

とおき, $N = 1, 2$ に対して

$$\mathbb{B}_N(k) := \mathbb{B}_N \cap \mathbb{I}_N(k),$$
$$\mathbb{B}_N(k, d) := \mathbb{B}_N \cap \mathbb{I}_N(k, d)$$

と定めよう. このとき, 簡単な数え上げで $\mathbb{B}_N(k) = d_i(k)$ がチェックできる.

定理 ($N = 1$: ブラウン [1], $N = 2$: ドリーニュ[2])**.** $N = 1, 2$ に対して $\zeta^{\mathfrak{m}}(\boldsymbol{k})$ ($\boldsymbol{k} \in \mathbb{B}_N(k, d)$) は $\mathbb{Q}$ 上線形独立で,

$$\zeta^{\mathfrak{m}}(\mathbb{I}_N(k, d))_{\mathbb{Q}} = \zeta^{\mathfrak{m}}(\mathbb{B}_N(k, d))_{\mathbb{Q}}.$$

この定理の系として, $\dim \zeta^{\mathfrak{m}}(\mathbb{I}_N(k, d))_{\mathbb{Q}} = \#\mathbb{B}_N(k, d)$ であることや, 実数値の多重ゼータ値やオイラー和が $\mathbb{B}_N(k, d)$ というインデックス対する値で $\mathbb{Q}$ 上生成されていること

$$\zeta(\mathbb{I}_N(k, d))_{\mathbb{Q}} = \zeta(\mathbb{B}_N(k, d))_{\mathbb{Q}}$$

が従う. $\mathbb{B}_1$ はホフマンによって基底となることが初めて予想されたのでホフマン基底と呼ばれる. また, 本稿では $\mathbb{B}_2$ をドリーニュ型基底と呼ぶことにする. ここでは立ち入らないが, 証明には混合テイトモチーフの周期に対する余積 (あるいは余作用) をモチーフ的反復積分に対して計算した明示公式であるゴンチャロフ余積 (あるいはその無限小版であるブラウン作用素) に関する帰納的な議論が使われる.

ブラウンやドリーニュの結果を踏まえると, 1.1 節で提起した根源的な問い (問題 1) のモチーフ的バージョンは, 次のように言うことができる.

問題 2. $\zeta^{\mathfrak{m}}(\mathbb{I}_N(k, d))_{\mathbb{Q}} = \zeta^{\mathfrak{m}}(\mathbb{B}_N(k, d))_{\mathbb{Q}}$ を導く具体的な関係式族を与えよ. すなわち, $\boldsymbol{k} \in \mathbb{I}_N(k, d)$ に対して,

$$\zeta^{\mathfrak{m}}(\boldsymbol{k}) = \sum_{\boldsymbol{k}' \in \mathbb{B}_N(k, d)} c_{\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}'} \zeta^{\mathfrak{m}}(\boldsymbol{k}')$$

となる $c_{\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}'} \in \mathbb{Q}$ を決定せよ.

本稿では詳細には触れないが, 問題 2 はモチーフ理論的な観点では, $\mathbb{Z}$ (resp. $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$) 上の混合テイトモチーフのなす淡中圏の淡中双対として定義される「モチーフ的ガロア群」の $\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$ (resp. $\mathbb{P}^1 \setminus \{0,\pm1,\infty\}$) のモチーフ的基本群への作用を記述せよ (より正確には, モチーフ的基本群の自己同型群の中の像を記述せよ) という問題に言い換えられ, 理論的にも重要な問題である.

ブラウンやドリーニュの結果から, 問いの $c_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'} \in \mathbb{Q}$ は存在し一意的であることは分かっている. しかし, 彼らの強力な定理やその証明手法を持ってしても, 具体的に $c_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}$ を決定する方法は得られない.

1.3 主結果

この節では主結果について述べる. まず, 2 べきを修正したオイラー和 $\widetilde{\zeta^{\mathfrak{m}}}(\boldsymbol{k})$ を

$$\widetilde{\zeta^{\mathfrak{m}}}(\boldsymbol{k}) := 2^d \widetilde{\zeta^{\mathfrak{m}}}(\boldsymbol{k}) \quad (\boldsymbol{k} \in \mathbb{I}_2(k,d))$$

で定義する. また,

$$\mathbb{Z}_{(2)} := \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z},\, q \in 1+2\mathbb{Z} \right\}$$

とおく. このとき, 次が成り立つ.

定理 (広瀬-佐藤)**.** $k, d \geq 0$ に対して,

$$\widetilde{\zeta^{\mathfrak{m}}}(\mathbb{I}_N(k,d))_{\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]} = \widetilde{\zeta^{\mathfrak{m}}}(\mathbb{B}_N(k,d))_{\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]}.$$

より詳細に, $\boldsymbol{k} \in \mathbb{I}_2(k,d)$ と $\boldsymbol{k}' \in \mathbb{B}_2(k,d)$ に対して, 明示的に定まる $c_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'} \in \mathbb{Z}_{(2)}$ があって,

$$\widetilde{\zeta^{\mathfrak{m}}}(\boldsymbol{k}) = \sum_{\boldsymbol{k}' \in \mathbb{B}_N(k,d)} c_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'} \widetilde{\zeta^{\mathfrak{m}}}(\boldsymbol{k}')$$

を満たす.

これは, 問題 2 の $N=2$ の場合に対する完全な解答を与える.

1.4 主結果の証明のアイディア

この節では主結果の証明のアイディアについて簡単に説明する. 次の事実が基本的である.

補題. X, Y を有限生成 $\mathbb{Z}_{(2)}$ 加群とする. このとき,

$$X \subset 2X + Y \iff X \subset Y.$$

Proof. $\Longleftarrow$ は自明なので, $\Longrightarrow$ を示す. X, Y の生成元をそれぞれ $x_1, \ldots, x_n$ と $y_1, \ldots, y_m$ とする. このとき, $X \subset 2X + Y$ であるから, $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{Z}_{(2)})$ と $B \in \mathrm{Mat}_{n,m}(\mathbb{Z}_{(2)})$ であって,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 2A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

であるものが存在する．いま, $\det(I_n - 2A) \equiv 1 \pmod 2$ であるから, $I_n - 2A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_{(2)})$ である．したがって,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (I_n - 2A)^{-1} B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

□

いま, $X(k,d) := \widetilde{\zeta^{\mathfrak{m}}}(\mathbb{I}_2(k,d))_{\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]}$, $Y(k,d) := \widetilde{\zeta^{\mathfrak{m}}}(\mathbb{B}_2(k,d))_{\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]}$ とおこう．主定理の主張は

$$X(k,d) \subset Y(k,d)$$

であるが, 補題によって,

$$X(k,d) \subset 2X(k,d) + Y(k,d)$$

を示すことに帰着される．これをいきなり示すのは大変なので, 次のような二段階に分ける．まず

$$\mathbb{B}_2'(k,d) := \{(k_1, k_2, \ldots, k_{m-1}, \overline{k_m}) \in \mathbb{I}_2(k,d) \,|\, m \geq 0\}$$

とし, $W(k,d) := \widetilde{\zeta^{\mathfrak{m}}}(\mathbb{B}_2'(k,d))_{\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]}$ とおく．

ステップ 1. $X(k,d) \subset 2X(k,d) + W(k,d)$ を示す．

ステップ 2. $W(k,d) \subset 2X(k,d) + Y(k,d)$ を示す．

ステップ 1, 2 ともに (一般化された)「合流関係式」を使って証明される．合流関係式とは, 大雑把にいうと, 変数付き反復積分のみたす関係式の極限として得られる反復積分の等式のことである (最も基本的な場合の合流関係式については [5] を参照)．まず, 反復積分の定義を思い出そう．

定義 3 (反復積分)**.** 開集合 $U \subset \mathbb{P}^1$ 上の正則微分 1-形式の列 $\omega_1, \ldots, \omega_n$ と, $\gamma(0,1) \subset U$ であるような路 $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{P}^1$ に対して, (積分が収束する場合に) 反復積分を

$$I_\gamma(x; \omega_1 \cdots \omega_n; y) := \int_{0<t_1<\cdots<t_n<1} \omega_1(\gamma(t_1)) \cdots \omega_n(\gamma(t_n))$$

によって定義する．ただし, $x = \gamma(0)$, $y = \gamma(1)$ は積分路 γ の端点である．

とくに γ が x から y への直線路のときは, 添字 γ を省略して $I(x; \omega_1 \cdots \omega_n; y)$ と書くことにする．

さて, S を $\mathbb{C}$ の部分集合とし, $z \in S$ に対して形式的な変数 e_z が生成する非可換多項式環 $\mathbb{Q}\langle e_z | \, z \in S\rangle$ を考え, $\gamma(0,1) \subset \mathbb{P}^1 \setminus S$ を満たす路 $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{P}^1$ に対して,「収束元」のなす部分環を

$$\mathcal{A}_S^\gamma := \bigoplus_{\substack{z_1,\ldots,z_n \in S \\ z_1 \neq \gamma(0), z_n \neq \gamma(1)}} \mathbb{Q} e_{z_1} \cdots e_{z_n},$$

で定義する．また, シンボル e_a に対して, やや記号の乱用だが $\{a, \infty\}$ のみに極をもつ有理微分形式

$$e_a(t) := \frac{dt}{t-a}$$

を対応付ける．このとき, $L_\gamma : \mathcal{A}_S^\gamma \longrightarrow \mathbb{C}$ を

$$L_\gamma(w) := I_\gamma(\gamma(0); w; \gamma(1))$$

で定めると, 反復積分が収束するので L は well-defined である．$\mathrm{dch}_{0,1}$ を $\gamma(x)=x$ で定まる路とすると, 多重 L 値は

$$\zeta\binom{k_1,k_2,\cdots,k_d}{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_d} = (-1)^d L_{\mathrm{dch}_{0,1}}(e_{\eta_1}e_0^{k_1-1}\cdots e_{\eta_d}e_0^{k_d-1})$$
$$(1 \le i \le d \text{ に対して } \eta_{i+1} = \varepsilon_i\eta_i \text{ および } \eta_{d+1} = 1)$$

と $\mathcal{A}_{\{0\}\cup\mu_N}^{\mathrm{dch}_{0,1}}$ の元の $L_{\mathrm{dch}_{0,1}}$ での像となっている．いま, $z_0, \ldots, z_{n+1}$ を複素パラメーター t の有理関数とすると, $I_\gamma(z_0; e_{z_1}\cdots e_{z_n}; z_{n+1})$ は t に関する複素関数とみなせる．この関数は微分方程式系

$$\begin{aligned} dI_\gamma(z_0; e_{z_1}\cdots e_{z_n}; z_{n+1}) = &\sum_{\substack{1\le i\le n \\ z_i \ne z_{i+1}}} d\log(z_{i+1}-z_i) \times I_\gamma(z_0; e_{z_1}\cdots \widehat{e_{z_i}}\cdots e_{z_n}; z_{n+1}) \\ &- \sum_{\substack{1\le i\le n \\ z_{i-1} \ne z_i}} d\log(z_i - z_{i-1}) \times I_\gamma(z_0; e_{z_1}\cdots \widehat{e_{z_i}}\cdots e_{z_n}; z_{n+1}) \end{aligned}$$

を満たす (ゴンチャロフの微分公式 [4])．この微分方程式系を用いて, 次のような式を導くことができる．

1. γ を 0 から z への路とする．このとき, $w \in \mathcal{A}_{\{0,1,z\}}^\gamma$ に対して

$$L_\gamma(w) = \sum_{\substack{0\le m\le \deg w \\ a_1,\ldots,a_m \in \{0,1\}}} (\text{多重ゼータ値}) \times L_\gamma(e_{a_1}\cdots e_{a_m})$$

という「標準関係式」が得られる [5]．この標準関係式において $z \to -1$ の極限として得られる関係式 (合流関係式) からステップ 1 が従う．

2. 1 と同様に γ を 0 から z への路とする．このとき, $w \in \mathcal{A}_{\{0,1,z^2\}}^\gamma$ に対して

$$L_\gamma(w) = \sum_{\substack{0\le m+n\le \deg w \\ a_1,\ldots,a_m \in \{0,1,-1\}}} (\text{多重ゼータ値}) \times L_\gamma(e_{a_1}\cdots e_{a_m}) \times \frac{\log(-z)^n}{n!}$$

という「標準関係式」が得られる．この標準関係式において $z \to -1$ の極限として得られる合流関係式からステップ 2 が従う．このステップでは標準関係式の 2-進的な性質が鍵になる．

参考文献

[1] F. Brown, Mixed Tate motives over $\mathbb{Z}$, Ann. of Math. (2) **175** (2012), no. 2, 949–976.

[2] P. Deligne, Le groupe fondamental unipotent motivique de $\mathbf{G}_m - \mu_N$, pour $N = 2, 3, 4, 6$ ou 8, Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. **112** (2010), 101–141.

[3] P. Deligne and A. B. Goncharov, Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) **38** (2005), no. 1, 1–56.

[4] A. B. Goncharov, Multiple polylogarithms and mixed Tate motives, preprint, 2001, arXiv:math/0103059v4.

[5] M. Hirose and N. Sato, Iterated integrals on $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty, z\}$ and a class of relations among multiple zeta values, Adv. Math. **348** (2019), 163–182.

[6] T. Terasoma, Mixed Tate motives and multiple zeta values, Invent. Math. **149** (2002), no. 2, 339–369.