# On the Hom version of the Grothendieck conjecture for morphisms from regular varieties to hyperbolic polycurves of dimension 2: A report

長町 一平 (東京大学)

**概 要**

本稿は第 13 回福岡整数論研究集会における講演「On the Hom version of the Grothendieck Conjecture for morphisms from regular varieties to hyperbolic polycurves of dimension 2」の報告である．講演では劣 $p$ 進体上の 2 次元多重双曲曲線に関する Hom 版の Grothendieck 予想について扱った．本稿の内容はこの講演の解説かつ [Nag2] の要約に当たる．

## 1 導入

$p$ を素数, $K$ を劣 $p$ 進体 (すなわち $K$ は $\mathbb{Q}_p$ のある有限生成拡大体の部分体) とする．$\overline{K}$ を $K$ の代数閉包とし, $G_K := \mathrm{Gal}\,(\overline{K}/K)$ とする．

**記法・定義 1.1.** 1. $Z$ を $K$ 上のスキームとする．構造射 $Z \to \mathrm{Spec}\,K$ が分離的かつ有限型であり幾何的連結ファイバーを持つとき $Z$ は $K$ 上の代数多様体であるという．$Z_{\overline{K}} := Z \times_{\mathrm{Spec}\,K} \mathrm{Spec}\,\overline{K}$ と書く．

2. $* \to Z_{\overline{K}}$ を幾何的点とする．各エタール基本群 $\pi_1(Z_{\overline{K}}, *), \pi_1(Z, *)$ をそれぞれ $\Delta_Z, \Pi_Z$ と書く．

**注意 1.2.** 代数多様体の幾何的点の取り替えはエタール基本群に内部自己同型を誘導する．そのため $\Delta_Z, \Pi_Z$ という基点を省略した記号には内部自己同型での不定性が含まれている．本稿では主にエタール基本群間の連続外部準同型, すなわち連続準同型の内部自己同型の合成に関する同値類を扱うため, これらは適切な記号である．

$K$ 上の代数多様体 $Z$ に対してホモトピー完全列

$$1 \to \Delta_Z \to \Pi_Z \to G_K \to 1 \tag{1}$$

が得られる．

**定義 1.3.** $S$ をスキーム, $C$ を $S$ 上のスキームとする．以下の 3 条件を満たすとき $C$ は $S$ 上の双曲曲線であるという．

- 固有滑らかかつ相対次元が 1 の $S$ 上のスキーム $\overline{C} \to S$ で, $C$ を開部分スキームとして ($S$ 上) 含むものが存在する．
- $\overline{C} \setminus C$ は $S$ 上の有限エタールな因子である．

- $\overline{C} \to S$ の幾何的ファイバーの種数を $g$, $\overline{C} \setminus C \to S$ の階数を $r$ とする．$2g + r - 2 > 0$ である．

$K$ 上の双曲曲線のエタール基本群は非常に多くの情報を持った不変量である．特に以下のように Hom 版の Grothendieck 予想と呼ばれる強力な結果がある．

**命題 1.4** ([Mzk1, Theorem A])**.** $X$ を $K$ 上の双曲曲線, $Y$ を $K$ 上の滑らかな代数多様体とする．自然な写像

$$\mathrm{Mor}_K^{\mathrm{dom}}(Y, X) \to \mathrm{Hom}_{G_K}^{\mathrm{open}}(\Pi_Y, \Pi_X)/\Delta_X \tag{2}$$

は全単射である．ここに $\mathrm{Mor}_K^{\mathrm{dom}}(Y, X)$ は $Y$ から $X$ への $K$ 上の支配的な射の集合であり, $\mathrm{Hom}_{G_K}^{\mathrm{open}}(\Pi_Y, \Pi_X)$ は $\Pi_Y$ から $\Pi_X$ への $G_K$ 上の開連続準同型の集合である．さらに $\Delta_X$ の $\mathrm{Hom}_{G_K}^{\mathrm{open}}(\Pi_Y, \Pi_X)$ への作用を内部自己同型の合成で定義し, $\mathrm{Hom}_{G_K}^{\mathrm{open}}(\Pi_Y, \Pi_X)/\Delta_X$ はこの作用での同値類の集合を表す．

**注意 1.5.** $\mathrm{Mor}_K^{\mathrm{dom}}(Y, X)$ の相異なる 2 元は, $Y_{\overline{K}}$ 上の基点を $X_{\overline{K}}$ の相異なる基点に移しうる．写像 (2) の値域は $\Delta_X$ による共役での同値類を考えているため, 写像 (2) は well-defined になる．

**注意 1.6.** 命題 1.4 は [Ho, Theorem 3.3] において $Y$ が正規の場合に一般化された．

命題 1.4 は Grothendieck により予想され (cf. [Letter]) 望月により証明された．命題 1.4 の $Y$ として $K$ 上の双曲曲線を考えると, $K$ 上の双曲曲線の同型類はエタール基本群の $G_K$ 上の同型類から決定されることが分かる．このように, エタール基本群から代数多様体の同型類を決定する研究を遠アーベル幾何学という．

双曲曲線 $X$ は 1 次元代数多様体であるため, 代数多様体 $Y$ から $X$ への $K$ 上の支配的でない射は定値写像にかぎる．定値写像が誘導する外部準同型 $\Pi_Y \to \Pi_X$ は自然な全射 $\Pi_X \to G_K$ (cf. (1)) の切断 (の共役同型類) を定める．ゆえに $X$ の $K$ 有理点と自然な全射 $\Pi_X \to G_K$ の切断の対応が問題となる．この問題は Grothendieck 切断予想と呼ばれる．

**記法・定義 1.7.** $X$ を $K$ 上の双曲曲線とし, $\overline{X}$ を定義 1.3 における $X$ の滑らかなコンパクト化 ($X$ から一意的に定まる) とする．

1. $x \in (\overline{X} \setminus X)(K)$ に対し, $x$ の $\Pi_X$ における分解群を $D_x$ と書く．分解群は $\Delta_X$ の共役を除いて一意的であるが, $\Pi_X$ が共役の合成での不定性を無視した記法 (cf. 注意 1.2) であるため, 記法としての整合性がとれている．

2. 自然な全射 $\Pi_X \to G_K$ の切断の集合を $\mathrm{Sect}_{G_K}(\Pi_X)$ と書く．$\Delta_X$ は $\mathrm{Sect}_{G_K}(\Pi_X)$ に共役の合成で作用する．$\mathrm{Sect}_{G_K}(\Pi_X)/\Delta_X$ でその商集合を表す．

3. $\mathrm{Sect}_{G_K}(\Pi_X)$ の部分集合 $\{s \in \mathrm{Sect}_{G_K}(\Pi_X) \mid \mathrm{Im}\, s \not\subseteq D_x \subset \Pi_X \quad \forall x \in (\overline{X} \setminus X)(K)\}$ を $\mathrm{Sect}_{G_K}^{NC}(\Pi_X)$ と書く．$\Delta_X$ の $\mathrm{Sect}_{G_K}(\Pi_X)$ への作用は $\mathrm{Sect}_{G_K}^{NC}(\Pi_X)$ への作用を誘導する．$\mathrm{Sect}_{G_K}^{NC}(\Pi_X)/\Delta_X$ でその商集合を表す．

**命題 1.8** (cf. [Mzk2, Theorem 1.3 (iv)])**.** $X$ を $K$ 上の双曲曲線とする．自然な写像

$$X(K) \to \mathrm{Sect}_{G_K}(\Pi_X)/\Delta_X$$

は単射であり, 写像

$$X(K) \to \mathrm{Sect}_{G_K}^{NC}(\Pi_X)/\Delta_X \tag{3}$$

を誘導する．

**予想 1.9** (Grothendieck 切断予想)**.** 写像 (3) は全単射である.

Grothendieck 切断予想は元々$X$ が固有な場合にのみ予想されていた. $X$ が $K$ 上固有でない場合には上記のように注意して取り扱う必要がある. Grothendieck 切断予想は未解決問題であり, 現在でも決定的な結果は得られていない.

多重双曲曲線は双曲曲線の高次元対応物である. 以下, 双曲曲線 $X_1 \to \operatorname{Spec} K$ と双曲曲線 $X_2 \to X_1$ を固定する. この $X_2 \to X_1 \to \operatorname{Spec} K$ のように, 双曲曲線の連続拡大となる 2 次元の代数多様体を 2 次元の多重双曲曲線という. 2 次元の多重双曲曲線に関するある種の Hom 版の Grothendieck 予想の解決として, 星は以下の結果を与えた.

**命題 1.10** ([Ho, Proposition 3.2 (ii), Theorem A])**.** $Y \to \operatorname{Spec} K$ を正規代数多様体とする.

1. 次の自然な可換図式がある.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Mor}_K(Y, X_2) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{G_K}(\Pi_Y, \Pi_{X_2})/\Delta_{X_2} \\ \mathrm{Mor}_K^{\mathrm{dom}}(Y, X_2) \arrow[r] \arrow[u, hook] & \mathrm{Hom}_{G_K}^{\mathrm{open}}(\Pi_Y, \Pi_{X_2})/\Delta_{X_2}. \arrow[u, hook] \end{tikzcd} \tag{4}$$

   ここに, $\mathrm{Mor}_K(Y, X_2)$ (respectively, $\mathrm{Mor}_K^{\mathrm{dom}}(Y, X_2)$) は $Y$ から $X$ への $K$ 上の射 (respectively, 支配的な射) の集合である. $\mathrm{Hom}_{G_K}(\Pi_Y, \Pi_{X_2})$ (respectively, $\mathrm{Hom}_{G_K}^{\mathrm{open}}(\Pi_Y, \Pi_{X_2})$) は $\Pi_Y$ から $\Pi_{X_2}$ への $G_K$ 上の連続群準同型 (respectively, 連続開群準同型) の集合であり, $\Delta_{X_2}$ が共役で作用する. その商を $\mathrm{Hom}_{G_K}(\Pi_Y, \Pi_{X_2})/\Delta_{X_2}$ (respectively, $\mathrm{Hom}_{G_K}^{\mathrm{open}}(\Pi_Y, \Pi_{X_2})/\Delta_{X_2}$) と書く.

2. 図式 (4) の写像

$$\mathrm{Mor}_K(Y, X_2) \to \mathrm{Hom}_{G_K}(\Pi_Y, \Pi_{X_2})/\Delta_{X_2}$$

   は単射である.

3. 核が位相的有限生成な開外部準同型のなす $\mathrm{Hom}_{G_K}^{\mathrm{open}}(\Pi_Y, \Pi_{X_2})/\Delta_{X_2}$ の部分集合は, 図式 (4) の写像

$$\mathrm{Mor}_K^{\mathrm{dom}}(Y, X_2) \to \mathrm{Hom}_{G_K}^{\mathrm{open}}(\Pi_Y, \Pi_{X_2})/\Delta_{X_2}$$

   の像に含まれる.

命題 1.10 は, ある種の $\mathrm{Hom}_{G_K}^{\mathrm{open}}(\Pi_Y, \Pi_{X_2})/\Delta_{X_2}$ の元が代数多様体の支配的な射から誘導されることを示している. 一方, 支配的な射から誘導されない開外部準同型があることに注意する.

**注意 1.11.** ある $K$ 上の 2 次元多重双曲曲線 $X_2'$, 双曲曲線 $C'$, $K$ 上の射 $C' \to X_2'$ であって, 誘導する基本群の外部準同型 $\Pi_C \to \Pi_{X_2'}$ が開外部準同型になるものが存在する.

よって次のような問題が考えられる.

**問題 1.12.**

1. $\mathrm{Hom}_{G_K}^{\mathrm{open}}(\Pi_Y, \Pi_{X_2})/\Delta_{X_2}$ の元が $\mathrm{Mor}_K^{\mathrm{dom}}(Y, X_2)$ の元から誘導されるか否かを群論的に判定できるか.

2. 任意の $\mathrm{Hom}_{G_K}^{\mathrm{open}}(\Pi_Y, \Pi_{X_2})/\Delta_{X_2}$ の元は, ある代数多様体の射から誘導されるか.

本稿では問題 1.12.1 に対し解を与える. さらに, ある双曲曲線のクラスに対する予想 1.9 の成立を仮定した上で, 問題 1.12.2 を証明する.

## 2 主定理

$K, X_2, X_1$ は 1 章と同じ対象を表す．またこの章では, $K$ 上の正規代数多様体 $Y$ を固定する．問題 1.12.1 を解くために以下の考察を与える．

**考察 2.1.** $Y$ から $X_2$ への代数多様体の射 $f : Y \to X_2$ であって, 開外部準同型 $f_* : \Pi_Y \to \Pi_{X_2}$ を誘導するものを考える．合成射 $Y \to X_2 \to X_1$ を $f_1$, $Y$ の関数体を $K(Y)$ と書く．

1. $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 1$ とする．$f_1$ は支配的である．$f_1$ が定める $X_1$ の $K(Y)$ での整閉包を $N_{Y/X_1}$ とする．誘導される支配的な射 $Y \to N_{Y/X_1}$ の像が定める $N_{Y/X_1}$ の開部分スキームを $U_{Y/X_1}$ とする．誘導される射 $Y \to X_2 \times_{X_1} U_{Y/X_1}$ の像は, 射 $X_2 \times_{X_1} U_{Y/X_1} \to U_{Y/X_1}$ の切断を定める．

2. $f$ が支配的 (i.e., $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 2$) とする．次の図式を可換にするような $K$ 上の任意の双曲曲線 $X_1'$, 任意の支配的な射 $X_1' \to X_1$, $Y \to X_1'$ に対し, 誘導される射 $Y \to X_2 \times_{X_1} X_1'$ は支配的である．

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[d, "f"] & X_1' \arrow[d] \\ X_2 \arrow[r] & X_1. \end{tikzcd}$$

エタール基本群に対して同様の考察の成立が期待される．実際には完全な類似を考えず, $\Pi_Y$ を開部分群と取り替えたものを考える．

以下では連続開外部準同型 $\phi : \Pi_Y \to \Pi_{X_2}$ を固定する．

**定義 2.2.** $\phi$ についての 2 条件 (O) と (S) を定義する．$K'$ を $K$ の有限次拡大体, $C$ を $K'$ 上の双曲曲線, $C \to X_1$ を $K$ 上の支配的な射とする．$\Pi' \subset \Pi_Y$ を開部分群, $\Pi' \to \Pi_C$ を連続開外部準同型とする．これらについて以下の図式を考え, 外側の 5 角形が可換であるとする．

$$\begin{tikzcd} \Pi' \arrow[d, hook] \arrow[dr, dotted] \arrow[drr] & & \\ \Pi_Y \arrow[dr, "\phi"'] & \Pi_{X_2} \times_{\Pi_{X_1}} \Pi_C \arrow[r] \arrow[d] & \Pi_C \arrow[d] \\ & \Pi_{X_2} \arrow[r] & \Pi_{X_1}. \end{tikzcd}$$

(S) 上記の条件を満たす任意の $K', C \to X_1, \Pi' \to \Pi_C$ に対し, 誘導される連続外部準同型 $\Pi_Z \to \Pi_{X_2} \times_{\Pi_{X_1}} \Pi_C$ の像は射影 $\Pi_{X_2} \times_{\Pi_{X_1}} \Pi_C \to \Pi_C$ により $\Pi_C$ に同型に移らない (射影の切断を定めない).

(O) 上記の条件を満たす任意の $K', C \to X_1, \Pi' \to \Pi_C$ に対し, 誘導される連続外部準同型 $\Pi_Z \to \Pi_{X_2} \times_{\Pi_{X_1}} \Pi_C$ は開である．

条件 (S) は考察 2.1.1 の類似が成立しないことに対応し, 条件 (O) は考察 2.1.2 の類似が成立することに対応する．これらの条件を用いて問題 1.12.1 への解を与える．

**定理 2.3** ([Nag2, Theorem 0.4])**.** $Y$ が正則であるとする．以下は同値である．

1. $\phi$ を誘導する $K$ 上の支配的な射 $f : Y \to X_2$ が存在する.
2. $\phi$ は (S) を満たす.
3. $\phi$ は (O) を満たす.

次に, あるクラスの双曲曲線の Grothendieck 切断予想を仮定した上で, 問題 1.12.2 に解を与える.

**定理 2.4** ([Nag2, Theorem 0.6])**.** 次の条件 (SC) が満たされると仮定する.

(SC) 任意の $K$ 上超越次数 1 の有限生成拡大体 $L$ と任意の $L$ 上の双曲曲線 $C$ について, Grothendieck 切断予想 (cf. 予想 1.9) が成立する. すなわち, $C, L$ に対して定まる写像 (3) は全単射である.

このとき, $\phi$ を誘導する $K$ 上の射 $Y \to X_2$ が存在する.

## 3 主定理の証明の概略

$K, X_2, X_1, Y, \phi$ は 2 章と同じ対象を表す. まず定理 2.3 の証明の概略を与える. 外部準同型の合成

$$\Pi_Y \overset{\phi}{\to} \Pi_{X_2} \to \Pi_{X_1}$$

を $\phi_1$ と書く. 命題 1.4 と注意 1.6 より $\phi_1$ を誘導する $K$ 上の支配的な $f_1 : Y \to X_1$ が存在する. $X_1$ の関数体を $K(X_1)$, $K(X_1)$ の絶対ガロア群を $G_{K(X_1)}$ と書く. $X_2 \times_{X_1} \operatorname{Spec} K(X_1), Y \times_{X_1} \operatorname{Spec} K(X_1)$ をそれぞれ $X_{2,K(X_1)}, Y_{K(X_1)}$ と書く. いま, $f_1$ の誘導する射 $Y_{K(X_1)} \to \operatorname{Spec} K(X_1)$ が引き起こす外部準同型 $\Pi_{Y_{K(X_1)}} \to G_{K(X_1)}$ は図式 (5) の外側の 5 角形を可換にする. [Ho, Proposition 2.4] より

$$\Pi_{X_{2,K(X_1)}} \cong \Pi_{X_2} \times_{\Pi_{X_1}} G_{K(X_1)}$$

という自然な同型が存在する. よって, 図式 (5) より誘導される自然な外部準同型 $\phi_\xi : \Pi_{Y_{K(X_1)}} \to \Pi_{X_{2,K(X_1)}}$ が存在する.

$$\begin{tikzcd}
Y_{K(X_1)} \arrow[d] \arrow[drr] & & \\
Y \arrow[drr, "f_1"'] & X_{2,K(X_1)} \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Spec} K(X_1) \arrow[d] \\
& X_2 \arrow[r] & X_1.
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\Pi_{Y_{K(X_1)}} \arrow[d] \arrow[drr] \arrow[dr, dotted, "\phi_\xi"'] & & \\
\Pi_Y \arrow[dr, "\phi"'] \arrow[drr, "\phi_1"] & \Pi_{X_{2,K(X_1)}} \arrow[r] \arrow[d] & G_{K(X_1)} \arrow[d] \\
& \Pi_{X_2} \arrow[r] & \Pi_{X_1}.
\end{tikzcd} \tag{5}$$

さて, $\phi$ を誘導する $K$ 上の (支配的な) 射 $Y \to X_2$ が存在するかを問題にしていた. この問題に答えるための一つ目の補題が次である.

**補題 3.1** ([Ho, Lemma 3.4 (iv)] and [Nag2, Lemma 1.17])**.** 以下は同値である．

1. $\phi_\xi$ を誘導する $K(\xi)$ 上の射 $f_\xi : Y_{K(X_1)} \to X_{2,K(X_1)}$ が存在する．
2. $\phi$ を誘導する $K$ 上の射 $f : Y \to X_2$ が存在する．

また $f$ が支配的であることと $f_\xi$ が支配的であることは同値である．

$X_{2,K(X_1)}$ は劣 $p$ 進体 $K(X_1)$ 上の双曲曲線である．よって命題 1.4 と注意 1.6 より, 支配的な $f_\xi$ が存在することと $\phi_\xi$ が開であることは同値である．図式 (5) の左の平行四辺形を取り出し, その各対象から $G_{K(X_1)}, \Pi_{X_1}$ への外部準同型の核を考えて, 以下の図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
\Delta_{Y_{K(X_1)}} \arrow[d] \arrow[dr, dotted, "\phi_{\xi,\Delta}"] & \\
\Delta_{Y/X_1} \arrow[dr, "\phi_\Delta"'] & \Delta_{X_{2,K(X_1)}} \arrow[d, "\wr"] \\
& \mathrm{Ker}\,(\Delta_{X_2} \to \Delta_{X_1})
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Pi_{Y_{K(X_1)}} \arrow[d] \arrow[dr, dotted, "\phi_\xi"] & \\
\Pi_Y \arrow[dr, "\phi"'] & \Pi_{X_{2,K(X_1)}} \arrow[d] \\
& \Pi_{X_2}
\end{tikzcd}$$

ここに $\Delta_{Y/X_1}$ は外部準同型 $\Pi_Y \to \Pi_{X_1}$ の核を表す．$\phi_{\xi,\Delta}, \phi_\Delta$ を $\phi_\xi, \phi$ が各核に誘導する自然な外部準同型とする．$\phi_{\xi,\Delta}$ が開であることと $\phi_\xi$ が開であることは同値である．いま, [Ho, Proposition 2.4] より自然な外部準同型

$$\Delta_{X_{2,K(X_1)}} \to \mathrm{Ker}\,(\Delta_{X_2} \to \Delta_{X_1})$$

は同型である．外部準同型 $\phi$ は開であるから $\phi_\Delta$ も開である．よって $\phi_\xi$ が開であることを示すためには, 外部準同型 $\Delta_{Y_{K(X_1)}} \to \Delta_{Y/X_1}$ が開であることを示せばよい．より一般的に次の問題を考える．

**問題 3.2.** $Z$ を $K$ 上の正規代数多様体, $C$ を $K$ 上の双曲曲線, $g : Z \to C$ を支配的な射, $K(C)$ を $C$ の関数体, $\overline{K(C)}$ を $K(C)$ の代数閉包とする．

$$\begin{tikzcd}
Z \times_C \mathrm{Spec}\,\overline{K(C)} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Spec}\,\overline{K(C)} \arrow[d] \\
Z \times_C \mathrm{Spec}\,K(C) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Spec}\,K(C) \arrow[d] \\
Z \arrow[r] & C.
\end{tikzcd}$$

基本群の列

$$\Delta_{Z \times_C \mathrm{Spec}\,K(C)} (= \pi_1(Z \times_C \mathrm{Spec}\,\overline{K(C)})) \to \Pi_Z \xrightarrow{g_*} \Pi_C \tag{6}$$

は完全か?

この問題は主に [Nag1] で扱った．さらに [Nag1] の結果を用いて [Nag2] では次の結果を得た．

**命題 3.3** ([Nag1, Theorem 4.1], [Nag2, Proposition 2.2])**.** $Z, C, g$ を問題 3.2 と同様とする．さらに $Z$ が正則とする．

1. 以下は同値である．

- 列 (6) が完全である.
- $\operatorname{Ker} g_*$ は位相的有限生成である.
- $N_{Z/C}$ を $Z$ の関数体における $C$ の整閉包, $E_{Z/C}$ を $N_{Z/C}$ 内での $C$ の最大不分岐拡大, $U_{Z/C}$ を $Z$ の $N_{Z/C}$ への像が定める $N_{Z/C}$ の開部分スキームとする. このとき $U_{Z/C} \to E_{Z/C}$ は同型であり, さらに以下が成立する.
  - 任意の $E_{Z/C}$ の閉点 $e$ に対し, 射 $Z \to E_{Z/C}$ の点 $e$ でのファイバーの各既約成分の重複度の最大公約数は 1 である.

2. 以下の 2 条件を満たすような, ある $K$ の有限次拡大体 $K'$, 双曲曲線 $U \to \operatorname{Spec} K'$, $K$ 上の有限射 $U \to U_{Z/C}$ が存在する.

   - $Z' \to Z$ は有限エタール射である.
   - $Z' \to U$ は 1 の同値条件を満たす.

   ここで, $Z \times_{U_{Z/C}} U$ は連結整スキームであり, その整閉包を $Z'$ と書く.

命題 3.3 の $g : Z \to C$ として $f_1 : Y \to X_1$ を考える. (ここで定理 2.3 の仮定の $Y$ の正則性を用いる.) 命題 3.3.2 の $K', U$ に対応して, $K$ の有限次拡大体 $K'$, 双曲曲線 $X_1' \to \operatorname{Spec} K'$ をとり固定する. 合成射 $U \to U_{Z/C} \to C$ に対応する $X_1' \to X_1$ を考える. また $Z' \to Z$ に対応する有限エタール被覆を $Y' \to Y$ と書く. さらに $Z' \to U$ に対応する射を $f_1' : Y' \to X_1'$ と書く. すると左下の図式を得る.

$$\begin{tikzcd}
Y' \arrow[d] \arrow[rrd, "f_1'"] & & \\
Y \arrow[rrd, "f_1"'] & X_2 \times_{X_1} X_1' \arrow[r] \arrow[d] & X_1' \arrow[d] \\
& X_2 \arrow[r] & X_1
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Pi_{Y'} \arrow[d] \arrow[rrd] \arrow[rd, dotted, "\phi'"'] & & \\
\Pi_Y \arrow[rd, "\phi"'] & \Pi_{X_2 \times_{X_1} X_1'} \arrow[r] \arrow[d] & \Pi_{X_1'} \arrow[d] \\
& \Pi_{X_2} \arrow[r] & \Pi_{X_1}
\end{tikzcd}$$

$f_1'$ がエタール基本群に誘導する外部準同型は右上の図式の外側の 5 角形を可換にする. [Ho, Proposition 2.4] より

$$\Pi_{X_2 \times_{X_1} X_1'} \cong \Pi_{X_2} \times_{\Pi_{X_1}} \Pi_{X_1'}$$

という自然な同型が存在する. よって自然な外部準同型 $\phi' : \Pi_{Y'} \to \Pi_{X_2 \times_{X_1} X_1'}$ が誘導される.

この $\phi'$ が開外部準同型であれば, 問題 3.2 の直前までの議論を $\phi'$ に適用することで $\phi'$ が $K$ 上の支配的な射 $Y' \to X_2 \times_{X_1} X_1'$ から誘導されていると分かる. より詳しく, $\phi'$ は以下の状況にあると分かる.

**命題 3.4** ([Nag2, Proposition 2.4])**.** 以下のいずれかが成立する.

- $\operatorname{Im} \phi'$ は $\Pi_{X_2 \times_{X_1} X_1'}$ で開.
- 合成 $\operatorname{Im} \phi' \subset \Pi_{X_2 \times_{X_1} X_1'} \to \Pi_{X_1'}$ は同型である.

**定理 2.3 の証明の概略.** 以下の 5 つの条件が同値であることを示す.

1. $\phi$ を誘導する $K$ 上の支配的な射 $f : Y \to X_2$ が存在する.

2. $\phi$ は (S) を満たす.

3. $\phi$ は (O) を満たす.

4. $\mathrm{Im}\,\phi'$ は $\Pi_{X_2 \times_{X_1} X'_1}$ で開.

5. $\phi'$ を誘導する $K$ 上の支配的な射 $f' : Y' \to X_2 \times_{X_1} X'_1$ が存在する.

$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$ は直ちに従い, $3 \Rightarrow 4$ は命題 3.4 から, $4 \Rightarrow 5$ は命題 3.4 の直前の議論から従う. よって $5 \Rightarrow 1$ を示せばよい. $X'_1$ の関数体を $K(X'_1)$ と書く. 5 は

$$\Pi_{Y' \times_{X'_1} \mathrm{Spec}\, K(X'_1)} \to \Pi_{X_2 \times_{X_1} \mathrm{Spec}\, K(X'_1)}$$

が開外部準同型であることと同値である. 一方, $\Pi_{X_2 \times_{X_1} \mathrm{Spec}\, K(X'_1)}$ は $\Pi_{X_{2,K(X_1)}}$ $(= \Pi_{X_2 \times_{X_1} \mathrm{Spec}\, K(X_1)})$ の開部分群であるため, 5 から $\Pi_{Y_{K(X_1)}} \to \Pi_{X_{2,K(X_1)}}$ が開外部準同型であることが従う. よって $5 \Rightarrow 1$ である. □

次に, 定理 2.4 の証明の概略を与える.

**定理 2.4 の証明の概略.** まず $Y$ が正則であるとする. 定理 2.3 の証明と命題 3.4 より合成 $\mathrm{Im}\,\phi' \subset \Pi_{X_2 \times_{X_1} X'_1} \to \Pi_{X'_1}$ は同型であると仮定してよい. 切断予想に関する仮定と補題 3.1 と $\phi$ が開外部準同型であることを用いると, $\phi'$ が $K'$ 上の代数多様体の射 $Y' \to X_2 \times_{X_1} X'_1$ から誘導されるとしてよい. さらに合成 $Y' \to X_2 \times_{X_1} X'_1 \to X_2$ が $Y \to X_2$ を経由することを示すことで定理 2.4 を証明する. (この部分に関する [Nag2] の議論は非常にテクニカルである. 4 章を参照.)

次に $Y$ が正規の場合を扱う. $Y$ の正則点のなす開部分多様体 $Y'$ を考えると, 合成

$$\Pi_{Y'} \to \Pi_Y \xrightarrow{\phi} \Pi_{X_2}$$

は上記の議論より代数多様体の射 $Y' \to X_2$ から引き起こされる. [Ho, Lemma 1.3] を用いると, この射が $Y \to X_2$ を経由することが分かる. よって 2.4 が示された. □

# 4　講演後の進捗

定理 2.3 では命題 3.3 を用いるために $Y$ の正則性を仮定した. 筆者は命題 3.3 を正規の仮定に一般化し, 結果として定理 2.3 の $Y$ の正則性を正規に弱めた定理を証明した. この結果を含めた論文を現在準備中である.

また定理 2.4 の証明の大幅な簡略化を星裕一郎先生・望月新一先生から教えていただいた. 簡略化された証明をまとめた論文は現在投稿中である.

# 謝辞

本稿の研究内容に関して様々な助言を星裕一郎先生からいただいたこと, また定理 2.4 の証明の簡略化に関するコメントを星裕一郎先生・望月新一先生からいただいたことを感謝致します. This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, a Joint Usage/Research Center located in Kyoto University. また第 13 回福岡数論研究集会の世話人の皆様, 講演の旅費の援助をして下さった辻雄先生に深く感謝致します.

## 参考文献


[Letter] A. Grothendieck, *Letter to G. Faltings*, In: Geometric Galois actions, 1, 49–58, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 242, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.

[Ho] Y. Hoshi, *The Grothendieck conjecture for hyperbolic polycurves of lower dimension*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **21** (2014), no. 2, 153–219.

[Mzk1] S. Mochizuki, *The local pro-$p$ anabelian geometry of curves*, Invent. Math. **138** (1999), no. 2, 319–423.

[Mzk2] S. Mochizuki, *Galois sections in absolute anabelian geometry*, Nagoya Math. J. **179** (2005), 17–45.

[Nag1] I. Nagamachi, *On homotopy exact sequence for normal schemes*, preprint, arXiv: 1811.11395v3.

[Nag2] I. Nagamachi, *On the Hom Version of the Grothendieck Conjecture for Hyperbolic Polycurves of Dimension 2*, preprint, arXiv:1902.02058.

[SGA1] *Revêtements étales et groupe fondamental* (SGA 1), Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1960-1961, Directed by A. Grothendieck, With two papers by M. Raynaud, Documents Mathématiques (Paris), 3, Société Mathématique de France, Paris, 2003.