Drinfeld 加群の Q-仮想性について

奥村 喜晶 (東京工業大学)

1 概要

代数体と関数体 (= 有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の 1 変数有理関数体 $Q := \mathbb{F}_q(T)$ の有限次拡大) の理論には多くの共通点が存在し, それを通じて古くから様々な問題の “関数体類似” が考察されてきた. 楕円曲線は代数体側の数論における古典的かつ重要な研究対象の 1 つであり, 今なお多くの数学者によって活発に研究されている. 一方, 関数体側では V. G. Drinfeld [Dri74] が 1974 年, 関数体上の GL(2) に関する Langlands 予想解決を目的として楕円曲線の類似物である *elliptic module* を導入した. これは今日では **Drinfeld 加群**と呼ばれている.

有理数体の代数閉包 $\bar{\mathbb{Q}}$ 上の楕円曲線は, 絶対ガロア群 $G_{\mathbb{Q}} := \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の任意の元での共役と同種となるとき **$\mathbb{Q}$-curve** と呼ばれ, 数論的に興味深い性質を数多く持っている. これに対し, $\mathbb{Q}$-curve の関数体類似物として **Q-仮想的 Drinfeld 加群**[1]が定義できる. 本稿の目的は Elkies によって証明された[2] $\mathbb{Q}$-curve に対する基本的な結果の関数体版である次の定理の証明を概説することである: $A = \mathbb{F}_q[T]$ とし, イデアル $0 \neq \mathfrak{n} \subset A$ に対して $Y_*(\mathfrak{n})$ を Drinfeld モジュラー曲線の Atkin-Lehner 対合による商 (詳しくは 4 節を参照) とする.

定理 1.1 (cf. [Oku19, Theorem 1.1])**.** CM を持たない Q-仮想的 Drinfeld 加群 ϕ に対し, ϕ の同種類にのみ依存する平方因子を持たないイデアル $0 \neq \mathfrak{n} \subset A$ が存在して次を満たす:

(i) ϕ は $Y_*(\mathfrak{n})$ の Q-有理点から得られる Drinfeld 加群と同種,

(ii) イデアル $\mathfrak{n}'$ が (i) を満たすならば, $\mathfrak{n} \mid \mathfrak{n}'$ となる.

ここで Drinfeld 加群が “$Y_*(\mathfrak{n})$ の Q-有理点から得られる” の正確な意味は命題 4.5 を参照.

定理 1.1 と命題 4.5 を組み合わせることで, CM を持たない Q-仮想的な Drinfeld 加群は同種を除いて Q の**多重 2 次拡大** (= Galois 群が $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ と同型な Q の有限次 Galois 拡大体) 上定義されることが分かる.

本稿は 2019 年 8 月 7 日から 9 日にかけて, 九州大学伊都キャンパスで開催された第 13 回福岡数論研究集会での筆者の講演内容を纏めたものである. 詳細な証明などは [Oku19] を参照されたい. 講演の機会を与えて頂いた世話人の金子昌信先生 (九州大学), 権寧魯先生 (九州大学), 岸康弘先生 (愛知教育大学) に改めて感謝を申し上げます.

[1] Q-仮想的 (Q-virtual) という用語は暫定的なものであり, 今後変更される可能性がある.

[2] 証明は 1993 年のプレプリント [Elk93] が初出であるが, これは未出版で現在では入手困難である. しかし 2004 年に [Elk93] の revised 版である [Elk04] が出版されている. 本稿ではこの [Elk04] を主に参照している.

記号

標数 p の有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の 1 変数多項式環とその商体をそれぞれ $A := \mathbb{F}_q[T]$, $Q := \mathbb{F}_q(T)$ とおく．Q の代数閉包 $\bar{Q}$ を 1 つ固定し，すべての Q の代数拡大は $\bar{Q}$ の中で考える．任意の部分体 $K \subset \bar{Q}$ に対し，K の分離閉包を K^{sep}, 絶対 Galois 群を $G_K := \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$ で表す．任意の $s \in G_K$ と $\lambda \in K^{\mathrm{sep}}$ に対し，λ の s による像を ${}^s\lambda$ とかく．

2 準備

この節では Q の代数拡大 K を 1 つ固定し，K 上の Drinfeld 加群についての基本的な事項を説明する．本稿で扱う Drinfeld 加群はすべて**階数 2** であるため，一般の場合は割愛した．Drinfeld 加群に関する詳細は，Drinfeld の原著論文 [Dri74] の他，Deligne-Husemöller による概説 [DH87] や教科書 [Gos96] 等を参照されたい．

いま，$K\{\tau\} := \{\sum_{i=0}^{n} c_i\tau^i;\ c_i \in K, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ を任意の $c \in K$ に対して $\tau c = c^q\tau$ を満たす τ に関する K 上の非可換多項式環とする．特に $c \in \mathbb{F}_q$ に対しては $\tau c = c\tau$ なので $K\{\tau\}$ は $\mathbb{F}_q$-代数である．また τ を K 上の加法群スキーム $\mathbb{G}_{a,K}$ の q 乗 Frobenius に対応させることで，$K\{\tau\}$ は $\mathbb{G}_{a,K}$ の $\mathbb{F}_q$-線形な自己準同型のなす環 $\mathrm{End}_{\mathbb{F}_q\text{-lin}}(\mathbb{G}_{a,K})$ と同型となる．よって任意の K-代数 L に対して，$\mu = \sum_{i=0}^{n} c_i\tau^i \in K\{\tau\}$ は加法群 $\mathbb{G}_{a,K}(L) = L$ の自己準同型

$$\mu : L \to L$$

を誘導する．（ここで $\lambda \in L$ に対して，$\mu(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} c_i\lambda^{q^i}$ である.） $K\{\tau\}$ の**微分写像** $\partial : K\{\tau\} \to K$ を $\partial(\sum_{i=0}^{n} c_i\tau^i) = c_0$ で定める．

定義 2.1. $\mathbb{F}_q$-代数の準同型 $\phi : A \to K\{\tau\};\ a \mapsto \phi_a$ であって

$$\phi_T = T + g\tau + \Delta\tau^2,\ \Delta \neq 0$$

を満たすものを K 上の **Drinfeld 加群**と呼ぶ[3]．A は $\mathbb{F}_q$ 上 T で生成されるので ϕ は ϕ_T だけで決定されることに注意する．また ϕ の j-**不変量**を

$$j_\phi := \frac{g^{q+1}}{\Delta}$$

で定める．

任意の K-代数 L に対して，$a \cdot \lambda := \phi_a(\lambda)$ (ただし $a \in A, \lambda \in L$) によって A-加群の構造を定めたものを ${}_\phi L$ とかく．$L = \bar{Q}$ のとき，0 でないイデアル $\mathfrak{n} \subset A$ に対して

$$\phi[\mathfrak{n}] := \bigcap_{0 \neq a \in A} \ker(\phi_a : {}_\phi\bar{Q} \to {}_\phi\bar{Q})$$

とおく．すると $\phi[\mathfrak{n}]$ は G_K-安定な ${}_\phi K^{\mathrm{sep}}$ の有限部分 A-加群となり，A-加群として $(A/\mathfrak{n})^{\oplus 2}$ と同型になる．

[3] 一般には $\mathbb{G}_{a,K}$ と $\phi_T = T + c_1\tau + \cdots + c_r\tau^r, c_r \neq 0$ によって定まる $\mathbb{F}_q$-代数準同型 $\phi : A \to \mathrm{End}_{\mathbb{F}_q\text{-lin}}(\mathbb{G}_{a,K}) \cong K\{\tau\}$ の組を K 上の Drinfeld 加群と定義し，$r > 0$ を階数と呼ぶ．本稿では底スキーム $\mathbb{G}_{a,K}$ を省略し，常に $r = 2$ を仮定する．

定義 2.2. K 上の Drinfeld 加群 ϕ から ψ への**同種写像** $\mu:\phi\to\psi$ とは, 0 でない $\mu\in K\{\tau\}$ で任意の $a\in A$ に対し $\mu\phi_a=\psi_a\mu$ を満たすものとする[4]. この条件は $\mu\phi_T=\psi_T\mu$ と同値である. このような μ が存在するとき, ϕ と ψ は**同種**という. また $\eta\mu=1$ かつ $\mu\eta=1$ なる同種写像 $\eta:\psi\to\phi$ が存在するとき, $\mu:\phi\to\psi$ を**同型写像**と呼び, ϕ と ψ は**同型**という.

注意 2.3. $\mu:\phi\to\psi$ が同型であることと $\mu\in K^\times$ は同値である. よって ϕ と同型な Drinfeld 加群 ψ は, ある $\nu\in K^\times$ によって $\psi_T=\nu^{-1}\phi_T\nu$ とかける. このとき ϕ と ψ は同じ j-不変量を持つ. 一般に Drinfeld 加群 ϕ と ψ が $\bar{Q}$ 上同型であることと $j_\phi=j_\psi$ が同値となる. また $\tilde{\phi}_T=T+j_\phi\tau+j_\phi^q\tau^2$ で定まる Drinfeld 加群 $\tilde{\phi}$ の j-不変量は j_ϕ なので, ϕ は体 $Q(j_\phi)$ 上のモデルを持つ.

K 上の Drinfeld 加群 ϕ と ψ に対して $\mathrm{Hom}_K(\phi,\psi):=\{\mu\in K\{\tau\};\ \mu\phi_T=\psi_T\mu\}$, $\mathrm{End}_K(\phi):=\mathrm{Hom}_K(\phi,\phi)$ とする. 0 でない各 $a\in A$ に対して ϕ_a は同種写像 $\phi_a:\phi\to\phi$ を定めるので, A は $\mathrm{End}_K(\phi)$ へ自然に埋め込める. このとき $\mathrm{Hom}_K(\phi,\psi)$ は $a\cdot\mu=\mu\phi_a=\psi_a\mu$ によって階数が 2 以下の自由 A-加群となる. また $\mathrm{End}_K(\phi)$ は可換な A-代数となる. $\mathrm{End}_K(\phi)$ の自由 A-加群としての階数がちょうど 2 のとき, ϕ は**虚数乗法 (CM)**[5]を持つという.

同種写像 $\mu:\phi\to\psi\in\mathrm{Hom}_K(\phi,\psi)$ に対して以下の概念を定義しておく:

定義 2.4. (1) 核 $\ker\mu:=\ker({}_\phi\bar{Q}\to{}_\psi\bar{Q})$ は ${}_\phi K^{\mathrm{sep}}$ の有限部分 A-加群なのでイデアル $\mathfrak{n}_i\subset A$ $(i=1,2,\ldots,n)$ を用いて $\ker\mu\cong\oplus_{i=1}^n A/\mathfrak{n}_i$ とかける. このとき $\deg\mu:=\prod_{i=1}^n\mathfrak{n}_i$ を μ の**次数**という. $\deg\mu=\mathfrak{n}$ のとき μ を **$\mathfrak{n}$-同種写像**といい, 更に $\ker\mu\cong A/\mathfrak{n}$ ならば μ を**巡回 $\mathfrak{n}$-同種写像**という.

(2) $\deg\eta\mid\deg\mu$ かつ $\deg\mu\neq\deg\eta$ となる $\eta:\phi\to\psi$ が存在しないとき, μ は**原始的**であるという.

(3) $\mu:\phi\to\psi$ を $\mathfrak{n}$-同種写像とし, $a_\mathfrak{n}\in A$ を $\mathfrak{n}$ のモニックな生成元とする. このとき同種写像 $\hat{\mu}:\psi\to\phi$ で $\hat{\mu}\mu=\phi_{a_\mathfrak{n}}$ かつ $\mu\hat{\mu}=\psi_{a_\mathfrak{n}}$ なるものがただ一つ存在する. この $\hat{\mu}$ を μ の**双対同種写像**という.

注意 2.5. (1) 同種写像の次数は乗法的である. つまり同種写像 $\mu:\phi_1\to\phi_2$ と $\eta:\phi_2\to\phi_3$ の合成に対して $\deg\eta\mu=\deg\eta\deg\mu$ が成り立つ.

(2) $\deg\mu=\deg\hat{\mu}$ が成り立つ. 実際, $\deg\mu=\mathfrak{n}$ とすれば $\ker\hat{\mu}\mu=\ker\phi_{a_\mathfrak{n}}=\phi[\mathfrak{n}]\cong(A/\mathfrak{n})^{\oplus 2}$ なので $\mathfrak{n}^2=\deg\hat{\mu}\deg\mu$ から従う.

同種写像 $\mu:\phi\to\psi$ の双対の存在から, μ の逆写像 μ^{-1} が $\mathrm{Hom}_K(\psi,\phi)\otimes_A Q$ の中でとれる. これにより Q-ベクトル空間としての同型

$$\begin{array}{ccccc}\mathrm{End}_K(\phi)\otimes_A Q & \cong & \mathrm{Hom}_K(\phi,\psi)\otimes_A Q & \cong & \mathrm{End}_K(\psi)\otimes_A Q\\ f & \mapsto & \mu f & \mapsto & \mu f\mu^{-1}\end{array}$$

が誘導される. 特に ϕ が CM を持てば ϕ と同種な Drinfeld 加群も CM を持つ. また ϕ が CM を持たなければ $\mathrm{Hom}_K(\phi,\psi)$ は階数 1 の自由 A-加群となるから, μ が原始的であることと $\mathrm{Hom}_K(\phi,\psi)$ が A 上 μ で生成されることは同値となる. 更に次が成り立つ:

命題 2.6 (cf. [Oku19, Corollary 5.3])**.** ϕ は CM を持たないと仮定する. このとき同種写像 $\mu:\phi\to\psi$ が原始的であることと巡回的であることは同値である.

[4] つまり, 加法群の 0 でない $\mathbb{F}_q$-線形自己準同型 $\mu:\mathbb{G}_{a,K}\to\mathbb{G}_{a,K}$ であって, ϕ と ψ が定める A-作用を保つものを Drinfeld 加群の同種写像と定める. このような μ は全射かつ核が有限となる.

[5] ϕ が虚数乗法を持つとき, $\mathrm{End}_K(\phi)$ はある Q の 2 次拡大体 F の (極大とは限らない) 整環と同型になる. この体 F は Q の素点 $\infty=(\frac{1}{T})$ を割る素点をただ一つ持つことが知られている. ∞ は有理数体 $\mathbb{Q}$ の無限素点の類似なので, この意味で F は虚 2 次体の関数体類似とみなせる. このような理由から "虚数乗法" という名称は決して不自然なものではないといえる.

3　Q-仮想的 Drinfeld 加群

ここでは Q-仮想的 Drinfeld 加群の定義, 及びその非自明な具体例を与える. 任意の $s \in G_Q$ と $\mu = \sum_{i=0}^{n} c_i \tau^i \in Q^{\mathrm{sep}}\{\tau\}$ に対して ${}^s\mu := \sum_{i=0}^{n} {}^s c_i \tau^i \in Q^{\mathrm{sep}}\{\tau\}$ と定めると, s は環 $Q^{\mathrm{sep}}\{\tau\}$ の自己同型を誘導する.

いま $\phi_T = T + g\tau + \Delta\tau^2 \in Q^{\mathrm{sep}}\{\tau\}$ で定まる Q^{sep} 上の Drinfeld 加群 ϕ に対して, ${}^s\phi_T = T + {}^s g\tau + {}^s\Delta\tau^2$ によって定義される Drinfeld 加群 ${}^s\phi$ を $s \in G_Q$ による**共役**という. また同種写像 $\mu : \phi \to \psi$ に対して, ${}^s\mu$ は共役の間の同種写像 ${}^s\mu : {}^s\phi \to {}^s\psi$ を定める. μ と ${}^s\mu$ の核は A-加群として同型なので, 直ちに $\deg \mu = \deg {}^s\mu$ を得る. このとき, $\mathbb{Q}$-curve の Drinfeld 加群類似として次を考える.

定義 3.1. Q^{sep} 上の Drinfeld 加群 ϕ は, 任意の $s \in G_Q$ に対して同種写像 $\mu_s : {}^s\phi \to \phi$ が存在するとき **Q-仮想的**であるという.

注意 3.2. Q-仮想性は同種で不変である. 実際, ϕ が Q-仮想的であるとし, 同種写像 $\mu : \phi \to \psi$ が与えられたとする. このとき任意の $s \in G_Q$ に対して同種写像 $\mu_s : {}^s\phi \to \phi$ が存在し, μ と $\hat{\mu}$ の共役を合成することで同種写像 $\mu\mu_s {}^s\hat{\mu} : {}^s\psi \to \psi$ を得る.

まず初めに, このような Drinfeld 加群が存在するのか考えてみよう. まず $\phi_T \in Q\{\tau\}$ ならば ${}^s\phi = \phi$ なので自明に Q-仮想的である. より一般に次が成立する.

命題 3.3 (cf. [Oku19, Theorem 3.2])**.** Q^{sep} 上の Drinfeld 加群 ϕ に対して次は同値:

(i) $j_\phi \in Q$ (即ち, ϕ は Q 上のモデルを持つ),

(ii) 各 $s \in G_Q$ に対して同型写像 $\nu_s : {}^s\phi \to \phi$ が存在して, 任意の $s, t \in G_Q$ に対して $\nu_s \cdot {}^s\nu_t = \nu_{st}$ を満たす.

よって命題3.3より $j_\phi \in Q$ ならば ϕ は Q-仮想的である. このように事実上 Q 上定義されていれば Q-仮想的となるが, 非自明な例も存在する:

例 3.4. $p \neq 2$ とし, $T+1 \in Q$ の平方根 $\sqrt{T+1} \in Q^{\mathrm{sep}}$ を 1 つ固定する. このとき $\mu, \eta \in Q^{\mathrm{sep}}\{\tau\}$ をそれぞれ $\mu := \sqrt{T+1} + 1 - \tau$, $\eta := \sqrt{T+1} - 1 + \tau$ と定める. このとき

$$\mu\eta = (\sqrt{T+1} + 1 - \tau)(\sqrt{T+1} - 1 + \tau) = T + (2 + \sqrt{T+1} - \sqrt{T+1}^q)\tau - \tau^2.$$

よって $\varphi_T = \mu\eta$ によって Q^{sep} 上の Drinfeld 加群 φ が定まる. このとき φ は Q-仮想的であり, かつ Q 上のモデルを持たない. 実際, 任意の $s \in G_Q$ に対して, s が $\sqrt{T+1}$ を固定するならば ${}^s\varphi = \varphi$ となり自明に同型. 一方で ${}^s\sqrt{T+1} = -\sqrt{T+1}$ ならば

$$\begin{aligned} {}^s\varphi_T &= {}^s\mu {}^s\eta \\ &= (-\sqrt{T+1} + 1 - \tau)(-\sqrt{T+1} - 1 + \tau) \\ &= (\sqrt{T+1} - 1 + \tau)(\sqrt{T+1} + 1 - \tau) \\ &= \eta\mu \end{aligned}$$

となり, これから $\mu {}^s\varphi_T = \mu\eta\mu = \varphi_T \mu$ を得る. よって μ が同種写像 $\mu : {}^s\varphi \to \varphi$ を与える. また φ の j-不変量は

$$j_\varphi = -(2 + \sqrt{T+1} - \sqrt{T+1}^q)^{q+1}$$

であり, 簡単な計算から $j_\varphi \notin Q$ が直ちに確認できる.

また, ϕ が CM を持つ場合には, Hayes [Hay92] による階数 1 の Drinfeld 加群へのイデアル作用の理論を用いることで, 適当な Q の 2 次拡大上で仮想的となることが分かる:

命題 3.5 (cf. [Oku19, Proposition 3.6])**.** Q^{sep} 上の Drinfeld 加群 ϕ が CM を持つと仮定し, $F = \mathrm{End}_{Q^{\mathrm{sep}}}(\phi) \otimes_A Q$ とおく．このとき ϕ は F-仮想的である (即ち, ϕ を F^{sep} 上の Drinfeld 加群とみなしたとき, 任意の $s \in G_F$ に対して同種写像 $\mu_s : {}^s\phi \to \phi$ が存在する).

4 Drinfeld モジュラー曲線

0 でないイデアル $\mathfrak{n} \subset A$ を 1 つ固定する．この節では, Drinfeld モジュラー曲線 $Y_0(\mathfrak{n})$ のモジュライ解釈を用いることで, $Y_0(\mathfrak{n})$ の Atkin-Lehner 対合による商 $Y_*(\mathfrak{n})$ の Q-有理点から Q-仮想的 Drinfeld 加群の族が得られることを説明する．Drinfeld モジュラー曲線については [Gek86], [Sch97] 等を適宜参照されたい.

Q の素点 $\infty = (\frac{1}{T})$ における完備化を $Q_\infty = \mathbb{F}_q((\frac{1}{T}))$ とおき, その代数閉包の完備化を $\mathbb{C}_\infty$ とする．このとき $\Omega = \mathbb{C}_\infty \setminus Q_\infty$ を **Drinfeld 上半平面**[6]と呼ぶ. Drinfeld 上半平面には 1 次分数変換によって $\mathrm{GL}_2(A)$ が作用する．いまモジュラー群

$$\Gamma_0(\mathfrak{n}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(A);\ c \equiv 0 \pmod{\mathfrak{n}} \right\}$$

による商 $\Gamma_0(\mathfrak{n})\backslash\Omega$ には $\mathbb{C}_\infty$ 上の代数曲線の構造が定まり, Q 上滑らかでアファインなモデル $Y_0(\mathfrak{n})$ を持つ．この曲線 $Y_0(\mathfrak{n})$ を $\Gamma_0(\mathfrak{n})$-レベルの **Drinfeld モジュラー曲線**という.

$Y_0(\mathfrak{n})$ はレベル構造付き Drinfeld 加群の粗モジュライであることが知られている．例えば, 代数拡大 K/Q に対して, K-有理点 $x \in Y_0(\mathfrak{n})(K)$ は K 上の Drinfeld 加群 ϕ と G_K-安定な $\phi[\mathfrak{n}]$ の部分 A-加群 Λ で $\Lambda \cong A/\mathfrak{n}$ なるものの組 (ϕ, Λ) の $\bar{Q}$-同型類と対応している．またこのとき, K 上の Drinfeld 加群 ψ と $\ker\mu = \Lambda$ なる同種写像 $\mu : \phi \to \psi$ が存在するので, x は巡回 $\mathfrak{n}$-同種写像 μ で表現されるともいえる．これらのとき, 記号として $x = [\phi, \Lambda]$ や $x = [\mu : \phi \to \psi]$ などと書くことにする. ϕ が CM を持つとき, $x = [\phi, \Lambda]$ を $Y_0(\mathfrak{n})$ の **CM 点**という.

次に $\mathfrak{m}$ を $\mathfrak{m} \mid \mathfrak{n}$ かつ $(\mathfrak{m}, \frac{\mathfrak{n}}{\mathfrak{m}}) = 1$ を満たすイデアルとし, $a_\mathfrak{m}, a_\mathfrak{n} \in A$ をそれぞれ $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ の生成元とする．このとき, 行列 $W = \begin{pmatrix} a_\mathfrak{m} a & b \\ a_\mathfrak{n} c & a_\mathfrak{m} d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(A)$ で $\mathfrak{m} = (\det W)$ なるものは 1 次分数変換で $\Gamma_0(\mathfrak{n})\backslash\Omega$ へ well-defined に作用し, Q 上定義された $Y_0(\mathfrak{n})$ の自己同型

$$w_\mathfrak{m} : Y_0(\mathfrak{n}) \to Y_0(\mathfrak{n})$$

で $w_\mathfrak{m}^2 = 1$ なるものを誘導する．これを $\mathfrak{m}$ に関する **Atkin-Lehner 対合**という．各 Atkin-Lehner 対合の間には

$$w_{\mathfrak{m}_1} w_{\mathfrak{m}_2} = w_{\mathfrak{m}_2} w_{\mathfrak{m}_1} = w_{\mathfrak{m}_3}, \quad \mathfrak{m}_3 = \frac{\mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2}{(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2)^2}$$

という関係式が成り立つので, $Y_0(\mathfrak{n})$ 上の Atkin-Lehner 対合全体のなす群 $\mathcal{W}(\mathfrak{n})$ は有限アーベル群で, 特に $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ と同型となる (ここで n は $\mathfrak{n}$ の相異なる素因子の個数である).

$Y_0(\mathfrak{n})$ の K-有理点 $x = [\mu : \phi \to \psi]$ と $w_\mathfrak{m} \in \mathcal{W}(\mathfrak{n})$ に対して $w_\mathfrak{m} x$ も $Y_0(\mathfrak{n})$ の K-有理点であり, モジュライ解釈は次のようになる: $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}\mathfrak{n}'$ かつ $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}') = 1$ とすると, μ は $\mu = \mu_{\mathfrak{n}'} \mu_\mathfrak{m}$ と

[6]感覚的には複素平面から実軸を抜いているようなものなので “上半” という用語には違和感があるが, 慣例なので仕方がない.

分解する．ここに $\mu_{\mathfrak{m}} : \phi \to \phi_{\mathfrak{m}}$ と $\mu_{\mathfrak{n}'} : \phi_{\mathfrak{m}} \to \psi$ はそれぞれ次数が $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}'$ の巡回同種写像である．このとき $\ker \eta = \mu_{\mathfrak{m}}(\phi[\mathfrak{m}] \oplus \ker \mu_{\mathfrak{n}'})$ となる同種写像 $\eta : \phi_{\mathfrak{m}} \to \psi_{\mathfrak{m}}$ が存在して

$$w_{\mathfrak{m}} x = [\phi_{\mathfrak{m}},\ \mu_{\mathfrak{m}}(\phi[\mathfrak{m}] \oplus \ker \mu_{\mathfrak{n}'})] = [\eta : \phi_{\mathfrak{m}} \to \psi_{\mathfrak{m}}]$$

となる．またこの η は $\mu_{\mathfrak{m}}$ の双対を経由し, 次の図式を得る:

$$\begin{tikzcd}
\phi \arrow[rr, "\mu"] \arrow[dr, "\mu_{\mathfrak{m}}"'] & & \psi & \\
& \phi_{\mathfrak{m}} \arrow[ur, "\mu_{\mathfrak{n}'}"] \arrow[rr, "\eta"] \arrow[dr, "\hat{\mu}_{\mathfrak{m}}"'] & & \psi_{\mathfrak{m}} \\
& & \phi \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

注意 4.1. $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}$ の場合は $w_{\mathfrak{n}} x = [\hat{\mu} : \psi \to \phi]$ である．また x が CM 点でなければ, すべての $1 \neq w \in \mathcal{W}(\mathfrak{n})$ に対して $wx \neq x$ が成り立つ．もし x が $1 \neq w_{\mathfrak{m}} \in \mathcal{W}(\mathfrak{n})$ で固定されるならば x は CM 点で, 対応する Drinfeld 加群は $Q(\sqrt{a_{\mathfrak{m}}})$ による CM をもつ．

イデアル $(1) = A$ に対応する Drinfeld モジュラー曲線 $Y_0(1)$ はアファイン直線 $\mathbb{A}^1_Q = \mathrm{Spec}\ Q[j]$ である． K-有理点 $x \in Y_0(1)$ に対応する Q-代数の射を $f_x : Q[j] \to K$ とすれば, x は $f_x(j) \in K$ を j-不変量に持つ Drinfeld 加群の $\bar{Q}$-同型類と対応している．レベル構造を忘れることで定まる射 $\theta : Y_0(\mathfrak{n}) \to Y_0(1)$ を考え, $Y_0(\mathfrak{n})$ の CM 点でない Q^{sep}-有理点全体のなす集合を $\mathcal{N}_0(\mathfrak{n})(Q^{\mathrm{sep}})$ とおく．次の補題 (cf. [Oku19, Lemma 4.4]) が成り立つ:

補題 4.2. 射 $\theta : Y_0(\mathfrak{n}) \to Y_0(1)$ と $\mathfrak{n}$ に関する Atkin-Lehner 対合 $w_{\mathfrak{n}} \in \mathcal{W}(\mathfrak{n})$ から定まる写像

$$\begin{array}{cccc}
\Theta : & \mathcal{N}_0(\mathfrak{n})(Q^{\mathrm{sep}}) & \to & Y_0(1)(Q^{\mathrm{sep}}) \times Y_0(1)(Q^{\mathrm{sep}}) \\
& x & \mapsto & (\theta(x),\ \theta(w_{\mathfrak{n}} x))
\end{array}$$

は単射.

Atkin-Lehner 対合はすべて Q 上定義され $Y_0(\mathfrak{n})$ は準射影的な曲線なので, 商 $Y_*(\mathfrak{n}) := Y_0(\mathfrak{n})/\mathcal{W}(\mathfrak{n})$ が存在して Q 上の滑らかなアファイン曲線となる．また商写像

$$\gamma : Y_0(\mathfrak{n}) \to Y_*(\mathfrak{n})$$

は Q 上の有限射で, 各ファイバーは $Y_0(\mathfrak{n})$ のある点の $\mathcal{W}(\mathfrak{n})$-軌道に一致する (cf. [Liu02, p.113]). 特に任意の Q-有理点 $x_* \in Y_*(\mathfrak{n})(Q)$ に対して, x_* の γ による逆像

$$\mathcal{P}(x_*) = \{x \in Y_0(\mathfrak{n})(\bar{Q});\ \gamma(x) = x_*\}$$

は適当な $x \in Y_0(\mathfrak{n})(\bar{Q})$ によって $\mathcal{P}(x_*) = \mathcal{W}(\mathfrak{n})x$ となる．

補題 4.3. $p \neq 2$ または $x \in \mathcal{P}(x_*)$ が CM 点でないとする．このとき $\mathcal{P}(x_*) \subset Y_0(\mathfrak{n})(Q^{\mathrm{sep}})$ が成り立つ．

注意 4.4. 補題より $p = 2$ かつ x が CM 点の場合のみ $\mathcal{P}(x_*) \not\subset Y_0(Q^{\mathrm{sep}})$ となり得る．しかしこの場合でも, Q を適当な 2 次純非分離拡大 $\tilde{Q}$ に取り換えれば $\mathcal{P}(x_*) \subset Y_0(\tilde{Q}^{\mathrm{sep}})$ とできる．

Atkin-Lehner 対合の性質より, $\mathcal{P}(x_*)$ からは互いに同種な Drinfeld 加群の族を得る．実はこれらはすべて Q-仮想的であることが次のようにして分かる．

命題 4.5. Q-有理点 $x_* \in Y_*(\mathfrak{n})(Q)$ が $\mathcal{P}(x_*) \subset Y_0(\mathfrak{n})(Q^{\mathrm{sep}})$ を満たすとする．このとき任意の点 $x \in \mathcal{P}(x_*)$ は, ある Q の多重二次拡大上定義された Q-仮想的 Drinfeld 加群とレベル構造の組によって表現される．

証明. $x = [\phi, \Lambda] \in \mathcal{P}(x_*)$ とする．このとき任意の $s \in G_K$ で ${}^s x = [{}^s\phi, {}^s\Lambda]$ が成り立つ．一方で $\mathcal{P}(x_*) = \mathcal{W}(\mathfrak{n})x$ は G_K-安定である．実際, $\gamma({}^s x) = {}^s\gamma(x) = {}^s x_* = x_*$ なので ${}^s x \in \mathcal{P}(x_*)$ が成り立つ．$\mathcal{W}(\mathfrak{n})$ の元は Q 上定義されるので他の点も同様．よって適当な対合 $w_{\mathfrak{m}_s} \in \mathcal{W}(\mathfrak{n})$ によって ${}^s x = w_{\mathfrak{m}_s} x$ となる．$w_{\mathfrak{m}_s} x$ のモジュライ解釈から巡回 $\mathfrak{m}_s$-同種写像 ${}^s\phi \cong \phi_{\mathfrak{m}_s} \to \phi$ が存在する．よって ϕ は Q-仮想的である．ここで $D_x = \{w \in \mathcal{W}(\mathfrak{n});\ wx = x\}$ とすれば, 対応 $s \mapsto w_{\mathfrak{m}_s}$ は well-defined な群準同型

$$f : G_Q \to \mathcal{W}(\mathfrak{n})/D_x$$

を誘導する．$L \subset Q^{\mathrm{sep}}$ を $\ker f$ による固定体とすれば, $\mathrm{Gal}(L/Q)$ は $\mathcal{W}(\mathfrak{n})/D_x \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^m$ の部分群なので L/Q は多重二次拡大である．x は G_L で固定されるので L-有理点であり, ϕ は L 上のモデルを持つ． □

5　Q-仮想的 Drinfeld 加群に付随する同種写像グラフ

この節では, 定理 1.1 の証明を概観する．つまり, CM を持たない Q-仮想的 Drinfeld 加群の同種類は必ず命題 4.5 のやり方で得られる Drinfeld 加群を含むことを示す．基本的なアイデアは [Elk04] に倣い, Q-仮想的 Drinfeld 加群 ϕ から同種写像グラフを構成し, それへの G_Q-作用を調べることで ϕ と同種な Drinfeld 加群が対応する $Y_*(\mathfrak{n})$ の Q-有理点を探索する．

仮定 5.1. 5 節では常に次を仮定する．Drinfeld 加群は Q^{sep} 上定義され CM を持たないとし, 同種写像 $\mu : \phi \to \psi$ は原始的なものだけを考える．CM を持たないとしているので, $\mathrm{Hom}_{Q^{\mathrm{sep}}}(\phi, \psi)$ の生成元だけを考えることと同値であり, 命題 2.6 より巡回的でもある．更に同型な Drinfeld 加群はすべて同一視する．

5.1　$\mathfrak{p}$-同種写像グラフの構成

以下, Q-仮想的 Drinfeld 加群 ϕ を 1 つ固定する．この ϕ と同種な Drinfeld 加群全体のなす集合を $\mathcal{I}_\phi$ とする．ϕ の Q-仮想性より, 任意の $\psi \in \mathcal{I}_\phi$ も Q-仮想的であり, 各 $s \in G_Q$ に対して同種写像 $\phi \to \psi \to {}^s\psi$ が存在するので ${}^s\psi \in \mathcal{I}_\phi$．よって $\mathcal{I}_\phi$ には G_Q が作用する．

任意の 0 でない素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して, $\mathcal{I}_\phi$ の部分集合 $\mathcal{I}_{\phi,\mathfrak{p}}$ を次で定める:

$$\mathcal{I}_{\phi,\mathfrak{p}} := \{\psi \in \mathcal{I}_\phi;\ {}^\exists\mathfrak{p}^n\text{-同種写像 } \phi \to \psi\}.$$

補題 5.2. 任意の $\psi \in \mathcal{I}_\phi$ に対し, $\mathcal{I}_{\phi,\mathfrak{p}}$ の元で ψ との間に次数が $\mathfrak{p}$ と互いに素な同種写像が存在するものがただ一つだけ存在する．この条件で特徴づけられる Drinfeld 加群を $\pi_{\mathfrak{p}}(\psi) \in \mathcal{I}_{\phi,\mathfrak{p}}$ とかく．

証明. 各 $\mathfrak{p}$ に対して, $\pi_{\mathfrak{p}}(\psi)$ は次のようにして定まる: 同種写像 $\mu : \phi \to \psi$ を考えると, これは巡回的なので $\ker\mu$ は $\mathfrak{p}$-冪捩れ部分とそれ以外の直和として一意的に分解する．これに沿って μ を次数 $\mathfrak{p}$ 冪の同種写像 $\mu_{\mathfrak{p}} : \phi \to \pi_{\mathfrak{p}}(\psi)$ と次数が $\mathfrak{p}$ と素な $\eta : \pi_{\mathfrak{p}}(\psi) \to \psi$ の合成 $\mu = \eta\mu_{\mathfrak{p}}$ に分解できる．このような $\pi_{\mathfrak{p}}(\psi)$ は仮定 5.1 の下では一意的である． □

一意性より $\psi \in \mathcal{I}_{\phi,\mathfrak{p}}$ ならば $\pi_{\mathfrak{p}}(\psi) = \psi$ なので, 各 $\mathfrak{p}$ に対して射影

$$\pi_{\mathfrak{p}} : \mathcal{I}_{\phi} \twoheadrightarrow \mathcal{I}_{\phi,\mathfrak{p}}$$

が定まる. 同種写像の次数は G_Q-不変であるため, $\pi_{\mathfrak{p}}(\psi)$ の一意性と合わせて任意の $s \in G_Q$ で ${}^s\pi_{\mathfrak{p}}(\psi) = \pi_{\mathfrak{p}}({}^s\psi)$ が従う. つまり射影 $\pi_{\mathfrak{p}}$ は G_Q-作用と可換であり, 部分集合 $\mathcal{I}_{\phi,\mathfrak{p}}$ も G_Q-作用で安定となる.

いま, すべての 0 でない素イデアル $\mathfrak{p}$ を渡る ϕ に関する $\mathcal{I}_{\phi,\mathfrak{p}}$ の制限直積

$$\prod_{\mathfrak{p}}{}' \mathcal{I}_{\phi,\mathfrak{p}} := \left\{ (\psi_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} \in \prod_{\mathfrak{p}} \mathcal{I}_{\phi,\mathfrak{p}};\ \text{ほとんどすべての } \mathfrak{p} \text{ で } \psi_{\mathfrak{p}} = \phi \right\}$$

を考える. 構成より $\psi \in \mathcal{I}_{\phi}$ に対し, ほとんどすべての $\mathfrak{p}$ で $\pi_{\mathfrak{p}}(\psi) = \phi$ なので写像

$$\begin{array}{rccc} (\pi_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} : & \mathcal{I}_{\phi} & \longrightarrow & \prod'_{\mathfrak{p}} \mathcal{I}_{\phi,\mathfrak{p}} \\ & \psi & \mapsto & (\pi_{\mathfrak{p}}(\psi))_{\mathfrak{p}} \end{array} \tag{1}$$

は well-defined であり, 容易に全単射であることが確認できる. 目的である定理 1.1 の証明では, 各 $\mathfrak{p}$ ごとによい性質をもつ元を取り, この全単射でそれらを張り合わせて $Y_*(\mathfrak{n})$ の Q-有理点から定まる ψ を構成する.

命題 5.3. 頂点を $\mathcal{I}_{\phi,\mathfrak{p}}$ の元, 辺をその間の $\mathfrak{p}$-同種写像とすることで $\mathcal{I}_{\phi,\mathfrak{p}}$ にグラフの構造を定める. このときグラフ $\mathcal{I}_{\phi,\mathfrak{p}}$ は無向かつ正則な木であり, 各頂点の次数は $\#(A/\mathfrak{p}) + 1$ である.

証明. $\mathfrak{p}$-同種写像の双対は次数 $\mathfrak{p}$ なので, 辺に向きがないことは直ちに従う. 任意の $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{I}_{\phi,\mathfrak{p}}$ の間には $\mathcal{I}_{\phi,\mathfrak{p}}$ の定義から次数が $\mathfrak{p}$ 冪の同種写像 $\mu : \psi_1 \to \psi_2$ が存在する. この μ は巡回的なので $\mathfrak{p}$-同種写像の合成に分解し, これは (仮定 5.1 の下では) 一意的である. よって $\mathcal{I}_{\phi,\mathfrak{p}}$ は木である. 任意の頂点 $\psi \in \mathcal{I}_{\phi,\mathfrak{p}}$ に対し, $A/\mathfrak{p}$ と同型な相異なる $\psi[\mathfrak{p}]$ の部分 A-加群は $\#(A/\mathfrak{p}) + 1$ 個存在する. ψ は CM を持たないことから, それらは相異なる $\mathfrak{p}$-同種写像を定める. よって各頂点からは辺がちょうど $\#(A/\mathfrak{p}) + 1$ 本出ることがわかる. □

集合 $\mathcal{I}_{\phi,\mathfrak{p}}$ には G_Q が作用していた. ここで, Galois 共役は同種写像の次数を保つので, この作用は $\mathcal{I}_{\phi,\mathfrak{p}}$ の頂点間の距離を保つ. よって G_Q はグラフ $\mathcal{I}_{\phi,\mathfrak{p}}$ に作用する. 有限集合 $\langle \phi \rangle := \{{}^s\phi;\ s \in G_Q\}$ の $\pi_{\mathfrak{p}}$ による像 $\pi_{\mathfrak{p}}\langle \phi \rangle \subset \mathcal{I}_{\phi,\mathfrak{p}}$ は G_Q-安定であり, ほとんどすべての $\mathfrak{p}$ で $\pi_{\mathfrak{p}}\langle \phi \rangle = \{\phi\}$ である.

$\mathcal{I}_{\phi,\mathfrak{p}}$ は木なので, 頂点集合が $\pi_{\mathfrak{p}}\langle \phi \rangle$ を含むような $\mathcal{I}_{\phi,\mathfrak{p}}$ の最小の部分木がただ一つ存在する. これを $\mathcal{T}(\pi_{\mathfrak{p}}\langle \phi \rangle)$ とかく. 作り方から $\mathcal{T}(\pi_{\mathfrak{p}}\langle \phi \rangle)$ は有限木であり, 端点はすべて $\pi_{\mathfrak{p}}\langle \phi \rangle$ に含まれている. よって $\mathcal{T}(\pi_{\mathfrak{p}}\langle \phi \rangle)$ にも G_Q が作用する.

定義 5.4. G_Q-作用によって固定されるグラフ $\mathcal{T}(\pi_{\mathfrak{p}}\langle \phi \rangle)$ の頂点または辺を $\mathcal{T}(\pi_{\mathfrak{p}}\langle \phi \rangle)$ の**中心**という.

$\mathcal{T}(\pi_{\mathfrak{p}}\langle \phi \rangle)$ の中心はただ一つ存在する. 何故なら, G_Q-作用で固定されるのは $\mathcal{T}(\pi_{\mathfrak{p}}\langle \phi \rangle)$ 内の最長の道の “真ん中” に位置する頂点または辺であり, そのような頂点または辺は最長の道の取り方に依らないからである.

任意の $\phi' \in \mathcal{I}_{\phi}$ に対して, 同様の方法で $\mathcal{I}_{\phi,\mathfrak{p}}$ の部分木 $\mathcal{T}(\pi_{\mathfrak{p}}\langle \phi' \rangle)$ が得られる. このとき各中心に対して, 次が成り立つ.

補題 5.5. $\mathcal{T}(\pi_{\mathfrak{p}}\langle\phi\rangle)$ の中心が辺であるとき, かつそのときに限り $\mathcal{T}(\pi_{\mathfrak{p}}\langle\phi'\rangle)$ の中心は辺となる. さらにこの場合, 両者の中心は一致する.

注意 5.6. この補題から $\mathcal{T}(\pi_{\mathfrak{p}}\langle\phi\rangle)$ の中心が辺ならば, G_Q で固定される $\mathcal{I}_{\phi,\mathfrak{p}}$ の頂点は存在しないことが従う. 詳細は [Oku19, Lemma 5.9] を参照.

5.2 定理 1.1 の証明

Q-仮想的かつ CM を持たない Drinfeld 加群 ϕ をとる. ほとんどすべての $\mathfrak{p}$ で $\mathcal{T}(\pi_{\mathfrak{p}}\langle\phi\rangle) = \{\phi\}$ なので, $\mathcal{T}(\pi_{\mathfrak{p}}\langle\phi\rangle)$ の中心が辺となる素イデアル $\mathfrak{p}$ は高々有限個しか存在しない. $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$ をそのような素イデアルとし, 辺 $\{\psi_{\mathfrak{p}_i}, \psi'_{\mathfrak{p}_i}\}$ を $\mathcal{T}(\pi_{\mathfrak{p}_i}\langle\phi\rangle)$ の中心であるとする. このとき $\mathfrak{p}_i$-同種写像 $\psi_{\mathfrak{p}_i} \to \psi'_{\mathfrak{p}_i}$ が存在する. 補題 5.5 より $\mathfrak{n} := \prod_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$ は ϕ の同種類だけから決まる.

いま全単射 (1) より次を満たす Drinfeld 加群 $\psi, \psi' \in \mathcal{I}_\phi$ が存在する: 任意の $\mathfrak{p}$ に対して

$$\pi_{\mathfrak{p}}(\psi) = \begin{cases} \psi_{\mathfrak{p}} & \text{if } \mathfrak{p} \mid \mathfrak{n} \\ \mathcal{T}(\pi_{\mathfrak{p}}\langle\phi\rangle) \text{ の中心} & \text{if } \mathfrak{p} \nmid \mathfrak{n}, \end{cases}$$

$$\pi_{\mathfrak{p}}(\psi') = \begin{cases} \psi'_{\mathfrak{p}} & \text{if } \mathfrak{p} \mid \mathfrak{n} \\ \mathcal{T}(\pi_{\mathfrak{p}}\langle\phi\rangle) \text{ の中心} & \text{if } \mathfrak{p} \nmid \mathfrak{n}. \end{cases}$$

これは同種写像 $\mu : \psi \to \psi'$ の次数は各 $\mathfrak{p}_i$ で一度ずつ割り切れ, 他の素因子は持たないことを意味する. 故に μ は巡回 $\mathfrak{n}$-同種写像となり, Q^{sep}-有理点 $x := [\mu : \psi \to \psi'] \in Y_0(\mathfrak{n})(Q^{\mathrm{sep}})$ が定まる.

$\mathcal{P} := \{w_{\mathfrak{m}}x;\ w_{\mathfrak{m}} \in \mathcal{W}(\mathfrak{n})\}$ を x の $\mathcal{W}(\mathfrak{n})$-軌道とする. $\mathcal{P}$ が G_Q-安定ならば $Y_*(\mathfrak{n})$ の Q-有理点と対応するので, 定理 1.1 (i) が従う. よって任意の $s \in G_Q$ に対して, イデアル $\mathfrak{m}_s \mid \mathfrak{n}$ が存在し ${}^s x = w_{\mathfrak{m}_s} x$ となることを示せばよい.

以下, $s \in G_Q$ を 1 つ固定する. 各 $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{n}$ に対して $\{\pi_{\mathfrak{p}}(\psi), \pi_{\mathfrak{p}}(\psi')\}$ は $\mathcal{T}(\pi_{\mathfrak{p}}\langle\phi\rangle)$ の中心なので, 共役 $\pi_{\mathfrak{p}}({}^s\psi)$ は $\pi_{\mathfrak{p}}(\psi)$ または $\pi_{\mathfrak{p}}(\psi')$ のどちらかと一致する. イデアル $\mathfrak{m}_s$ を $\pi_{\mathfrak{p}}({}^s\psi) = \psi'_{\mathfrak{p}}$ なる素因子 $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{n}$ の積として定義する. また $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{n}$ ならば $\pi_{\mathfrak{p}}({}^s\psi) = \pi_{\mathfrak{p}}(\psi)$, $\pi_{\mathfrak{p}}({}^s\psi') = \pi_{\mathfrak{p}}(\psi')$ である. よって任意の 0 でない $\mathfrak{p}$ で

$$\pi_{\mathfrak{p}}({}^s\psi) = \begin{cases} \pi_{\mathfrak{p}}(\psi') & \text{if } \mathfrak{p} \mid \mathfrak{m}_s \\ \pi_{\mathfrak{p}}(\psi) & \text{if } \mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m}_s \end{cases}$$

かつ

$$\pi_{\mathfrak{p}}({}^s\psi') = \begin{cases} \pi_{\mathfrak{p}}(\psi) & \text{if } \mathfrak{p} \mid \mathfrak{m}_s \\ \pi_{\mathfrak{p}}(\psi') & \text{if } \mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m}_s \end{cases}$$

が成り立つ.

ここで $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}_s\mathfrak{n}'$ と分解して $w_{\mathfrak{m}_s}x = [\psi_{\mathfrak{m}_s} \to \psi'_{\mathfrak{m}_s}]$ とすると, 4 節と同様にして次を得る:

$$\begin{tikzcd}
\psi \arrow[rr, "\mathfrak{n}"] \arrow[dr, "\mathfrak{m}_s"'] & & \psi' & \\
& \psi_{\mathfrak{m}_s} \arrow[ur, "\mathfrak{n}'"] \arrow[rr, "\mathfrak{n}"] \arrow[dr, "\mathfrak{m}_s"'] & & \psi'_{\mathfrak{m}_s} \\
& & \psi \arrow[ur, "\mathfrak{n}'"'] &
\end{tikzcd}$$

ここで $\xrightarrow{\mathfrak{n}}$ といった記号は巡回 $\mathfrak{n}$-同種写像を意味する．次数の比較と $\pi_{\mathfrak{p}}(\psi_{\mathfrak{m}_s})$ の一意性から, 任意の $\mathfrak{p}$ に対して $\pi_{\mathfrak{p}}(\psi_{\mathfrak{m}_s}) = \pi_{\mathfrak{p}}({}^s\psi)$ が成り立つ．よって $\psi_{\mathfrak{m}_s} = {}^s\psi$ である．同様の議論を $\psi \to \psi'$ と $\psi_{\mathfrak{m}_s} \to \psi'_{\mathfrak{m}_s}$ の双対に対して適用すると $\psi'_{\mathfrak{m}_s} = {}^s\psi'$ も成り立つ．これは $\Theta(w_{\mathfrak{m}_s}x) = \Theta({}^sx)$ を意味するので, 補題 4.2 より $w_{\mathfrak{m}_s}x = {}^sx$ が従う．

定理 1.1 (ii) を示すために, 次を仮定して矛盾を導く: $\mathfrak{n} \nmid \mathfrak{n}'$ なるイデアル $\mathfrak{n}'$ が存在して, ある $y_* \in Y_*(\mathfrak{n}')(Q)$ から定まる Drinfeld 加群が ϕ と同種となる．いま $\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{n}$ かつ $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{n}'$ なる素イデアルとする．すると $\mathcal{P}(y_*)$ から定まる Drinfeld 加群たちは次数が $\mathfrak{n}'$ を割る同種写像で結ばれている．いま $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{n}'$ なので $\mathcal{P}(y_*)$ から定まる Drinfeld 加群は射影 $\pi_{\mathfrak{p}}$ によって同じ元に移る．これは $\mathcal{T}(\pi_{\mathfrak{p}}\langle\phi\rangle)$ が G_Q で固定される頂点を持つことを意味するが, $\mathcal{T}(\pi_{\mathfrak{p}}\langle\phi\rangle)$ の中心は辺であるから, そのような頂点は存在し得ない．

参考文献

[DH87] P. Deligne and D. Husemöller, *Survey of Drinfeld modules*, In: Current trends in arithmetical algebraic geometry (Arcata, Calif., 1985), 25–91, Contemp. Math., 67, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

[Dri74] V.G. Drinfeld, *Elliptic modules*, Math. Sb. (N. S.) **94** 136 (1974), 594–627, 656.

[Elk93] N. Elkies, *Remarks on elliptic k-curves*, preprint, 1993.

[Elk04] N. Elkies, *On elliptic K-curves*, In: Modular curves and abelian varieties, 81–91, Progr. Math., 224, Birkhäuser, Basel, 2004.

[Gek86] E.-U. Gekeler, *Über Drinfeld'sche Modulkurven vom Hecke-Typ*, Compositio Math. **57** (1986), 219–236.

[Gos96] D. Goss, Basic structures of function field arithmetic, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), 35, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[Hay92] D. R. Hayes, *A Brief introduction to Drinfeld Modules*, In: The Arithmetic of Function Fields (Columbus, OH, 1991), 1–32, Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ., 2, de Gruyter, Berlin, 1992.

[Liu02] Q. Liu, Algebraic Geometry and Arithmetic Curves, Oxford Graduate Texts in Mathematics, 6, Oxford University press, Oxford, 2002.

[Oku19] Y. Okumura, *Parametrization of K-virtual Drinfeld modules of rank two*, preprint, arXiv:1910.14284.

[Sch97] A. Schweizer, *Hyperelliptic Drinfeld Modular Curves*, In: Drinfeld Modules, Modular Schemes and Applications (Alden-Biesen, 1996), 330–343, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1997.