Siegel Eisenstein 級数の Fourier 係数と genus theta 級数

軍司 圭一 (千葉工業大学)

0 はじめに

保型形式の理論において, Eisenstein 級数はもっとも基本的かつ重要な関数である. Siegel 保型形式の場合, Eisenstein 級数にもいくつかの種類があるが, Siegel Eisenstein 級数と呼ばれる以下の関数が重要である. $\varGamma^g = Sp(g,\mathbb{Z})$ を g 次のシンプレクティック群 (行列サイズが $2g$ であるもの) とし, $\varGamma^g_\infty$ で左下の $g\times g$-ブロックが 0 行列である部分群を表す. 正の整数 l に対し, $\varGamma_0^g(l)$ でレベルが l の合同部分群, すなわち左下 $g\times g$-ブロックが mod l で 0 となるような部分群を表す. l を法として定義された Dirichlet 指標 ψ と $\psi(-1)=(-1)^k$ をみたす自然数 k に対し,

$$E^{g,k}_{l,\psi}(Z) = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ C & D\end{smallmatrix}\right)\in \varGamma_\infty\backslash\varGamma_0^g(l)} \psi(\det D)\det(CZ+D)^{-k}$$

として Siegel Eisenstein 級数を定める. ここで Z は g 次の Siegel 上半空間 $\mathbb{H}_g$ の元である. 右辺は $k>g+1$ で絶対収束し, このとき $E^{g,k}_{l,\psi}(Z)\in M_k(\varGamma_0^g(l),\overline{\psi})$ となる.

$E^{g,k}_{l,\psi}(Z)$ の Fourier 展開を

$$E^{g,k}_{l,\psi}(Z) = \sum_{S_g(\mathbb{Z})^*\ni T\geq 0} C(T)\exp(2\pi\mathbf{i}\,\mathrm{Tr}(TZ))$$

と表す. ここで $S_g(\mathbb{Z})^*$ は半整数対称行列の集合を表す. この $C(T)$ の明示式を与えるのが本稿の目的である.

まず $T>0$, すなわち T が正定値であると仮定してよい. 実際 $\mathrm{rank}\,T=r$ の場合, ある $U\in SL_g(\mathbb{Z})$ を用いて ${}^tUTU=\begin{pmatrix}T_0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $T_0\in S_r(\mathbb{Z})^*$, $T_0>0$ と書けるが, このとき $C(T)$ は $E^{r,k}_{l,\psi}(z)$ $(z\in\mathbb{H}_r)$ の T_0 における Fourier 係数と等しい. 以下 $T>0$ と仮定する. $C(T)$ は Euler 積表示をもち

$$C(T) = \xi_g(T,k)\prod_{p:\mathrm{prime}} S_g^p(l,\psi,T,k) \tag{0.1}$$

と表される. 無限素点に対応する $\xi_g(T,k)$ は Siegel により明示式が与えられており,

$$\xi(T,k) = \frac{2^{-g(g-1)/2}(-2\pi\mathbf{i})^{gk}}{\Gamma_g(k)}(\det T)^{k-(g+1)/2}$$

が成り立つ. ここで $\Gamma_g(s)=\pi^{g(g-1)/4}\prod_{j=0}^{g-1}\Gamma(s-j/2)$ とおいた.

一方 $S_g^p(l,\psi,T,k)$ は Siegel 級数と呼ばれる. ここでは正確な定義は述べないが, $(p,l)=1$ の場合と $p\mid l$ の場合では定義そのものが異なっており, 性質もだいぶ違っていることを注意しておく. $(p,l)=1$ の場合については数多くの研究がなされてきた. この場合 $S_g^p(l,\psi,T,k)$ を単に $S_g^p(\psi,T,k)$ と書き, 特に $l=1$ の場合は $S_g^p(T,k)$ と略記する. 基本的事実として, $S_g^p(T,k)$ は

p^{-k} の有理関数になることが知られており, それを $S_g^p(T,k)=f(p^{-k})$ とおくと, $(p,l)=1$ であれば $S_g^p(\psi,T,k)=f(\psi(p)p^{-k})$ が成り立つ．よって $l=1$ の場合, すなわち full modular の Siegel Eisenstein 級数を考えれば十分である．このとき, $S_g^p(T,k)=\gamma_p(T,k)F_p(T,k)$ なる分解がある．(cf. [Kat])．ここで $\gamma_p(T,k)$ は Riemann ゼータ関数や Dirichlet L-関数のオイラー因子たちの積からなる項であり, $F_p(T,k)$ は多項式部分と呼ばれる項である．$(p,\det(2T))=1$ ならば $F_p(T,k)=1$ であるので, 十分大きな k に対し (0.1) の無限積が収束することがわかる．$F_p(T,k)$ の明示式を与えたのが [Kat] であり, 以上より $(p,l)=1$ なる素数 p に関しての Siegel 級数はすべて解決している．

一方で $p\mid l$ なる p に対する $S_g^p(l,\psi,T,k)$ に関しては, 低い次数の場合の計算結果はあるものの ([Mi], [Ta1], [Gu2], [Gu3], [Di] など), 一般次数に関しては計算は難しいと思われていた．ただし Takemori は [Ta2] において, l が奇数かつ原始的指標 ψ が 2 次指標または自明指標を含まない場合 (すなわち $\psi=\prod_{p\mid l}\psi_p$ と分解したときにすべての $p\mid l$ に対し $\psi_p^2\not\equiv 1$ であるとき), 一般の次数 g に対して $E_{l,\psi}^{g,k}(Z)$ の Fourier 係数の明示式を求めている．実際, この場合の結果は著しく簡単であり, Riemann ゼータ関数や L-関数を関数等式で裏返しにすることで, レベルを割る素数の寄与が自明になってしまうのである．Takemori は [Ta1] で求めた次数 2 での計算結果からこれを予想し, (1) まず Fourier 係数が簡単になる Eisenstein 級数を構成し, (2) Siegel Eisenstein 級数が (1) で得られた Eisenstein 級数と等しくなることを示す, という手順でこれを証明した．しかし 2 次指標または自明指標に付随する Siegel 級数は複雑であり, この方法ではうまくいかない．

一方で 2 次指標または自明指標を持つ Siegel Eisenstein 級数については, genus theta 級数 (種のテータ級数) との関係からこれを調べるという方向もある．古典的には full modular の場合, genus theta と Siegel Eisenstein 級数が完全に一致するといういわゆる Siegel の主定理がよく知られている．レベル付きの場合は Siegel Eisenstein 級数も cusp の個数だけあるためこのように単純な話にはならないが, genus theta 級数が Siegel Eisenstein 級数の空間に入っていることは知られている ([Fr] など)．さらに詳しく, Katsurada-Schulze Pillot([KS]) や, それを一般化した Böcherer-Hironaka-Sato ([BHS]) などにより, 局所密度の詳しい性質から, レベルが奇素数 (より一般に平方因子を含まない奇数) の場合に, 適切に選んだ genus theta 級数たちが Eisenstein 級数の空間の基底をなすことが示されている．

さて, genus theta 級数の Fourier 係数は素数 p に対する局所密度と呼ばれるものの無限積で与えられ, レベルを割らない p に対しては, 局所密度と Siegel 級数が一致していることが知られている．さらに局所密度は一般次数 g に対し, すべての奇素数に関して Sato-Hironaka ([SH]) により明示式が与えられており, 上記の結果から Siegel Eisenstein 級数の明示式が局所密度の線形和として与えられることになる．しかし局所密度の明示式はそれ自身がかなり複雑な形をしているため, さらにその線形和を考えても「よい明示式」は得られないと思われていた節があった ([Boe] の序文など)．

この稿ではまず, 上記の「Siegel Eisenstein 級数を genus theta 級数で表す」線形結合が実際にはかなり簡明な形で与えられることを示す．のみならず重要なのは, その係数たちが Vandermonde 行列の逆行列から決まり, 単純な関係式をみたしているということである．その事実から, Siegel 級数は局所密度の和の一部をとりだしたものにすぎないことが示され, 求める明示式が得られる．

1　genus theta 級数

$S_n(\mathbb{Z})$ を整数係数の n 次対称行列のなす集合, $S_n(\mathbb{Z})^*$ で半整数対称行列全体を表す．すなわち $S_n(\mathbb{Z})^* = \{(q_{ij}) \in S_n(\mathbb{Z}) \,|\, q_{ii} \in \mathbb{Z},\ q_{ij} \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}\ (i \neq j)\}$ である．また $S_n(\mathbb{Z})_e = \{(q_{ij}) \in S_n(\mathbb{Z}) \,|\, q_{ii} \in 2\mathbb{Z}\}$ を偶対称行列の集合とする．明らかに $Q \in S_n(\mathbb{Z})^* \iff 2Q \in S_n(\mathbb{Z})_e$ である．$\mathbb{Z}$ を $\mathbb{Z}_p$ で置き換えたものも同様に定義する．また $S_n^+(\mathbb{Z})$, $S_n^+(\mathbb{Z})^*$, $S_n^+(\mathbb{Z})_e$ でそれぞれ正定値なものからなる部分集合を表す.

定義 1. (1) $Q_1, Q_2 \in S_n(\mathbb{Z})^*$ が同じ類に属すとは, ある $U \in GL_n(\mathbb{Z})$ が存在して ${}^tUQ_1U = Q_2$ が成り立つことをいう.

(2) Q_1, $Q_2 \in S_n(\mathbb{Z})^*$ が同じ種に属すとは, 任意の素数 p に対して, ある $U_p \in GL_n(\mathbb{Z}_p)$ が存在して ${}^tU_pQ_1U_p = Q_2$ となり, かつ Q_1 と Q_2 が等符号であることをいう.

Q_1 と Q_2 が同じ類に属していれば, 当然それらは同じ種に属するが, 逆は一般には成り立たない．同じ種に属している 2 つの 2 次形式は, Hasse-Minkowski の定理より $GL_n(\mathbb{Q})$-同値であるが, $GL_n(\mathbb{Z})$-同値であるとは限らないからである．例えば $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 55 \end{pmatrix}$ は同種であるが異なる類に属する．($5x^2 + 11y^2$ は 1 を表さないが, $x^2 + 55y^2$ は 1 を表す)．Q_1 と Q_2 が同じ類に属することを $Q_1 \sim Q_2$ で表す．さて，$Q \in S_n(\mathbb{Z})^*$ と同種な 2 次形式の同値類

$$\{S \in S_n(\mathbb{Z})^* \,|\, S \text{ は } Q \text{ と同じ種に属する }\}/\sim$$

は有限集合であり, その位数 $h(Q)$ を Q の類数と呼ぶ.

$Q \in S_{2k}^+(\mathbb{Z})^*$ と $Z \in \mathbb{H}_g$ に対して, theta 級数

$$\vartheta(Q; Z) = \sum_{N \in M_{2k,g}(\mathbb{Z})} \exp(2\pi \mathbf{i}\,\mathrm{Tr}({}^tNQNZ)) \in M_k(\mathit{\Gamma}_0^g(l), \chi_Q)$$

が定義される．特に次数を強調するときは $\vartheta^g(Q; Z)$ とも書くことにする．ここで l は $2Q$ のレベルであり, $l \cdot (2Q)^{-1} \in S_{2k}^+(\mathbb{Z})_e$ をみたす最小の自然数として定められる．また χ_Q は Q から定まる指標であって, 各素数 p に対し

$$\chi_Q(p) = \left(\frac{(-1)^k \det 2Q}{p}\right)$$

で特徴づけられる．特に k が偶数かつ $\det 2Q$ が 2 乗数のときは χ_Q は l を法とする自明指標となる.

theta 級数の Fourier 展開を

$$\vartheta(Q; Z) = \sum_{\substack{T \in S_g(\mathbb{Z})^* \\ T \geq 0}} r(Q, T) \exp(2\pi \mathbf{i}\,\mathrm{Tr}(TZ))$$

と書くと,

$$r(Q, T) = \sharp\{N \in M_{2k,g}(\mathbb{Z}) \,|\, {}^tNQN = T\}$$

が成り立つ．この $r(Q, T)$ を Q と T の不変量を用いて直接書き下すことは難しいが, 同種の中の類の代表系の “平均” をとることで, 局所的な値の積に分解することができるようになる．これがいわゆる Siegel の主定理, あるいは Siegel 公式と呼ばれるものである.

Q と同種な対称行列の類による代表系をとり, $Q_1, \dots, Q_h$ と表す. 各 i $(1 \le i \le h)$ に対して $O(Q_i) = \{g \in GL_n(\mathbb{Z}) \,|\, {}^t g Q_i g = Q_i\}$ と置くと, Q_i は正定値であるから $\sharp O(Q_i) < \infty$ である. このとき, Q から定まる genus theta 級数は

$$\Theta(Q; Z) = \frac{1}{w} \sum_{i=1}^{h} \frac{\vartheta(Q_i; Z)}{\sharp O(Q_i)}, \quad w = \sum_{i=1}^{h} \frac{1}{\sharp O(Q_i)}$$

で定義される. $2Q$ のレベルや行列式は種の不変量であるから, $\Theta(Q; Z)$ もまた $M_k(\Gamma_0^g(l), \chi_Q)$ の元である.

各素数 p に対し, 局所密度を以下で定める. $Q \in S_m(\mathbb{Z})^*$, $T \in S_g(\mathbb{Z})^*$ とし, $\nu \ge 1$ に対して

$$r_{p^\nu}(Q, T) = \sharp\{N \in M_{m,g}(\mathbb{Z}/p^\nu) \,|\, {}^t NQN \equiv T \bmod p^\nu S_g(\mathbb{Z})^*\}$$

と置く. ただし $A \equiv B \bmod p^\nu S_g(\mathbb{Z})^*$ とは, $A - B \in p^\nu S_g(\mathbb{Z})^*$ を意味する. そして

$$\alpha_p(Q, T) = \lim_{\nu \to \infty} p^{-\nu(mg - g(g+1)/2)} r_{p^\nu}(Q, T)$$

と定める. 右辺は十分大きな ν に対して常に一定の値をとるので, 極限は意味を持つ.

定理 1.1 (Siegel 公式, [Si, Sats 1, (72)] または [Ki, Theorem 6.8.1])**.** $Q \in S_{2k}(\mathbb{Z})^*$, $T \in S_g(\mathbb{Z})^*$ とする. $2k > g + 1$ のとき, genus theta 級数 $\Theta(Q; Z)$ の T における Fourier 係数は

$$\alpha_\infty(Q, T) \prod_{p:\mathrm{prime}} \alpha_p(Q, T)$$

で与えられる. 無限素点の寄与 $\alpha_\infty(Q, T)$ は

$$\begin{aligned} \alpha_\infty(Q, T) &= (\det Q)^{-g/2} (\det T)^{(2k-g-1)/2} \frac{2^{-g(g-1)/2} \pi^{gk}}{\Gamma_g(k)} \\ &= \mathbf{i}^{gk} \det(2Q)^{-g/2} \, \xi_g(T, k) \end{aligned} \tag{1.1}$$

で与えられる.

注意. Siegel の原論文や [Ki] では, $\alpha_\infty(Q, T)$ の値が 2 べき $2^{g(g-1)}$ の分だけずれている. これは, 局所密度 $\alpha_p(Q, T)$ の定義の違いによるもので, 上記の文献では ${}^t NQN \equiv T \bmod p^\nu S_g(\mathbb{Z})$ なる N の個数を採用しているためである. これらの定義の違いによるずれは [Ki, Lemma 5.6.5] にあり, それを見れば上の定理の値が正しいことが分かる.

すなわち genus theta の無限素点の寄与は, (0.1) に現れる Siegel Eisenstein 級数の無限素点の寄与 $\xi_g(T, k)$ とほぼ同じものになる. 一方で有限素点の寄与, すなわち Siegel 級数と局所密度との比較については次の事実がある ([Sh, Lemma 3.5]).

命題 1.2. $Q \in S_{2k}^+(\mathbb{Z})^*$, $T \in S_g(\mathbb{Z})^*$ とする. $(p, \det(2Q)) = 1$ なる素数 p に対して

$$\alpha_p(Q, T) = S_g^p(\chi_Q, T, k)$$

が成り立つ.

$(p, \det 2Q) = 1$ と p がレベルを割らないということは同値であるから, 前節で言及した通り, この場合の $\alpha_p(Q, T)$ の明示式は Katsurada ([Kat]) により与えられている. さらに, 定理 1.1 と命題 1.2 を合わせると, 次の事実がわかる.

定理 1.3 (解析的 Siegel 公式)**.** $k > g+1$, $Q \in S_{2k}^{+}(\mathbb{Z})^*$ とし $\det 2Q = 1$ と仮定すると

$$E^{g,k}(Z) = \Theta(Q; Z)$$

が成り立つ．ここで $E^{g,k}(Z)$ は full modular $Sp(g, \mathbb{Z})$ に関する重さ k の Siegel Eisenstein 級数である．

証明. $2Q \in S_{2k}^{+}(\mathbb{Z})_e$ かつ $\det 2Q = 1$ であるから, よく知られているように $k \equiv 0 \bmod 4$ である．よって (1.1) より $\alpha_\infty(Q, T) = \xi_k(T, k)$ が成り立つ．これより定理 1.1 および命題 1.2 から, $E^{g,k}(Z)$ と $\Theta(Q; Z)$ の Fourier 係数は, すべての $T \in S_g^{+}(\mathbb{Z})^*$ に対して等しいことがわかる．すなわち $F(Z) = E^{g,k}(Z) - \Theta(Q; Z)$ とおくと, $F(Z)$ は singular 保形形式と呼ばれるものになるが, 0 でない singular 保形形式は $k < g/2$ の範囲にしか存在しない (cf. [An, Theorem 2.3.16])．よって $F(Z) = 0$ であり, 主張が示された． □

この稿では full modular ではなくレベル付きの場合を扱うので，レベルを割る素数に関しての $S_g^p(l, \psi, T, k)$ と $\alpha_p(Q, T)$ との間の関係を調べるのが目標となる．まず次の事実が成り立つ．

命題 1.4. $Q \in S_{2k}^{+}(\mathbb{Z})^*$ とし, l を $2Q$ のレベルとする．この時 $\Theta(Q; Z)$ はレベルが l で指標 χ_Q の Siegel Eisenstein 級数の空間 $\mathcal{E}_k(\Gamma_0^g(l), \chi_Q)$ に属する．

ただし Siegel Eisenstein 級数の空間は

$$\mathcal{E}_k(\Gamma_0^g(l), \chi_Q) = \left\langle E_{g,\psi}^{k,l}(Z)|_k\gamma \;\middle|\; \gamma \in \Gamma^g, \psi \right\rangle_{\mathbb{C}} \cap M_k(\Gamma_0^g(l), \chi_Q)$$

で定める．ここで, ψ は l を法とし $\psi(-1) = (-1)^k$ をみたすすべての Dirichlet 指標を走るものとする．

既にみたように genus theta 級数の Fourier 係数は局所密度であらわされるが, 奇素数 p に対しての局所密度は, Sato-Hironaka により一般次数で明示式が与えられている ([SH])．よっていくつかの Q を適切に選び, Siegel Eisenstein 級数を genus theta 級数の線形和であらわすことができれば, レベルを割る素数 p に対しても Siegel 級数が計算できることになる．

以下奇素数 p を固定し, レベルが p の場合を考える．χ_0 を p を法とする自明指標とし, 2 次指標 $(\frac{*}{p})$ を χ_p で表す．$k > g+1$ とし, $1 \le j \le 2g+2$ をみたす各 j に対し, $Q_{2k}^{(j)} \in S_{2k}^{+}(\mathbb{Z})^*$ であって

$$2Q_{2k}^{(j)} \text{ のレベルは } p, \quad \det(2Q_{2k}^{(j)}) = p^j$$

をみたすものを 1 つとって固定する．このような $Q_{2k}^{(j)}$ の存在については次節で考察する．すると

$$\chi_{Q_{2k}^{(j)}} = \begin{cases} \chi_0 & j \text{ が偶数のとき} \\ \chi_p & j \text{ が奇数のとき} \end{cases}$$

である．

命題 1.5. $\{Q_{2k}^{(2j-1)}\}$ $(1 \le j \le g+1)$ は $\mathcal{E}_k(\Gamma_0^g(p), \chi_p)$ の基底をなし, $\{Q_{2k}^{(2j)}\}$ $(1 \le j \le g+1)$ は $\mathcal{E}_k(\Gamma_0^g(l), \chi_0)$ の基底をなす．

この命題は, 2 次指標の場合に Katusrada-Shulze Pillot によって最初に証明され ([KS, Theorem 5.1]), その後 Böcherer-Hironaka-Sato によってより一般の場合に示された ([BHS, Corollary 5.2])．[BHS] では自明指標の場合も含み, さらに奇素数レベルだけではなく平方因子を

含まない奇数レベルの場合にも拡張されている．証明の方針は, どちらの場合も局所密度たち $\{\alpha_p(Q,T)\}_Q$ が T の関数と見たときに一次独立になることを示し, そこから Eisenstein 級数の次元との比較で genus theta が基底であることを導くものである．

以下この命題の別証明を与える．この証明により, Siegel Eisenstein 級数を genus theta の線形和で具体的に表すことができる．

まず準備として, $\Gamma_0^g(p)\backslash\mathbb{H}_g$ の 0 次元 cusp を記述する．両側剰余類 $\Gamma_0^g(p)\backslash\Gamma^g/\Gamma_\infty^g$ の代表系として

$$\Gamma_0^g(p)\backslash\Gamma^g/\Gamma_\infty^g = \bigcup_{r=0}^{g}\mathcal{M}_r, \quad \mathcal{M}_r = \begin{pmatrix} E_r & -I_r \\ I_r & E_r \end{pmatrix},$$
$$E_r = \mathrm{diag}(\underbrace{0,\ldots,0}_{r},\underbrace{1,\ldots,1}_{g-r}), \quad I_r = \mathrm{diag}(\underbrace{1,\ldots,1}_{r},\underbrace{0,\ldots,0}_{g-r}).$$

が取れる．特に $\mathcal{M}_0 = 1_{2g}$, $\mathcal{M}_g = J_g = \begin{pmatrix} 0 & -1_g \\ 1_g & 0 \end{pmatrix}$ である．$F \in M_k(\Gamma_0^g(p),\psi)$ に対して, $F|_k\mathcal{M}_r$ の Fourier 展開の定数項を $A_r(F)$ とする．$k > g+1$ のとき, Siegel Eisenstein 級数の空間の性質から, $\chi = \chi_p$ または χ_0 に対して

$$\mathcal{E}_k(\Gamma_0^g(p),\chi) \to \mathbb{C}^{g+1}, \quad F \mapsto \bigl(A_r(F)\bigr)_{0\le r\le g}$$

は同型射となる．特に $\dim\mathcal{E}_k(\Gamma_0^g(p),\chi_p) = \dim\mathcal{E}_k(\Gamma_0^g(p),\chi_0) = g+1$ である．我々の目的である Siegel Eisenstein 級数 $E_{p,\chi}^{g,k}(Z)$ は ($\chi = \chi_p$ または χ_0)

$$A_r(E_{p,\chi}^{g,k}(Z)) = \begin{cases} 1 & r = 0 \\ 0 & 1 \le r \le g \end{cases} \tag{1.2}$$

で特徴づけられる．

このとき genus theta 級数に関して

$$A_r\bigl(\Theta(Q_{2k}^{(j)};Z)\bigr) = \bigl((-\mathbf{i})^k p^{-j/2}\bigr)^r \tag{1.3}$$

が成り立つ． これは以下のようにして証明される． まず theta 級数 $\vartheta^g(Q;Z)$ に対して $A_r(\vartheta(Q;Z))$ を考える．$\mathcal{M}_r$ は左下 $(g-r,g+r)$-ブロックが 0 であるから, Siegel の Φ 作用素

$$\Phi^r\colon M_k(\Gamma_0^g(p),\chi) \to M_k(\Gamma_0^r(p),\chi)$$

の作用と可換であり (cf. [Gu1, Lemma 3.2]), よって $A_r(\vartheta^g(Q;Z))$ は $\vartheta^r(Q;z)|_kJ_r$ ($z \in \mathbb{H}_r$) の Fourier 展開の定数項と等しい．これは例えば [An, Proposition 1.3.14] にある theta 級数の変換公式から計算でき, $((-\mathbf{i})^k\det(2Q)^{-1/2})^r$ となる．2 次形式の行列式は種の不変量であるので, genus theta に対してもこの公式は成り立ち, 結論を得る．

命題 1.5 の証明. (1.3) 式で $j \mapsto 2j-1$ または $j \mapsto 2j$ として, 行列

$$\Bigl(\bigl((-\mathbf{i})^k p^{1/2-j}\bigr)^r\Bigr)_{\substack{0\le r\le g \\ 1\le j\le g+1}} \quad \text{または} \quad \Bigl(\bigl((-\mathbf{i})^k p^{-j}\bigr)^r\Bigr)_{\substack{0\le r\le g \\ 1\le j\le g+1}} \tag{1.4}$$

を考える．これらの行列は Vandermonde 行列であるので, 行列式は 0 でない．よって示された． □

Siegel Eisenstein 級数は (1.2) で特徴づけられるから, この行列を見ることで, Eisenstein 級数を genus theta の線形和で書いた時の係数が得られる. (1.4) の逆行列の第 1 列を $(c_i)_{1\le i\le g+1}$ で表す (これは (1.4) の 2 つの行列のどちらにも共通になる). このとき

$$\sum_{i=1}^{g+1} p^{-ai} c_i = \begin{cases} 1 & a=0 \\ 0 & 1\le a\le g \end{cases} \tag{1.5}$$

が成り立つ. 具体的には $c_j = \prod_{\substack{m=1 \\ m\neq j}}^{g+1} (p^{m-j}-1)^{-1}$ と表される.

定理 1.6. $k>g+1$ と仮定すると

$$E^{g,k}_{p,\chi_p}(Z) = \sum_{j=1}^{g+1} c_j \Theta(Z; Q^{(2j-1)}_{2k}), \quad E^{g,k}_{p,\chi_0}(Z) = \sum_{j=1}^{g+1} c_j \Theta(Z; Q^{(2j)}_{2k}).$$

が成り立つ.

あるいは Siegel 級数の言葉で書くと次のようになる. $\chi=\chi_p$ または χ_0 に対し, $S^p_g(p,\chi,T,k)$ を単に $S^p_g(\chi,T,k)$ と書くことにする.

定理 1.7. $k>g+1$ とすると, $T\in S^+_g(\mathbb{Z})^*$ に対して

$$S^p_g(\chi_p,T,k) = \mathbf{i}^{gk} \sum_{j=1}^{g+1} p^{g(1/2-j)} c_j\, \alpha_p\big(Q^{(2j-1)}_{2k}, T\big),$$
$$S^p_g(\chi_0,T,k) = \mathbf{i}^{gk} \sum_{j=1}^{g+1} p^{-gj} c_j\, \alpha_p\big(Q^{(2j)}_{2k}, T\big)$$

が成り立つ.

2 2 次形式のジョルダン分解

この節では, 前節で考察した 2 次形式 $Q^{(j)}_{2k}$ の存在や, その性質を調べる. 局所密度の計算のためには, $GL_{2k}(\mathbb{Z}_p)$-同値類を調べればよいが, それを 2 次形式のジョルダン分解と呼ぶ. まず 2 次形式の Hasse 不変量を復習する. 各素数 q に対して $(\ ,\ )_q$ を Hilbert 記号とする. $Q\in S_n(\mathbb{Z})^*$, $\det Q\neq 0$ は, ある $g\in GL_n(\mathbb{Q}_q)$ を用いて ${}^t gQg = \mathrm{diag}(a_1,\dots,a_n)$ $(a_i\in\mathbb{Q}_q^\times)$ と書ける. このとき

$$\mathrm{inv}_q(Q) = \prod_{i<j} (a_i,a_j)_q \in \{\pm 1\}$$

とおいてこれを Q の Hasse 不変量と呼ぶ. この値は g の取り方によらない.

$S_1,S_2\in S_{2k}(\mathbb{Z}_q)^*$ が $GL_{2k}(\mathbb{Z}_q)$ 同値であるとき, $S_1\sim_q S_2$ と表す. さて, $Q^{(j)}_{2k}$ の存在については次の命題から従う.

命題 2.1. $d>0$ を整数とし, 各素数 q に対して $S_q\in S_n(\mathbb{Z}_q)$ であって $\det S_q = d$ なるものが与えられているとする. このとき $\prod_q \mathrm{inv}(S_q)_q = 1$ ならば, ある $S\in S^+_n(\mathbb{Z})$ が存在して $S\sim_q S_q$ となる.

$(d, 2q) = 1$ であれば $\mathrm{inv}(S_q) = 1$ であるから，命題の無限積は意味を持つ．証明は [Ca, Chapter 6, Theorem 1.3 および Chapter 9, Theorem 1.2] にある．

我々の $Q_{2k}^{(j)}$ は半整数の対称行列であるから，$2Q_{2k}^{(j)} \in S_{2k}^{+}(\mathbb{Z})_e$ の存在を命題を使って示すことにする．偶行列という条件があるので，素数 2 でのジョルダン分解を考える必要があるが，行列式 p^j は奇数なので

$$2Q_{2k}^{(j)} \sim_2 H_k \quad \text{または} \quad 2Q_{2k}^{(j)} \sim_2 (H_{k-1} \perp W),$$
$$H_k = \underbrace{H \perp \cdots \perp H}_{k\text{ 個}}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

が成り立つ．Hasse 不変量は，$\mathrm{inv}_2(H_k) = (-1)^{k(k-1)/2}$, $\mathrm{inv}_2(H_{k-1} \perp W) = -(-1)^{k(k-1)}$ である．さらに行列式の比較より j が偶数ならば常に $2Q_{2k}^{(j)} \sim_2 H_k$ であり，j が奇数のときは，

$$2Q_{2k}^{(j)} \sim_2 H_k \iff p \equiv \pm 1 \bmod 8$$
$$2Q_{2k}^{(j)} \sim_2 (H_{k-1} \perp W) \iff p \equiv \pm 3 \bmod 8$$

となることが分かる．

一方 $\mathbb{Z}_p$ 上でのジョルダン分解は，条件より，$2Q_{2k}^{(j)} \sim_p X_j$ または Y_j,

$$X_j = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, \underbrace{p, \ldots, p}_{j\text{ 個}}), \quad Y_j = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, \gamma, \underbrace{p, \ldots, p, p\gamma}_{j\text{ 個}})$$

となる．ここで γ は $\mathbb{Z}_p^{\times}$ の 2 乗数でない元である．$\mathrm{inv}_p(X_j) = \chi_p(-1)^{j(j-1)/2}$, $\mathrm{inv}_p(Y_j) = -\chi_p(-1)^{j(j-1)/2}$ であるから，後は Hasse 不変量の積が 1 になるように X_j か Y_j を定めれば，$2Q_{2k}^{(j)}$ の存在及び，その $\mathbb{Z}_p$ でのジョルダン分解が得られたことになる．最後に $Q_{2k}^{(j)}$ のジョルダン分解を知るには $X_j \sim_p 2X_j$ がいつ成り立つかを調べればよいが，これは j が偶数の場合は常に成り立ち，j が奇数の場合は $2 \in \mathbb{Z}_p^{\times 2}$ となるとき，すなわち $p \equiv \pm 1 \bmod 8$ のときに成り立つ．以上をまとめて次の補題を得る．

補題 2.2. (1) j を奇数とする．$j \equiv 1 \bmod 4$ であれば

$$Q_{2k}^{(j)} \sim_p \begin{cases} X_j & k \equiv 0, 1 \bmod 4, \\ Y_j & k \equiv 2, 3 \bmod 4 \end{cases}$$

であり，$j \equiv 3 \bmod 4$ であれば

$$Q_{2k}^{(j)} \sim_p \begin{cases} X_j & k \equiv 0, 3 \bmod 4, \\ Y_j & k \equiv 1, 2 \bmod 4 \end{cases}$$

である．

(2) j を偶数とする．$j \equiv 0 \bmod 4$ であれば

$$Q_{2k}^{(j)} \sim_p \begin{cases} X_j & k \equiv 0 \bmod 4, \\ Y_j & k \equiv 2 \bmod 4 \end{cases}$$

であり，$j \equiv 2 \bmod 4$ であれば

$$Q_{2k}^{(j)} \sim_p \begin{cases} X_j & k \equiv 0,\ p \equiv 1 \bmod 4 \quad \text{または} \quad k \equiv 2,\ p \equiv -1 \bmod 4, \\ Y_j & k \equiv 0,\ p \equiv -1 \bmod 4 \quad \text{または} \quad k \equiv 2,\ p \equiv 1 \bmod 4 \end{cases}$$

である．

3 Fourier 展開の明示式

以上の準備の下で Eisenstein 級数の Fourier 係数の明示式を与える. l を奇数とし, χ を l を法とする Dirichlet 指標で $\chi^2 = 1$ をみたすものとする. Siegel 級数は

$$\prod_p S_p^g(l, \chi, T, k)$$

で与えられるが, すでに見たように, l を割らない素数 p に対しての明示式はすでに知られている. $p \mid l$ とし, $\mathrm{ord}_p\, l = e$ とおくと, $S_p^g(p^e, \chi, T, k)$ が求めるものである (ただし, $\chi = \chi_p$ または χ_0). 次の補題が成り立つ.

補題 3.1. ψ を p を法とする Dirichlet 指標とし, これを自然に p^e を法とする指標ともみなす. このとき

$$E_{p^e,\psi}^{g,k}(Z) = E_{p,\psi}^{g,k}(p^{e-1}Z)$$

が成り立つ.

これより

$$S_g^p(p^e, \chi, T, k) = \begin{cases} S_g^p(\chi, p^{1-e}T, k) & T \equiv 0 \bmod p^{e-1} \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

が成り立つため, 問題は $S_g^p(\chi, T, k)$ の計算, すなわちレベルが p の場合に帰着された.

すでに見たように, $S_g^p(\chi, T, k)$ は $\alpha_p(Q_{2k}^{(j)}, T)$ たちの線形和であらわされ, $\alpha_p(Q_{2k}^{(j)}, T)$ の明示式は奇素数 p に対して [SH] で与えられている. しかしその結論の式はかなり複雑であり, 一見すると線形結合をとった式は非常に扱いづらく思える. ところが実際には次の補題より, 局所密度よりも簡単な式が現れることが分かる.

補題 3.2. p を奇素数とし, $T \in S_g^+(\mathbb{Z})^*$ とすると,

$$\alpha_p(Q_{2k}^{(j)}, T) = \sum_{m=0}^{g} p^{mj/2} R_m(T)$$

と表される. ここで $R_m(T)$ は T, k および $j \bmod 2$ のみによる.

特に j が偶数または奇数に応じて, $R_m(T)$ を $R_m(T)_e$ または $R_m(T)_o$ と書くことにすると, これらは j によらない. よって例えば $\chi = \chi_p$ に対しては

$$\begin{aligned} S_p^g(\chi_p, T, k) &= \mathbf{i}^{gk} \sum_{j=1}^{g+1} c_j p^{g(1/2-j)} \alpha_p(Q_{2k}^{(2j-1)}, T) \\ &= \mathbf{i}^{gk} \sum_{j=1}^{g+1} \sum_{m=0}^{g} p^{(g-m)/2} p^{-(g-m)j} c_j R_m(T)_o \end{aligned}$$

であるが, c_j の性質 (1.5) からこれは $\mathbf{i}^{gk} R_g(T)_o$ となる. すなわち,

$$S_g^p(\chi_p, T, k) = \mathbf{i}^{gk} R_g(T)_o, \quad S_g^p(\chi_0, T, k) = \mathbf{i}^{gk} R_g(T)_e$$

である. よって Siegel 級数は, 局所密度の部分和に過ぎないことが分かる.

補題の証明についてであるが, まずこの補題は $Q_{2k}^{(j)}$ の代わりに $H_{k-j} \perp pH_j$ とした形で, [KS] や [BHS] において言及されている．それらは局所密度の様々な性質から示されたものであったが, 我々の証明では [SH] の明示式を直接使って示す．その際, $\alpha_p(Q,T)$ の明示式において, T に関する不変量は複雑なものが多くあらわれるが, Q に関する不変量はごく少ないのがポイントである．具体的には次のとおりである．$Q_{2k}^{(j)} \sim_p \mathrm{diag}(u_1 p^{\alpha_1}, \ldots, u_{2k} p^{\alpha_{2k}})$ と表記する．まず p のべきとして j に依存する項としては, $\prod_l p^{jn_l/2}$ の形が現れる．ここで n_l は, $I = \{1, \ldots, g\}$ を $I = I_0 \cup \cdots \cup I_r$ と分割したときの I_l の位数を表す．その他の j の寄与としては

$$\chi_p(-1)^{\sharp A(\lambda) + [\sharp A(\lambda)/2]} \prod_{m \in A(\lambda)} \chi_p(u_m) \tag{3.1}$$

と表すことができる．ここで λ は負の整数のある有限区間を動き, $A(\lambda)$ は λ が奇数または偶数に応じて, $\{1, 2, \ldots, 2k-j\}$ または $\{2k-j+1, \ldots, 2k\}$ という集合を表す．さて, 補題 2.2 を使うと (3.1) の値は, j が偶数のときは $\mathbf{i}^k = (-1)^{k/2}$, j が奇数のときは $\mathbf{i}^k \varepsilon_p$ と表せることが分かる．ただし

$$\varepsilon_p = \begin{cases} 1 & p \equiv 1 \bmod 4 \\ \mathbf{i} & p \equiv 3 \bmod 4 \end{cases}$$

とおいた．特に (3.1) は $j \bmod 2$ にしかよらず, これで補題は示された．

我々の主定理は次のようになる．記号は [SH] のものを使い, 煩雑なのでここには書かない．$\xi_{i,\lambda}(T,Q)_e$ および $\xi_{i,\lambda}(T,Q)_o$ を

$$\begin{aligned}
\xi_{i,\lambda}(T,Q)_e = 2 \cdot \mathbf{i}^k \prod_{m \in B_i(\lambda)} \chi_p(v_m) & \\
\times \begin{cases} 0 & \beta_i + \lambda \geq 0,\ \sharp B_i(\lambda) : \mathrm{odd} \\ (1 - p^{-1}) \chi_p(-1)^{[\sharp B_i(\lambda)/2]} & \beta_i + \lambda \geq 0,\ \sharp B_i(\lambda) : \mathrm{even} \\ \chi_p(-v_i) \chi_p(-1)^{[\sharp B_i(\lambda)/2]} & \beta_i + \lambda = -1,\ \sharp B_i(\lambda) : \mathrm{odd} \\ -p^{-1/2} \chi_p(-1)^{[\sharp B_i(\lambda)/2]} & \beta_i + \lambda = -1,\ \sharp B_i(\lambda) : \mathrm{even}, \end{cases} & \\
\xi_{i,\lambda}(T,Q)_o = 2(-\mathbf{i})^k \varepsilon_p \prod_{m \in B_i(\lambda)} \chi_p(v_m) & \\
\times \begin{cases} 0 & \beta_i + \lambda \geq 0,\ \sharp B_i(\lambda) : \mathrm{even} \\ (1 - p^{-1}) \chi_p(-1)^{[\sharp B_i(\lambda)/2]} & \beta_i + \lambda \geq 0,\ \sharp B_i(\lambda) : \mathrm{odd} \\ \chi_p(v_i) \chi_p(-1)^{[\sharp B_i(\lambda)/2]} & \beta_i + \lambda = -1,\ \sharp B_i(\lambda) : \mathrm{even} \\ -p^{-1/2} \chi_p(-1)^{[\sharp B_i(\lambda)/2]} & \beta_i + \lambda = -1,\ \sharp B_i(\lambda) : \mathrm{odd} \end{cases} &
\end{aligned}$$

で定める．また

$$\widetilde{\rho}_{l,\lambda}(\sigma; T, Q) = kn_l\lambda + \frac{1}{2} \sum_{i \in I_l} \sum_{m=1}^{g} \min\{\beta_m + e_{\sigma,i,m} + \lambda, 0\},$$

とおく．

定理 3.3 (主定理)**.** $k > g+1$ とする．$T \in S_g^+(\mathbb{Z})^*$ とし，χ は χ_p または χ_0 を表す．このとき

$$S_g^p(\chi, T, k) = \mathbf{i}^{gk} \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_g \\ \sigma^2 = 1}} 2^{-c_1(\sigma)} (1-p^{-1})^{c_2(\sigma)} p^{-c_2(\sigma)} \sum_{I = I_0 \cup \cdots \cup I_r} p^{-\tau(\{I_i\}) - t(\sigma, \{I_i\})}$$
$$\times \sum_{\{\nu\}} p^{-\sum_{l=0}^r \nu_l n(l)} \prod_{l=0}^r \xi_{l, \nu_0 + \cdots + \nu_l}(\sigma; T, Q_{2k})_*$$

が成り立つ．ここで $*$ は，$\chi = \chi_p$ または χ_0 に応じて o または e を表し，

$$\xi_{l,\lambda}(\sigma, T, Q)_* = p^{\widetilde{\rho}_{l,\lambda}(\sigma; T, Q)} \prod_{\substack{i \in I_l \\ \sigma(i) = i}} \xi_{i,\lambda}(T, Q)_*$$

である．$\{\nu\}$ は

$$\{(\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^r \mid -b_l(\sigma, T) \leq \nu_0 + \nu_1 + \cdots + \nu_l \leq -1, \ (0 \leq {}^\forall l \leq r)\}$$

の範囲を動く．

以上で l が奇数のとき，Siegel Eisenstein 級数 $E_{l,\chi}^{g,k}(Z)$ $(\chi^2 = 1)$ の Fourier 展開はすべて計算できることが示された．

参考文献

[An] A. N. Andrianov, Quadratic forms and Hecke operators, Grundl. Math. Wiss., 286, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[Boe] S. Böcherer, On the space of Eisenstein series for $\Gamma_0(p)$: Fourier expansions, With an appendix by H. Katsurada, Comment. Math. Univ. St. Pauli **63** (2014), no. 1-2, 3–22

[BHS] S. Böcherer and Y. Hironaka and F. Sato, Lineare independence of local densities of quadratic forms and its application to the theory of Siegel modular forms, In: Quadratic forms–algebra, arithmetic, and geometry, 51–82, Contemp. Math. 493, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

[Ca] J. W. S. Cassels, Rational Quadratic forms, London Mathematical Society Monographs, 13, Academic Press, Inc., London-NewYork, 1978.

[Di] M. J. Dickson, Fourier coefficients of degree two Siegel-Eisenstein series with trivial character at squarefree level, Ramanujan J. **37** (2015), no. 3, 541–562.

[Fr] E. Freitag, Siegel Eisenstein series of arbitrary level and theta series, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **66** (1996), 229–247.

[Gu1] K. Gunji, The dimension of the space of Siegel-Eisenstein series of weight one, Math. Z. **260** (2008), no. 1, 187–201.

[Gu2] K. Gunji, On the Siegel Eisenstein series of degree two for low weights, J. Math. Soc. Japan **67** (2015), no. 3, 1043–1067.

[Gu3] K. Gunji, On the Fourier coefficients of Siegel Eisenstein series of degree 2 for prime level, preprint.

[IS] T. Ibukiyama and H. Saito, On zeta functions associated to symmetric matrices, I; an explicit form of zeta functions, Amer. J. Math. **117** (1995), no. 5, 1097–1155.

[Kat] H. Katsurada, An explicit formula for Siegel series, Amer. J. Math. **121** (1999), no. 2, 415–452.

[Ki] Y. Kitaoka, Arithmetic of quadratic forms, Cambridge Tracts in Mathematics, **106**. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[KS] H. Katsurada and R. Schulze-Pillot, Genus theta series, Hecke operators and the basis problem for Eisenstein series, In: Automorphic forms and zeta functions, 234–261, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2006.

[Mi] Y. Mizuno, An explicit arithmetic formula for the Fourier coefficients of Siegel-Eisenstein series of degree two and square-free odd levels, Math. Z. **263** (2009), no. 4, 837–860.

[SH] F. Sato and Y. Hironaka, Local densities of representations of quadratic forms over p-adic integers (the non dyadic case). J. Number Theory **83** (2000), no. 1, 106–136.

[Sh] G. Shimura, Euler products and Fourier coefficients of automorphic forms on symplectic groups, Invent. Math. **116** (1994), no. 1-3, 531–576.

[Si] C. L. Siegel, Über die analytische Theorie der quadratischen Formen I, Ann. Math. **36** (1935), no. 3, 527–606

[Ta1] S. Takemori, p-adic Siegel Eisenstein series of degree two, J. Number Theory **132** (2012), no. 6, 1203–1264.

[Ta2] S. Takemori, Siegel Eisenstein series of degree n and Λ-adic Eisenstein series, J. Number Theory **149** (2015), 105–138.

[Ya] T. Yang, An explicit formula for local densities of quadratic forms, J. Number Theory **72** (1998), no. 2, 309–356.