ランキン・セルバーグ級数の特殊値に関する ある平均について

源嶋 孝太 (京都産業大学)

1 主結果

この節で説明される記号は本稿を通して用いられる．任意の自然数 n と $\bmod N$ の Dirichlet 指標 ξ に対して $\mathcal{M}_n(N,\xi)$ (resp. $\mathcal{S}_n(N,\xi)$) を指標 ξ, 重み k をもつ $\Gamma_0(N)$ に関するモジュラー形式 (resp. カスプ形式) のなす空間とする．モジュラー形式 $f \in \mathcal{M}_n(N,\xi)$ に対して, その無限遠点における Fourier 展開を

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f) e^{2\pi i n z}, \quad z \in \mathfrak{H}$$

と書く．ここで $\mathfrak{H}$ は上半平面である．

k, l を条件 $k \geq l$ をみたす自然数とし, χ, ψ を $\bmod N$ の Dirichlet 指標とする．このとき, モジュラー形式の対 $(f,g) \in \mathcal{S}_k(N,\chi) \times \mathcal{M}_l(N,\psi)$ に対して, Rankin–Selberg 級数 $D(s, f\otimes g)$ を

$$D(s, f\otimes g) := L(2s-k-l+2, \overline{\chi}\psi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{a_n(f)} a_n(g)}{n^s}$$

により定める．ここで $L(s,\xi)$ は Dirichlet 指標 ξ に関する Dirichlet L-関数である．$D(s, f\otimes g)$ は半平面 $\mathrm{Re}(s) > \frac{k+1}{2} + l$ で絶対収束する．さらに g がカスプ形式であれば収束域は広がり, $\mathrm{Re}(s) > \frac{k+l}{2}$ で絶対収束する．よく知られているように $D(s, f\otimes g)$ は実解析的 Eisenstein 級数を含む積分表示をもち, その積分表示を通して $D(s, f\otimes g)$ は全 s-平面に有理型に接続される．

定理 A. $k - l \geq 2$ と仮定する．$\mathcal{B}_k(N,\chi)$ を $\mathcal{S}_k(N,\chi)$ の任意の直交基底とし, m を条件 $\frac{k+l}{2} - 1 < m < k$ をみたす整数とする．このとき, ゼロでない $g \in \mathcal{S}_l(N,\psi)$ に対して次が成り立つ:

1) $\frac{k+l}{2} < m < k$ のとき

$$\sum_{f \in \mathcal{B}_k(N,\chi)} \frac{a_1(f) D(m, f\otimes g)}{\langle f, f\rangle} = a_1(g) \frac{N\pi(4\pi)^{k-1} L(2m-k-l+2, \overline{\chi}\psi)}{3(k-2)!} \prod_{p|N} (1+p^{-1}).$$

2) $m = \frac{k+l}{2}$ のとき

$$\sum_{f \in \mathcal{B}_k(N,\chi)} \frac{a_1(f) D(m, f\otimes g)}{\langle f, f\rangle}$$
$$= \frac{a_1(g)}{3(k-2)!} \left(N\pi(4\pi)^{k-1} L(2, 1_N) \prod_{p|N} (1+p^{-1}) - \frac{\pi^2 (4\pi)^k}{(k-l)\left(\frac{k+l}{2}-1\right)} \prod_{p|N} (1-p^{-2}) \right).$$

ここで $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は Petersson 内積である.

$SL_2(\mathbb{Z})$ に関するモジュラー形式に対しては次のような先行研究がある:

	$\frac{k+l}{2} < m < k$	$m = \frac{k+l}{2}$
$N = 1$	Lanphier [2]	Ohta–Yagi–Gejima–Moriyama [3]

Lanphier は Maass–Shimura 作用素を用いて Rankin–Cohen ブラケットを表示し, その応用として上記の結果を得た. Ohta–Yagi–Gejima–Moriyama は異なる手法で上記の結果を得ている. 本研究では, Ohta–Yagi–Gejima–Moriyama の手法を他の臨界点に拡張して定理 A を得た. §3 でその証明の概要を述べたい.

主結果の簡単な帰結として次を得る:

系 B. ゼロでない $g \in \mathcal{S}_l(N,\psi)$ で $a_1(g) \neq 0$ をみたすものに対して, 次をみたす $f \in \mathcal{S}_k(N,\chi)$ が存在する:

$$a_1(f)D(m, f \otimes g) \neq 0.$$

2 準備

次の節で主結果の証明を簡単に述べたい. そのために必要な記号や概念を復習する. 特に断りなく上半平面 $\mathfrak{H}$ の元 z を (慣習に従って) $z = x + iy$ と書く.

2.1 概正則モジュラー形式

まず [5, §8] から概正則モジュラー形式の復習をしたい. t, k を非負整数とし, N を自然数とする. また, χ を $\mathrm{mod}N$ の Dirichlet 指標とする. このとき次の (i),(ii) をみたす実解析的関数 $f : \mathfrak{H} \to \mathbb{C}$ の集合を $\mathcal{N}_k^t(\Gamma_0(N),\chi)$ と書く:

i) $(f\|_k\gamma)(z) := (\gamma_{21}z + \gamma_{22})^{-k} f(\gamma z) = \chi(\gamma) f(z), \quad \forall(\gamma = (\gamma_{ij}), z) \in \Gamma_1(N) \times \mathfrak{H}$,

ii) 任意の $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対して, $f\|_k\gamma$ は次のような一意的な表示をもつ:

$$(f\|_k\gamma)(z) = \sum_{\nu=0}^{t} y^{-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} b_{\nu,n}(f,\gamma) e^{\frac{2\pi inz}{N}} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(y; f, \gamma) e^{\frac{2\pi inz}{N}}.$$

ここで $b_{\nu,n}(f,\gamma) \in \mathbb{C}$, $B_n(y; f,\gamma) := \sum_{\nu=0}^{t} y^{-\nu} b_{\nu,n}(f,\gamma)$ である.

このとき, $\mathcal{N}_k^t(\Gamma_0(N),\chi)$ の元は指標 χ, 重み k, 次数 t の $\Gamma_0(N)$ に関する概正則モジュラー形式と呼ばれる. $\mathcal{M}_k(N,\chi) = \mathcal{N}_k^0(N,\chi)$ であることに注意する. より一般に次の集合を考える:

$$C_k^\infty(N,\chi) := \left\{ f \in C^\infty(\mathfrak{H}) \middle|\ f\|_k\gamma = \chi(\gamma) f,\ {}^\forall\gamma \in \Gamma_1(N) \right\}.$$

任意の $f, g \in C_k^\infty(N,\chi)$ に対して次のような積分を考える:

$$\mathrm{vol}(\Gamma_0(N)\backslash\mathfrak{H})^{-1} \int_{\Gamma_0(N)\backslash\mathfrak{H}} \overline{f(z)} g(z) y^k \frac{dxdy}{y^2}. \tag{2.1}$$

もし上の積分が収束するならば, それを $\langle f, g\rangle$ と書く. 特に, $f, g \in \mathcal{S}_k(N,\chi)$ であれば, 上の積分 (2.1) は収束し, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $\mathcal{S}_k(N,\chi)$ 上の内積となることが知られている. これを Petersson 内積と呼ぶ.

2.2 Maass–Shimura 作用素と概正則モジュラー形式の正則射影

しばしばMaass–Shimura 作用素と呼ばれる $C^\infty(\mathfrak{H})$ 上の微分作用素 δ_r と ε を定義する．$r \in \mathbb{R}$ とする．このとき微分作用素 δ_r と ε が

$$(\delta_r f)(z) := \mathrm{Im}(z)^{-r}\frac{\partial}{\partial z}(\mathrm{Im}(z)^r f(z)) = \frac{rf(z)}{2i\ \mathrm{Im}(z)} + \frac{\partial f}{\partial z}(z),$$
$$(\varepsilon f)(z) := -\mathrm{Im}(z)^2\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z)$$

で定義される．ここで

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

もし f が $\mathfrak{H}$ 上の正則関数であれば $\varepsilon f = 0$ が成り立つことに注意せよ．また, δ_k と ε は Petersson 内積に関して互いに随伴であることが知られている．任意の非負整数 p に対して, 微分作用素 δ_r^p は帰納的に次のように定義される:

$$\delta_r^0 = 1, \quad \delta_r^1 = \delta_r, \quad \delta_r^{p+1} = \delta_{r+2p}\delta_r^p.$$

次の命題はよく知られている:

命題 2.2.1. (k,t) を $k > 2t$ をみたす非負整数の対とし, χ を $\bmod N$ の Dirichlet 指標とする．このとき, 各 $\varphi \in \mathcal{N}_k^t(N,\chi)$ は次のような表示をもつ:

$$\varphi(z) = \sum_{j=0}^{t}(\delta_{k-2j}^j\widetilde{\varphi}_j)(z). \tag{2.2}$$

ここで各 j に対して $\widetilde{\varphi}_j \in \mathcal{M}_{k-2j}(N,\chi)$ であり, それらは φ に対して一意的に決まる．さらに, φ が任意の $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対して $B_0(y;\varphi,\gamma) = 0$ となるとき, $\widetilde{\varphi}_j \in \mathcal{S}_{k-2j}(N,\chi)$ が成り立つ．

展開 (2.2) において, $\widetilde{\varphi}_0$ は φ の正則射影と呼ばれる．φ の正則射影を記号で $\eta(\varphi)$ と書く．

2.3 非正則 Eisenstein 級数と Rankin–Selberg 級数

Rankin–Selberg 級数の積分表示を説明するために (非正則) Eisenstein 級数を導入する．h を整数とし, χ を, $\chi(-1)^h = (-1)^h$ をみたす $\bmod N$ の Dirichlet 指標とする．このとき, Eisenstein 級数 $E_h^\chi(z,s)$ が

$$E_h^\chi(z,s) := 2L(2s+h,\chi)\sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(N)}\chi(\gamma)(\mathrm{Im}^s\|_h\gamma)(z), \quad (z,s) \in \mathfrak{H}\times\mathbb{C} \tag{2.3}$$

により定義される．ここで Im^s と Γ_∞ はそれぞれ

$$\mathrm{Im}^s(z) := \mathrm{Im}(z)^s, \quad \Gamma_\infty := \left\{\pm\begin{pmatrix} 1 & n \\ & 1\end{pmatrix} \middle| \ n \in \mathbb{Z}\right\}$$

により定義される．各 $z \in \mathfrak{H}$ に対して, 級数 (2.3) は $\mathrm{Re}(s) > 1 - h/2$ で絶対かつ広義一様収束する．定義から $\gamma \in \Gamma_0(N)$ に対して $E_{h,s}^\chi\|_h\gamma = \overline{\chi}(\gamma)E_{h,s}^\chi$ が成り立つことがすぐに確認できる．ここで $E_{h,s}^\chi$ は

$$E_{h,s}^\chi(z) := E_h^\chi(z,s)$$

で定義される．Eisenstein 級数の Fourier 展開を計算することで, Eisenstein 級数が全平面に有理型に接続されることや, $1-h/2<m\leq 0$ をみたす整数 m に対して $E^{\chi}_{h,m}\in\mathcal{N}_h^{|m|}(N,\overline{\chi})$ であること, $E^{\chi}_{h,1-h/2}\in\mathcal{N}_h^{h/2}(N,\overline{\chi})$ であることがわかる．その詳細や Eisenstein 級数の極については, 例えば [1, §2.4] を見てほしい．Eisenstein 級数を用いた Rankin–Selberg 級数の積分表示は次で与えられる:

命題 2.3.1. $(f,g)\in\mathcal{S}_k(N,\chi)\times\mathcal{M}_l(N,\psi)$ とする．このとき $\mathrm{Re}(s)>\frac{k+1}{2}+l$ ならば

$$\begin{aligned}2(4\pi)^{-s}\Gamma(s)D(s,f\otimes g)&=\int_{\Gamma_0(N)\backslash\mathfrak{H}}\overline{f(z)}g(z)E^{\overline{\chi}\psi}_{k-l}(z,s-k+1)y^k\frac{dxdy}{y^2}\\&=\mathrm{vol}(\Gamma_0(N)\backslash\mathfrak{H})\left\langle f,gE^{\overline{\chi}\psi}_{k-l,s-k+1}\right\rangle\end{aligned}$$

が成り立つ．

3　主結果の証明

この節で定理 A の証明の概要を述べる．k,l,N,χ,ψ などの記号は §1 を参照されたい．

3.1　Rankin–Selberg 級数の特殊値の平均

$g\in\mathcal{S}_l(N,\psi)$ とする．整数 m に対して $\mu(m):=m-k+1$ とおく．このとき, $gE^{\overline{\chi}\psi}_{k-l,\mu(m)}$ は概正則モジュラー形式である．定理 A は, 後に述べられる命題 3.1.1 における $gE^{\overline{\chi}\psi}_{k-l,\mu(m)}$ の正則射影の Fourier 係数 $a_1(\eta\Big(gE^{\overline{\chi}\psi}_{k-l,\mu(m)}\Big))$ を具体的に求めることで証明される．命題 3.1.1 は, 微分作用素 δ_r と ε が互いに随伴であることと

$$\left\langle f,\eta\Big(gE^{\overline{\chi}\psi}_{k-l,\mu(m)}\Big)\right\rangle=\left\langle f,gE^{\overline{\chi}\psi}_{k-l,\mu(m)}\right\rangle$$

に注意するとわかる．

命題 3.1.1. 定理 A と同じ仮定の下, 次が成り立つ:

$$\sum_{f\in\mathcal{B}_k(N,\chi)}\frac{a_1(f)D\,(m,f\otimes g)}{\langle f,f\rangle}=a_1(\eta\Big(gE^{\overline{\chi}\psi}_{k-l,\mu(m)}\Big))\frac{(4\pi)^m\mathrm{vol}(\Gamma_0(N)\backslash\mathfrak{H})}{2(m-1)!}.$$

3.2　Fourier 係数 $a_1(\eta\Big(gE^{\overline{\chi}\psi}_{k-l,\mu(m)}\Big))$ の計算

講演では時間の都合上, Fourier 係数 $a_1(\eta\Big(gE^{\overline{\chi}\psi}_{k-l,\mu(m)}\Big))$ の計算については全く述べられなかったので, 本稿で説明したい．

条件 $1-\frac{k-l}{2}\leq\mu\leq 0$ をみたす整数 μ をとる．もし $g\in\mathcal{S}_l(N,\psi)$ ならば, $gE^{\overline{\chi}\psi}_{k-l,\mu}$ は概正則モジュラー形式である．より具体的には $gE^{\overline{\chi}\psi}_{k-l,\mu}\in\mathcal{N}_k^{t(\mu)}(N,\chi)$ が成り立つ．ここで

$$t(\mu):=\begin{cases}|\mu| & \text{if } 1-\dfrac{k-l}{2}<\mu\leq 0,\\ \dfrac{k-l}{2} & \text{if } \mu=1-\dfrac{k-l}{2}\end{cases}$$

とおいた．任意の $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対して，$B_0(y; gE^{\overline{\chi}\psi}_{k-l,\mu}, \gamma) = 0$ であることに注意する．いま，$k > 2|\mu|$ なので，概正則モジュラー形式 $gE^{\overline{\chi}\psi}_{k-l,\mu}$ に命題 2.2.1 を適用すると，カスプ形式の族 $\{\widetilde{\varphi}^{(\mu)}_q\}^{t(\mu)}_{q=0}$ で次をみたすものが存在することがわかる:

1) $\widetilde{\varphi}^{(\mu)}_q \in \mathcal{S}_{k-2q}(N, \chi)$,

2) $gE^{\overline{\chi}\psi}_{k-l,\mu} = \displaystyle\sum_{j=0}^{t(\mu)} \delta^j_{k-2j}\widetilde{\varphi}^{(\mu)}_j$.

特に

$$\widetilde{\varphi}^{(\mu)}_q = \frac{2^{2q}}{q!(k-2q)_q}\varepsilon^q \left(gE^{\overline{\chi}\psi}_{k-l,\mu} - \sum_{j=q+1}^{t(\mu)} \delta^j_{k-2j}\widetilde{\varphi}^{(\mu)}_j \right) \tag{3.1}$$

が成り立つ．これから Fourier 係数 $\{a_1(\widetilde{\varphi}^{(\mu)}_j)\}_j$ に関する漸化式を得る．

以下，条件 $1 - \frac{k-l}{2} < \mu \leq 0$ をみたす整数 μ について，Fourier 係数 $\widetilde{\varphi}^{(\mu)}_j$ を計算する．$\mu = 1-(k-l)/2$ のときも同様である．

定理 3.2.1. μ は $1 - \frac{k-l}{2} < \mu \leq 0$ をみたす整数であるとする．このとき次が成り立つ:

$$a_1(\widetilde{\varphi}^{(\mu)}_j) = \frac{2^{|\mu|+1}(2\pi)^{|\mu|}i^j\pi^{-j}(k-2j-1)L(k-l-2|\mu|, \overline{\chi}\psi)}{(k-|\mu|-j-1)_{|\mu|+1}}\binom{|\mu|}{j}a_1(g),\ 0 \leq j \leq |\mu|-1,$$

$$a_1(\widetilde{\varphi}^{(\mu)}_{|\mu|}) = \frac{2(2i)^{|\mu|}L(k-l-2|\mu|, \overline{\chi}\psi)}{(k-2|\mu|)_{|\mu|}}a_1(g).$$

特に正則射影 $\eta(gE^{\overline{\chi}\psi}_{k-l,\mu(m)})$ の Fourier 係数 $a_1(\eta(gE^{\overline{\chi}\psi}_{k-l,\mu(m)}))$ は次で与えられる．命題 3.1.1 と次の系から定理 A(1) が完全に証明される:

系 3.2.2. 条件 $\frac{k+l}{2} < m < k$ をみたす整数 m に対し，$a_1(\eta\left(gE^{\overline{\chi}\psi}_{k-l,\mu(m)}\right))$ は

$$a_1(\eta\left(gE^{\overline{\chi}\psi}_{k-l,\mu(m)}\right)) = \frac{2^{k-m}(2\pi)^{k-m-1}(k-1)L(2m-k-l+2, \overline{\chi}\psi)}{(m)_{k-m}}a_1(g)$$

で与えられる．

定理 3.2.1 を証明する．式 (3.1) から $\{\widetilde{\varphi}_j\}_j$ が以下の漸化式をみたすことがわかる:

$$a_1(\widetilde{\varphi}^{(\mu)}_q) = \frac{2(2i)^{|\mu|}L(2\mu+k-l, \chi\overline{\psi})\delta_{q,|\mu|}}{(k-2|\mu|)_{|\mu|}}a_1(g) - \sum_{j=q+1}^{|\mu|}(2\pi i)^{j-q}\frac{(k-j-q)_{j-q}}{(k-j)_{j-q}}\binom{j}{q}a_1(\widetilde{\varphi}^{(\mu)}_j).$$

また，

$$\widetilde{\varphi}^{(\mu)}_{|\mu|}(z) = \frac{(2i)^{|\mu|}}{(k-2|\mu|)_{|\mu|}}g(z)E^{\overline{\chi}\psi}_{k-l-2|\mu|}(z)$$

が成り立つことが容易にわかるので，Eisenstein 級数の Fourier 展開から $a_1(\widetilde{\varphi}^{(\mu)}_{|\mu|})$ が計算される．定理 3.2.1 はこれと上の漸化式を用いて数学的帰納法により証明される．その際次のような有理関数の恒等式を証明する必要があった:

$$\Phi_r(s) := \sum_{j=0}^{r}\frac{(-1)^j(s-2j+r)}{(s-j)_{r+1}}\binom{r}{j} \equiv 0. \tag{3.2}$$

ここで $(\alpha)_n$ は Pochhammer 記号である．二項係数の計算から $\Phi_r(s)$ は等式 $\Phi_r(s+1) = \Phi_r(s)$ をみたすことに気づく．周期をもつ有理関数は恒等的にゼロであるから (3.2) が示される．

謝辞

講演の機会を与えてくださったオーガナイザーの金子昌信先生, 権寧魯先生, 岸康弘先生にこの場を借りて心より感謝申し上げます.

参考文献

[1] K. Gejima, *An average of special values of Dirichlet series of Rankin–Selberg type*, Ramanujan J. (2019), doi:10.1007/s11139-019-00166-9.

[2] D. Lanphier, *Combinatorics of Maass–Shimura operators*, J. Number Theory **128** (2008), no. 8, 2467–2487.

[3] A. Ohta, M. Yagi, K. Gejima and T. Moriyama, *On an average of critical values of Rankin–Selberg L-functions*, preprint, 2018.

[4] G. Shimura, *The special values of the zeta functions associated with cusp forms*, Comm. Pure Appl. Math. **29** (1976), no. 6, 783–804.

[5] G. Shimura, Elementary Dirichlet Series and Modular Forms, Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, 2007.

[6] G. Shimura, Modular Forms: Basics and Beyond, Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, 2012.