Ray-Singer スペクトラルゼータ関数の多重版について

小谷 久寿 (MPIM)

概 要

この記事では, Ray-Singer スペクトラルゼータ関数と呼ばれる Riemann 多様体上の局所系に値を持つ微分形式の空間に作用する Hodge ラプラシアンの固有値を用いて定義される幾何的なゼータ関数の多重版がどのような基本的な性質を持つかについて考察したことを簡単に紹介します. 本稿の内容は Bingxiao Liu 氏との共同研究によるものです.

1 はじめに

ラプラシアンに付随するゼータ関数は, Minakshinsundaram さんと Pleijel さんにより 1949 年出版の論文 ([MP]) の中で初めて導入され, Seeley さんにより [S] において楕円型擬微分作用素へと拡張された後, Ray さんと Singer さんによるラプラシアンに付随するゼータ関数を用いたラプラシアンの行列式の正規化のアイディアへと繋がっていきました (cf. [BGV]). この正規化を用いて, 彼らは Reidemeister-Franz トーションという位相不変量の Hodge 理論類似として解析的トーションを構成しました ([RaSi]).

この Ray-Singer 解析的トーションと Reidemeister-Franz トーションの関係は, Cheeger さんと Müller さん, Bismut さん Zhang さんらを中心に詳細な研究が行われました ([Ch1, Ch2, M1, M2, BZ]). さらに, 3 次元量子トポロジーにおける摂動的不変量の係数は解析的トーションの高次の一般化と見做すこともでき, その点でも興味深い対象です ([AS, BNW, F]).

また, ゼータ関数を用いた正規化のアイディアは, Kurokawa さん, Deninger さん, Manin さんらを中心に一元体の理論を含めた整数論との関係が深く研究されていきました ([Ku, De1, De2, Ma]). 特に, この方向では, 数論トポロジー (cf. [Mo]) における, 近年の Deninger さんによる 3 次元葉層力学系の整数論への応用等 ([De3]) と合わせてさらなる発展が期待される領域と思われます.

この記事は, この分野への個人的な入門ノートも兼ねたものとして, Ray-Singer スペクトラルゼータ関数の多重版を構成し, それの幾何的な意味合いがどうなってるかについて考察したこと (の一部) を簡単にまとめました[1]. 内容は [KL] に基づきます.

2 Ray-Singer スペクトラルゼータ関数と Ray-Singer トーション

この節では, Ray さんと Singer さんによって 1971 年出版の論文 ([RaSi]) 中で定義された古典的な Ray-Singer スペクトラルゼータ関数と, それの重み付き交代和の変数 $s = 0$ での微分を用いて定義される Ray-Singer トーションについて復習します.

[1] このような多重版自体はすでに考えられている可能性もありましたが, これに関連して考えたいことがあるためやっています.

2.1 設定

$M=(M,g^{TM})$ を m 次元の閉 Riemann 多様体とします. すなわち, m 次元閉可微分多様体 M と切断 $g^{TM}\in\Gamma(M,\mathrm{Sym}^2(T^*M))$ で正定値なものの組とします. ここで, $\mathrm{Sym}^2(T^*M)$ は接束 TM に対する余接束 T^*M の 2 次対称テンソル積であるとし, $\Gamma(M,\mathrm{Sym}^2(T^*M))$ はその滑らかな切断全体の空間とします.

さて, $\pi_1(M)$ を M の基本群とし, その n 次ユニタリ群 $U(n)$ への表現 $\rho:\pi_1(M)\to\mathrm{U}(n)$ を考えましょう. このとき, 表現 ρ に付随する M 上のベクトル束が次のように定義されます:

$$E_\rho:=\widetilde{M}\times_\rho\mathbb{C}^n:=\widetilde{M}\times\mathbb{C}^n/\sim.$$

ここで, $\widetilde{M}$ は M の普遍被覆空間とし, 基本群の元は $\widetilde{M}$ 上には被覆変換として作用し, $\mathbb{C}^n$ 上には表現 ρ を通じて作用することに注意して, 直積多様体 $\widetilde{M}\times\mathbb{C}^n$ における同値関係を各 $(m,v)\in\widetilde{M}\times\mathbb{C}^n$ と各 $\gamma\in\pi_1(M)$ に対して $(m,v)\sim(\gamma\cdot m,\rho(\gamma)(v))$ と定めます.

このとき, $\mathbb{C}^n$ の標準的なエルミート内積は, $U(n)$-不変であることから, E_ρ 上に well-defined なエルミート計量を定めますので, それを h^{E_ρ} を記すことにします.

また, E_ρ には次のように自然な平坦接続 ∇_ρ が定義されることに注意しましょう: n 次ユニタリ群 $U(n)$ の Lie 代数を $\mathfrak{g}:=\mathfrak{u}_n$ とおき, $\omega^{\mathfrak{g}}$ を $U(n)$ 上の $\mathfrak{g}$ に値を持つ左不変カノニカル 1-形式とします. これを $\widetilde{M}\times U(n)$ 上の $\mathfrak{g}$ 値 1-形式とみなすと, $\omega^{\mathfrak{g}}$ は $\pi_1(M)$ の作用で不変なので, 枠束 $\mathrm{U}(E_\rho)$ 上の接続 1-形式を定めます. この接続に対応して E_ρ の平坦接続が定まり, それを ∇_ρ と記します.

2.2 de Rham 複体と Hodge ラプラシアン

次に, 前の節で定義した閉 Riemann 多様体 M 上のエルミート計量を持つ平坦ベクトル束 $(M,g^{TM},E_\rho,\nabla_\rho,h^{E_\rho})$ に対して, E_ρ に値を持つ微分形式の空間に内積を定義しましょう.

$\Omega^k(M,E_\rho)$ を E_ρ に値を持つ k 次微分形式の空間, すなわち, M の余接束の k 次外積と E_ρ のテンソル積束 $\wedge^kT^*M\otimes E_\rho$ の滑らかな切断全体のなす空間とします. このとき, $\Omega^k(M,E_\rho)$ には, Riemann 計量 g^{TM} とエルミート計量 h^{E_ρ} を用いて, 次のように内積が定義されます: $\alpha,\beta\in\Omega^k(M,E_\rho)$ に対して,

$$(\alpha,\beta):=\int_M h^{E_\rho}(\alpha\wedge*\beta)=\sum_{i,j=1}^n\int_M(\alpha_i,\beta_j)_{g^{TM}}\cdot h^{E_\rho}(E_i,E_j)d\mathrm{vol}_{g^{TM}}.$$

ここで, $*:\Omega^k(M,E_\rho)\to\Omega^{n-k}(M,E_\rho)$ は Riemann 計量 g^{TM} から定まる Hodge スター作用素の誘導作用素であり, $\alpha=\sum_{i=1}^n\alpha_i\otimes E_i$, $\beta=\sum_{j=1}^n\beta_j\otimes E_j$ は E_ρ の局所枠 $E_1,\ldots,E_n$ を用いて表示したものであり, $d\mathrm{vol}_{g^{TM}}$ は Riemann 計量 g^{TM} により定まる体積形式としています. また, $(\cdot,\cdot)_{g^{TM}}$ は, Riemann 計量 g^{TM} から誘導される k 次微分形式の空間上の内積を表しています.

平坦束 E_ρ の接続 1-形式 ω^ρ は平坦であるため, 外微分作用素 d を用いて, $d_\rho:=d+\omega^\rho$ と定めると系列

$$0\to\Omega^0(M,E_\rho)\overset{d_\rho}{\to}\Omega^1(M,E_\rho)\overset{d_\rho}{\to}\cdots\overset{d_\rho}{\to}\Omega^n(M,E_\rho)\to0$$

は完全系列となり, $(\Omega^0(M,E_\rho),d_\rho)$ は複体を成します. この複体から定まる de Rham コホモロジーを表現 ρ に付随する局所系係数コホモロジーと呼び, $H^\bullet(M,E_\rho)$ と書くことにします[2].

[2] 平坦接続から定まる微分方程式系の $\mathbb{C}$ 上 1 次独立な局所解たちで張られる局所枠 $\langle s_1,\ldots,s_n\rangle$ を取ることに

2.3 Ray-Singer スペクトラルゼータ関数と Ray-Singer 解析的トーション

以上の設定のもとに, Ray-Singer スペクトラルゼータ関数と Ray-Singer 解析的トーションの定義とその基本的な性質を思い出しましょう.

そのために, まずは E_ρ 値の微分形式の空間上の Hodge ラプラシアンを定義し, そのスペクトルの性質を見てみましょう. 前節の状況において, 通常の Hodge ラプラシアンと同様に, E_ρ 値の微分形式の空間上の Hodge ラプラシアン Δ_ρ を次で定めます:

$$\Delta_\rho = (d_\rho + \delta_\rho)^2 = d_\rho \circ \delta_\rho + \delta_\rho \circ d_\rho.$$

ここで, $\delta_\rho : \Omega^{k+1}(M, E_\rho) \to \Omega^k(M, E_\rho)$ は ρ で捻られた外微分作用素 d_ρ の形式的随伴作用素, つまり, 各 $\alpha \in \Omega^{k+1}(M, E_\rho)$, $\beta \in \Omega^k(M, E_\rho)$ に対して, $(\delta_\rho\alpha, \beta) = (\alpha, d_\rho\beta)$ により定まる作用素です. また, Δ_ρ を次数 k パート $\Omega^k(M, E_\rho)$ への制限したものを Δ_ρ^k と記すことにします $(k = 0, 1, \ldots, m)$.

このとき, Hodge ラプラシアン Δ_ρ は, 構成より自己随伴作用素であることから (例えば [BGV, Proposition 2.36] を適用することにより)Δ_ρ のスペクトルは離散的であり, さらに各固有値は 0 以上の実数, 各固有空間は有限次元となることがわかります. そこで, Δ_ρ^k の固有値で 0 より真に大きいものたちの (重複度も加味した) 集合を次のように記すことにします:

$$\mathrm{Spect}^*(\Delta_\rho^k) := \{\Delta_\rho^k \text{ の固有値 } \lambda \,|\, \lambda > 0\}.$$

この記法を用いて, $s \in \mathbb{C}$ に対して k **次スペクトラルゼータ関数**を

$$\zeta(\Delta_\rho^k)(s) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Spect}^*(\Delta_\rho^k)} \frac{1}{\lambda^s}$$

により定義します. このとき, このゼータ関数は $\mathrm{Re}(s) > m/2$ に対して絶対収束し, 複素平面全体に有理型関数として解析接続され, さらに, $s = 0$ で正則となります ([S], [BGV, Proposition 9.35]). したがって, $\zeta(\Delta_\rho^k)(s)$ の $s = 0$ での微分が意味を持つため, 表現 ρ に付随する M の **Ray-Singer 解析的トーション**を k 次スペクトラルゼータ関数たちの重み付き交代和の $s = 0$ での微分を用いて次のように定義します:

$$\log T_{RS}(M, \rho) := -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k \frac{d}{ds}\zeta(\Delta_\rho^k)|_{s=0}.$$

ここで, $\frac{d}{ds}\frac{1}{\lambda^s}|_{s=0} = -\log\lambda$ であることに注意すると, $T_{RS}(M, \rho)$ は無限次元行列である Δ_ρ^k の "行列式" の重み付きの交代積と言えます.

以下では, 簡単のため局所系係数のコホモロジー $H^\bullet(M, E_\rho)$ が非輪状である, つまり $H^\bullet(M, E_\rho) = 0$, と仮定します.

補足. (1) 上記のように表現としてユニタリ表現をとった場合, もしくはユニモジュラー表現 (すなわち, 各 $\gamma \in \pi_1(M)$ に対して $|\det(\rho(\gamma))| = 1$ を満たす有限次元表現 ρ) をとった場合には, 多様体の三角形分割を用いて定義される Reidemeister トーションと呼ばれる位相不変量と本質的に一致することが知られています ([Ch1, Ch2, M1, M2]). したがって, この場合は $T_{RS}(M, \rho)$ は M と ρ のみに依存する位相不変量となります.

より, M 上の $\mathbb{C}^n$ に値を持つ局所系 (局所定数層) が定まります. この局所系係数のコホモロジーが $H^\bullet(M, E_\rho)$ となります.

(2) 特に, Chern-Simons 理論と呼ばれる 3 次元の位相的場の理論の摂動展開において 1-ループ項に Ray-Singer トーションが現れることが知られています (cf. [BNW]) (Ray-Singer トーションを用いて 1-loop 項を意味づけているという方が正確かもしれませんが).
(3) $T_{RS}(M,\rho)$ の定義式は, Hurwitz ゼータ関数の微分とガンマ関数を対応づける Lerch の公式のアナログとみることもできます (cf. [Ku]).

3 Ray-Singer スペクトラルゼータ関数の多重版

この節では, 前節の Ray-Singer スペクトラルゼータ関数の定義を (おそらく最も安直なやり方で) Barnes の多重ゼータ関数のような一般化を考えてみましょう.

3.1 Ray-Singer スペクトラルゼータ関数の多重版の形式的な定義

まずは, 形式的に Ray-Singer スペクトラルゼータ関数の多重版を定義をしてみましょう. r を 1 以上の正の整数とし r 個の正の実数のタプル $\overrightarrow{m}=(m_1,\dots,m_r)$ をとり以後固定します. 2 節の設定のもとで, $s\in\mathbb{C}$ に対する次のような関数を考えます[3]:

$$\zeta(\Delta_\rho^k)(s;(m_1,\dots,m_r)) := \sum_{\lambda_1,\dots,\lambda_r} \frac{1}{(m_1\lambda_1+\cdots+m_r\lambda_r)^s}$$

ここで, $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ に関する和は $\mathrm{Spect}^*(\Delta_\rho^k)$ 全体にわたります.

これの, 収束性や解析接続, また, 幾何的な意味合いについて次節以降で見ていきましょう.

3.2 Ray-Singer スペクトラルゼータ関数の多重版の基本的な性質

さて, 前節で定義した関数の性質を調べるために (やや天下り的かもしれませんが) 次のような設定を考えることにします. M^r を閉可微分多様体 M の r 個の直積多様体とします. このとき, 直積の第 i 成分を対応させる射影写像を $\pi_i : M^r \to M$ とおくと, $TM\to M$ と $\mathrm{Sym}^2(T^*M)\to M$ の π_i による引き戻しを考えることができますので, それらを $TM_i\to M^r$, $\mathrm{Sym}^2(T^*M_i)\to M^r$ とそれぞれ記すことにします (つまり, $TM_i := \pi_i^* TM$ とおいたということです). このとき, M の Riemann 計量 g^{TM} は TM_i 上の Riemann 計量を誘導するので, それを $g^{TM_i}\in\Gamma(\mathrm{Sym}^2(T^*M_i))$ と記します $(i=1,\dots,r)$.

また, 上記の記法のもとで, M^r の接束 TM^r は射影写像 π_i による TM の引き戻し TM_i たちの直和束と同型

$$TM^r \simeq \bigoplus_{i=1}^r TM_i \tag{1}$$

であることに注意しましょう. この同型対応により, TM^r には, g^{TM} から誘導される Riemann 計量 g^{TM^r}

$$g^{TM^r} = \bigoplus_{i=1}^r g^{TM_i}$$

が定義されます.

[3]似たような議論で Hurwitz ゼータ関数のような 2 変数の場合でも考えることができます.

さて, 接束の場合と同様に, 第 i 成分を対応させる射影写像 $\pi_i : M^r \to M$ を用いて, M 上の平坦ベクトル束 E_ρ の引き戻しを考えることができますので, それを用いて次のような M^r 上のベクトル束を考えましょう:

$$E_\rho^{\boxtimes r} = E_\rho^1 \boxtimes \cdots \boxtimes E_\rho^r := \pi_1^*(E_\rho) \otimes \cdots \otimes \pi_r^*(E_\rho) \to M^r.$$

このとき, E_ρ には, 平坦接続 $\nabla^{E_\rho^{\boxtimes r}}$ とエルミート内積 $h^{E_\rho^{\boxtimes r}}$ が誘導されることが次のようにしてわかります. $E_\rho^{\boxtimes r}$ は射影写像による引き戻し束のテンソル積束として定義されていることから,

$$\nabla^{E_\rho^{\boxtimes r}} := \bigoplus_{i=1}^{r} (1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \nabla_{\rho,x_i} \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1)$$

により平坦接続が与えられることがわかります. ここで, ∇_{ρ,x_i} は第 i 成分にのみ作用する $\pi_i^* E_\rho$ 上の平坦接続を表しています.

また, h^{E_ρ} が $\pi_i^*(E_\rho)$ に誘導するエルミート内積を h_i と記したとき, $E_\rho^{\boxtimes r}$ 上のエルミート内積 $h^{E_\rho^{\boxtimes r}}$ が次で定義されます:

$v_1 \otimes \cdots \otimes v_r, w_1 \otimes \cdots \otimes w_r \in E_\rho^{\boxtimes r}$ に対して,

$$h^{E_\rho^{\boxtimes r}}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r, w_1 \otimes \cdots w_r) = \prod_{i=1}^{r} h_i(v_i, w_i).$$

以上のように定義された M^r 上のエルミート計量を持つ平坦ベクトル束 $(M^r, g^{TM^r}, E_\rho^{\boxtimes r}, h^{E_\rho^{\boxtimes r}})$ に対して, $\Omega^k(M^r, E^{\boxtimes r})$ を $E_\rho^{\boxtimes r}$-値の k 次微分形式の空間とすると, 平坦接続 $\nabla^{E_\rho^{\boxtimes r}}$ より定まるその上の振れ外微分作用素 $d_\rho^{\boxtimes r}$ は

$$d_\rho^{\boxtimes r} = d_{\rho,x_1} \oplus \cdots \oplus d_{\rho,x_r}$$

のように分解されることがわかります. ここで, d_{ρ,x_i} は, 第 i 成分に作用する外微分作用素を d_{x_i} とし, 平坦接続 $\nabla^{E_\rho^{\boxtimes r}}$ に対応する接続 1-形式を $\sum_{i=1}^r \omega_{x_i}^\rho$ と記すとき

$$d_{\rho,x_i} := d_{x_i} + \omega_{x_i}^\rho$$

で与えられる第 i 成分に作用する振れ外微分作用素を表しています. また, 上で定義した $\Omega^k(M^r, E^{\boxtimes r})$ 上の内積に関する $d_\rho^{\boxtimes r}$ の形式的随伴作用素を $\delta_\rho^{\boxtimes r}$ と記すことにすると, 先と同様に各成分ごとの作用素への分解を持ちます:

$$\delta_\rho^{\boxtimes r} = \delta_{\rho,x_1} \oplus \cdots \oplus \delta_{\rho,x_r}.$$

以上の記号のもと, r 個の正の実数のタプル $\overrightarrow{m} = (m_1, \ldots, m_r)$ に対して, $\bigoplus_{k=1}^r \Omega^k(M^r, E^{\boxtimes r})$ 上の作用素 $\Delta_{\overrightarrow{m}}$ を次のように定めます:

$$\Delta_{\overrightarrow{m}} := m_1 \cdot \Delta_{\rho,x_1} \oplus \cdots \oplus m_r \cdot \Delta_{\rho,x_r}.$$

ここで, $m_i \cdot \Delta_{\rho,x_i}$ は m_i 倍で作用する作用素と $\Delta_{\rho,x_i} = (\delta_{\rho,x_i} + d_{\rho,x_i})^2 = \delta_{\rho,x_i} \circ d_{\rho,x_i} + d_{\rho,x_i} \circ \delta_{\rho,x_i}$ で与えられる作用素の積としています. このとき, $\Delta_{\overrightarrow{m}}$ は, 次数を保つので, $\Omega^k(M^r, E^{\boxtimes r})$ への制限を $\Delta_{\overrightarrow{m}}^k$ とおきます ($k = 1, \ldots, r$).

この作用素 $\Delta_{\overrightarrow{m}}^k$ は構成から自己共役作用素であるので, 2 節と同様に,

$$\mathrm{Spect}^*(\Delta_{\overrightarrow{m}}^k) := \{\Delta_{\overrightarrow{m}}^k \text{ の固有値 } \lambda \,|\, \lambda > 0\}$$

と置き, その k 次のスペクトラルゼータ関数を

$$\zeta(\Delta^k_{\vec{m}})(s) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Spect}^*(\Delta^k_{\vec{m}})} \frac{1}{\lambda^s}$$

により定めます.

このとき, 次の定理が成り立ちます.

定理 1. 上記の設定のもとで, $\mathrm{Re}(s) > rm/2$ のとき

$$\zeta(\Delta^k_\rho)(s; (m_1, \dots, m_r)) = \zeta(\Delta^k_{\vec{m}})(s)$$

が成り立つ.

Proof. 作用素 $\Delta^k_{\vec{m}}$ の構成から, その固有値は Δ^k_ρ の固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ を用いて $m_1\lambda_1 + \cdots + m_r\lambda_r$ という形で表されるので,

$$\begin{aligned}
\zeta(\Delta^k_\rho)(s; (m_1, \dots, m_r)) &= \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_r} \frac{1}{(m_1\lambda_1 + \cdots + m_r\lambda_r)^s} \\
&= \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_r} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty e^{-(m_1\lambda_1 + \cdot + m_r\lambda_r)t} t^{s-1} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \mathrm{Tr}(P_{(0,\infty)} e^{-t\Delta_{\vec{m}}}) t^{s-1} dt \\
&= \zeta(\Delta^k_{\vec{m}})(s).
\end{aligned}$$

ここで, $P_{(0,\infty)}$ は固有値が $(0, \infty)$ に属する固有空間への射影作用素である. □

上の定理から, 次を得ます.

系 1. 関数 $\zeta(\Delta^k_\rho)(s; (m_1, \dots, m_r))$ は, $\mathrm{Re}(s) > rm/2$ において絶対収束し, 複素平面全体への解析接続を持つ. さらに, $s = 0$ で正則である.

これは, 定理 1 から, $\Delta^k_{\vec{m}}$ に対するスペクトラルゼータ関数の議論 (例えば, [BGV, Proposition 9.35]) に帰着できますので, それより従います.

補足. 上の系 1 より, $\zeta(\Delta^k_\rho)(s; (m_1, \dots, m_r))$ の $s = 0$ での微分を考えることができますが, これは 2.3 節の補足 (3) のように, Lerch の公式の一般化として定義される Barnes による多重ガンマ関数の類似とみることもできます.

最後に, r 個の正の実数のタプル $\vec{m} = (m_1, \dots, m_r)$ の幾何的な意味合いを (簡単な場合について) みてみましょう.

r-タプル $\vec{m} = (m_1, \dots, m_r)$ によるスケール変換を用いて TM^r 上の Riemann 計量 $g_{\vec{m}}$ を次のように定義しましょう:

まず, TM_i 上の作用素 $T_{m_i^{-1/2}} : TM_i \to TM_i$ を, 各接ベクトル $X \in T_xM_i$ に対して, $m_i^{-1/2}$ 倍で作用する掛け算作用素 $T_{m_i^{-1/2}}(X) = m_i^{-1/2} \cdot X$ として定義します ($i = 1, \dots, r$). 次に, 同型 (1) を用いて, $g_{\vec{m}}$ を

$$g^{TM^r}_{\vec{m}} := \bigoplus_{i=1}^r T^*_{m_i^{-1/2}}(g^{TM_i})$$

により定義します. ここで, $T^*_{m_i^{-1/2}}(g^{TM_i})$ は, Riemann 計量 g^{TM_i} の掛け算作用素 $T_{m_i^{-1/2}}$ による引き戻しとしています. すなわち, 各 $X, Y \in T_xM_i$ に対して, $T^*_{m_i^{-1/2}}(g^{TM_i})$ は,

$$T^*_{m_i^{-1/2}}(g^{TM_i})_x(X,Y) = g_x^{TM_i}(m_i^{-1/2}\cdot X, m_i^{-1/2}\cdot Y) = m_i^{-1}\cdot g_x^{TM_i}(X,Y)$$

により定義されます.

以上により定義された Riemann 多様体を $M^r_{\vec{m}} = (M^r, g^{TM^r}_{\vec{m}})$ と記すことにします.

このとき, $(M^r, g^{TM^r}_{\vec{m}}, E_\rho^{\boxtimes r}, h^{E_\rho^{\boxtimes r}})$ を用いて定義される捩れ Hodge ラプラシアンを $\Delta(g^{TM^r})$ と記すことにすると, Laplace-Beltrami 作用素の具体的表示から次のことが直ちにわかります.

命題 1. $n=1$ とし ρ を自明な表現とする. このとき, (通常の)0-形式の空間へ作用する Hodge ラプラシアン $\Delta^0_{\vec{m}}$ と $\Delta^0(g^{TM^r})$ の固有値は一致する:

$$\mathrm{Spect}^*(\Delta^0_{\vec{m}}) = \mathrm{Spect}^*(\Delta^0(g^{TM^r})).$$

すなわち, Laplace-Beltrami 作用素の場合には, $\vec{m}$ の情報は TM^r の Riemann 計量のリスケーリングに完全に対応することがわかります.

一般の場合にも同様のことが成り立ち, このようなタイプのゼータ関数は平坦束 E_ρ の外部テンソル積とその Riemann 計量のリスケーリングの情報を持ったスペクトラルゼータ関数だということがわかります. また, 同様の構成で複数の表現を組み合わせる等の一般化を考えることもできます.

幾何的には, このゼータ関数から E_ρ の幾何的な情報をどのようにして取り出せるかが重要な問題となります. これに関しましては, [KL] を参照してください.

補足事項

(1) 発表時では, より一般の GL$(n,\mathbb{C})$-表現の場合でのスペクトラルゼータ関数の計算例を多重版の例として紹介しましたが, ややミスリーディングであったように思われたので, ここには掲載しておりません. その場合のスペクトラルゼータ関数は多重方向の一般化というよりむしろ非正則な一般化とみる方が (少なくとも紹介した具体例においては) 正しそうに思われたからです.

(2) また, 一般の GL$(n,\mathbb{C})$-表現の場合の設定にいくつか誤りがありましたので (1) と合わせてより詳しいことは論文 ([KL]) をご確認いただけると幸いです.

謝辞

この度は発表の機会をいただきオーガナイザーの方々に感謝いたします.

参考文献

[AS] S. Axelrod and I. M. Singer, *Chern-Simons perturbation theory*, In: Proceedings of the XXth International Conference on Differential Geometric Methods in Theoretical Physics, Vol. 1, 2 (New York, 1991), 3–45, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1992.

[BNW] D. Bar-Natan and E. Witten, *Perturbative expansion of Chern-Simons theory with noncompact gauge group*, Comm. Math. Phys. **141** (1991), no. 2, 423–440.

[BGV] N. Berline, E. Getzler and M. Vergne, Heat kernels and Dirac operators, Grundlehren Text Editions, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[BZ] J.-M. Bismut and W. Zhang, *An extension of a theorem by Cheeger and Müller*, Astérisque No. 205 (1992).

[Bu] U. Buke, *Lectures on analytic torsion*, available at `https://www.uni-regensburg.de/Fakultaeten/nat_Fak_I/Bunke/sixtorsion.pdf`.

[Ch1] J. Cheeger, *Analytic torsion and Reidemeister torsion*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **74** (1977), no. 7, 2651–2654.

[Ch2] J. Cheeger, *Analytic torsion and the heat equation*, Ann. of Math. (2) **109** (1979), no. 2, 259–322.

[De1] C. Deninger, *Local L-factors of motives and regularized determinants*, Invent. Math. **107** (1992), no. 1, 135–150.

[De2] C. Deninger, *Motivic L-functions and regularized determinants*, In: Motives (Seattle, WA, 1991), 707–743, Proc. Sympos. Pure Math., 55, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[De3] C. Deninger, *Dynamical systems for arithmetic schemes*, preprint, arXiv:1807.06400.

[F] K. Fukaya, *Morse homotopy and Chern-Simons perturbation theory*, Comm. Math. Phys. **181** (1996), no. 1, 37–90.

[KoNo] S. Kobayashi and K. Nomizu, Foundations of differential geometry. Vol. I, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1996.

[KL] H. Kodani and B. Liu, in preparation.

[Ku] 黒川信重, 現代三角関数論, 岩波書店, 2013.

[Ma] Y. Manin, *Lectures on zeta functions and motives (according to Deninger and Kurokawa)*, Astérisque No. 228 (1995), 4, 121–163.

[Mi] J. Milnor, *Whitehead torsion*, Bull. Amer. Math. Soc. **72** (1966), 358–426.

[MP] S. Minakshisundaram and Å. Pleijel, *Some properties of the eigenfunctions of the Laplace-operator on Riemannian manifolds*, Canadian J. Math. **1** (1949), 242–256.

[Mo] M. Morishita, Knots and primes, Universitext. Springer, London, 2012.

[M1] W. Müller, *Analytic torsion and R-torsion of Riemannian manifolds*, Adv. in Math. **28** (1978), no. 3, 233–305.

[M2] W. Müller, *Analytic torsion and R-torsion for unimodular representations*, J. Amer. Math. Soc. **6** (1993), no. 3, 721–753.

[Ra] D. B. Ray, *Reidemeister torsion and the Laplacian on lens spaces*, Advances in Math. **4** (1970), 109–126.

[RaSi] D. B. Ray, I. M. Singer, *R-torsion and the Laplacian on Riemannian manifolds*, Advances in Math. **7** (1971), 145–210.

[S] R. T. Seeley, *Complex powers of an elliptic operator*, In: Singular Integrals (Proc. Sympos. Pure Math., Chicago, Ill., 1966), 288–307, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1967.