古典的楕円関数と保型微分方程式について

中屋 智瑛 (九州大学)

概 要

本稿では第 13 回福岡数論研究集会における筆者の講演に基づき, ある保型微分方程式の保型形式解の母関数の (形式的) 逆級数と, 古典的な楕円関数 (Weierstrass, Jacobi, Dixon) との関係を与える.

1 導入

本研究の背景には, 代数幾何における楕円種数 (elliptic genus) の理論がある. 本稿の主題から離れてしまうために, また筆者の能力の問題から理論の詳細は参考文献に譲るが, 始めに本研究に取り組むようになったきっかけを紹介したい.

レベル 2 の楕円種数 φ_2 の「対数」$g(x)$ は次の第 1 種楕円積分で与えられる [9, 6, 13]:

$$g(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-2\delta_A t^2 + \varepsilon_A t^4}} = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_2(\mathbb{C}P^{2n}) \frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \tag{1.1}$$

ここで δ_A, ε_A は各々, 合同部分群 $\Gamma_0(2)$ に関する重さ 2,4 の保型形式である. 被積分関数の Taylor 展開を項別積分することで, 値 $\varphi_2(\mathbb{C}P^{2n})$ が $\Gamma_0(2)$ に関する重さ $2n$ の保型形式であることが分かる. Landweber は [6, 7] において $\varphi_2(\mathbb{C}P^{2n})$ が, 古典的直交多項式の一つである Legendre 多項式 $P_n(x)$ により表示されることを指摘した:

$$\varphi_2(\mathbb{C}P^{2n}) = \varepsilon_A^{n/2} P_n\left(\frac{\delta_A}{\sqrt{\varepsilon_A}}\right). \tag{1.2}$$

良く知られているように, Legendre 多項式は以下のような超幾何多項式表示を持つ:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\binom{2n}{n} x^n {}_2F_1\left(-\frac{n}{2}, -\frac{n-1}{2}; -n+\frac{1}{2}; \frac{1}{x^2}\right). \tag{1.3}$$

したがって (1.3) において $x = \delta_A/\sqrt{\varepsilon_A}$ とおき, (1.2) と比較することで

$$\varphi_2(\mathbb{C}P^{2n}) = \frac{1}{2^n}\binom{2n}{n} \delta_A^n \, {}_2F_1\left(-\frac{n}{2}, -\frac{n-1}{2}; -n+\frac{1}{2}; \frac{\varepsilon_A}{\delta_A^2}\right)$$

を得る. これより係数を具体的に計算することで $\varphi_2(\mathbb{C}P^{2n}) \in \mathbb{Z}[\frac{1}{2}][\delta_A, \varepsilon_A] \subset M_*(\Gamma_0(2))$ となることも分かる.

一方で, 保型微分方程式 (Kaneko–Zagier 方程式) と呼ばれる線形常微分方程式が, Atkin 直交多項式や超特異多項式に関連して研究されてきた (例えば [5, 11] など). 筆者もまた保型微分方程式に興味を持ち研究を行っていたところ, たまたま目にした Zagier の論文 [13] にあった先述の $\varphi_2(\mathbb{C}P^{2n})$ (に対応する保型形式) が $\Gamma_0(2)$ に関する Kaneko–Zagier 方程式

$$f''(\tau) - \frac{2n+1}{2} E_2^{(2)}(\tau) f'(\tau) + \frac{2n(2n+1)}{4} E_2^{(2)}(\tau)' f(\tau) = 0$$

の保型形式解であることに気付いた．ここで $' = \frac{1}{2\pi i}\frac{d}{d\tau}$, $E_2^{(2)}(\tau) = \frac{1}{3}(4E_2(2\tau) - E_2(\tau))$ は $\Gamma_0(2)$ に関する重さ 2 の準保型形式である．更にレベル 3 の楕円種数 φ_3 の対数に関する Oehsen の先行研究 [12, Theorem 4.1] から, その対数の展開係数は Jacobi 多項式を用いて表せる保型形式であることが分かっている．彼とは異なる変数 (= 保型関数) を取ることで, その保型形式 $\varphi_3(\mathbb{C}P^n)$ が $\Gamma_0(3)$ に関する Kaneko–Zagier 方程式の保型形式解であることが分かる．

ここで少し視点を変えてみる．式 (1.1) の楕円積分の逆関数が (本質的には) Jacobi の楕円関数であることから, Jacobi の楕円関数-楕円積分-直交多項式-保型微分方程式という図式が $\Gamma_0(2)$ の場合に浮かび上がる．実は $\Gamma_0(3)$ の場合も, Dixon の楕円関数から始まる同様の図式が成り立つ．一般のレベルでこの図式が成り立つかは分からないが, 筆者の計算から少なくとも $SL_2(\mathbb{Z})$ および Fricke 群 $\Gamma_0^*(2), \Gamma_0^*(3)$ の場合に対応する楕円関数が分かっており, この点を明らかにしたのが主結果である．今のところ研究のきっかけとなった楕円種数と主結果の関係 (例えば「対数」としての解釈や, [13] に見られるような各種展開係数の意味付けなど) は不明であるが, 少なくとも Kaneko–Zagier 方程式の保型形式解の「よい」母関数はこれまで考察されてこなかったから, その点に限っても意味はあると考える．

2 記号の準備

2.1 保型形式, 楕円関数

本節では種々の記号の定義を行う．基本的には参考文献の記号を流用しているが, 文献間で用法が異なる場合もあるため参照するときは注意されたい．また, 中には証明が必要な事柄もあるが紙幅の都合上省略する．以下, 記号 $M_k(\Gamma)$ で群 Γ に関する重さ k の保型形式全体のなす $\mathbb{C}$ ベクトル空間を表す．まず偶数 $k \geq 2$ に対して Eisenstein 級数を以下で定める:

$$G_k(\tau) = -\frac{B_k}{2k} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{d|n} d^{k-1}\right) q^n = -\frac{B_k}{2k}E_k(\tau) \quad (q = e^{2\pi i\tau}).$$

ここで τ は Poincaré 上半平面 $\mathfrak{H}$ の変数, B_k は k 番目の Bernoulli 数を表す．4 以上の偶数 k に対して, $E_k(\tau)$ は $SL_2(\mathbb{Z})$ に関する重さ k の保型形式である．一方で $E_2(\tau)$ は変換性が崩れるため保型形式ではなく, 準保型形式と呼ばれる．続いて $SL_2(\mathbb{Z}), \Gamma_0(2), \Gamma_0(3), \Gamma_0^*(2), \Gamma_0^*(3)$ に関する保型形式, 保型関数を列挙する (詳細は [10, 11] を参照のこと).

$$\begin{aligned}
\Delta(\tau) &= \eta(\tau)^{24} = \frac{E_4(\tau)^3 - E_6(\tau)^2}{1728},\\
H_2(\tau) &= 2E_2(2\tau) - E_2(\tau), \quad \Delta_2(\tau) = \frac{\eta(2\tau)^{16}}{\eta(\tau)^8},\\
I_3(\tau) &= 1 + 6\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{d|n}\left(\frac{d}{3}\right)\right) q^n, \quad \Delta_3(\tau) = \frac{\eta(3\tau)^9}{\eta(\tau)^3},\\
E_{4,2}(\tau) &= H_2(\tau)^2, \quad E_{6,2}(\tau) = H_2(\tau)(H_2(\tau)^2 - 128\Delta_2(\tau)),\\
\Delta_{2A}(\tau) &= \Delta_2(\tau)\left(H_2(\tau)^2 - 64\Delta_2(\tau)\right),\\
E_{4,3}(\tau) &= I_3(\tau)^4, \quad E_{6,3}(\tau) = I_3(\tau)^3(I_3(\tau)^3 - 54\Delta_3(\tau)),\\
\Delta_{3A}(\tau) &= \left(I_3(\tau)^3 - 27\Delta_3(\tau)\right)\Delta_3(\tau),\\
j(\tau) &= \frac{E_4(\tau)^3}{\Delta(\tau)}, \quad j_2(\tau) = \frac{H_2(\tau)^2}{\Delta_2(\tau)}, \quad j_3(\tau) = \frac{I_3(\tau)^3}{\Delta_3(\tau)},
\end{aligned}$$

$$j_2^*(\tau)=\frac{j_2(\tau)^2}{j_2(\tau)-64},\quad j_3^*(\tau)=\frac{j_3(\tau)^2}{j_3(\tau)-27}.$$

楕円関数については主に [1] の記号に従う．Weierstrass $\wp$ 関数 $\wp(\theta)=\wp(\theta,\tau)=\wp(\theta\,;\Lambda)$ を以下で定める:

$$\wp(\theta):=\frac{1}{\theta^2}+\sum_{\substack{\omega\in\Lambda\\ \omega\neq 0}}\left(\frac{1}{(\theta-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}\right)=\frac{1}{\theta^2}-2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nG_{2n+2}(\tau)\frac{\theta^{2n}}{(2n)!}.$$

ここで $\Lambda=\mathbb{Z}\cdot 2\pi+\mathbb{Z}\cdot 2\pi\tau$ である．この設定の下で $\wp$ 関数は次の微分方程式を満たす:

$$\left(\frac{d}{d\theta}\wp(\theta)\right)^2=4\wp(\theta)^3-\frac{E_4(\tau)}{12}\wp(\theta)-\frac{E_6(\tau)}{216},\quad \frac{d^2}{d\theta^2}\wp(\theta)=6\wp(\theta)^2-\frac{E_4(\tau)}{24}. \tag{2.1}$$

したがってよく知られているように, $(X,Y)=(\wp(\theta),\frac{d}{d\theta}\wp(\theta))$ が楕円曲線の Weierstrass 標準形 $Y^2=4X^3-g_2X-g_3$ をパラメトライズする．さらに関数 $s(\theta)=s(\theta,\tau)$ を以下の無限積で定める:

$$s(\theta):=2\sin\frac{\theta}{2}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-e^{i\theta}q^n)(1-e^{-i\theta}q^n)}{(1-q^n)^2}.$$

$s(\theta)$ の満たす変換公式は

$$s(\theta,\tau)=\tau\exp\left[\frac{\theta^2}{4\pi i\tau}\right]s\left(\frac{\theta}{\tau},\frac{-1}{\tau}\right). \tag{2.2}$$

$s(\theta)$ は本質的には Witten 種数の特性べき級数の逆数と等しい ([13, Eq.(14)], [2, p.83] を参照のこと)．また $s(\theta)$ と Weierstrass σ 関数 $\sigma(\theta)=\sigma(\theta,\tau)$ との関係は

$$\sigma(\theta,\tau)=\exp\left[\frac{E_2(\tau)}{24}\theta^2\right]s(\theta,\tau).$$

関数 $s(\theta)$ を用いて定めた以下の関数 ϕ_A,ϕ_S は楕円関数である:

$$\phi_A(\theta,\tau):=\frac{s(\theta,\tau)}{s(\theta,2\tau)^2},\quad \phi_S(\theta,\tau):=\frac{s(2\theta,2\tau)}{2s(\theta,\tau)^2}.$$

$s(\theta)$ を用いて定義したことから, 無限積表示に注目して周期や零点・極の情報を読み取るのは容易である．なお添字 A,S は楕円種数の用語に由来するもので, A は $\hat{A}$-genus, S は符号指数 (Signature) を意味する．両者は本質的には同じ関数であって, $\Gamma_0(2)\backslash\mathfrak{H}$ の cusp $0,\infty$ の入れ替えで移りあう事に注意する．実際, 変換公式 (2.2) から以下が成り立つ:

$$\begin{aligned}\phi_A\left(\frac{\theta}{\tau},\frac{-1}{2\tau}\right)&=\frac{s(\frac{\theta}{\tau},\frac{-1}{2\tau})}{s(\frac{\theta}{\tau},2\cdot\frac{-1}{2\tau})^2}=\frac{1}{2\tau}\exp\left[-\frac{\theta^2}{2\pi i\tau}\right]s(2\theta,2\tau)\cdot\tau^2\exp\left[\frac{\theta^2}{2\pi i\tau}\right]s(\theta,\tau)^{-2}\\&=\tau\frac{s(2\theta,2\tau)}{2s(\theta,\tau)^2}=\tau\phi_S(\theta,\tau).\end{aligned}$$

さらに, Liouville の定理を用いる典型的な手法より, ϕ_A,ϕ_S の満たす微分方程式を得る:

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{d\theta}\phi_A(\theta)\right)^2&=\phi_A(\theta)^4-\frac{1}{4}H_2(\tau)\phi_A(\theta)^2+\Delta_2(\tau)\\&=\phi_A(\theta)^4+2\delta_A\phi_A(\theta)^2+\varepsilon_A,\end{aligned}$$

$$\left(\frac{d}{d\theta}\phi_S(\theta)\right)^2 = \phi_S(\theta)^4 + \frac{1}{2}H_2(\tau)\phi_S(\theta)^2 + \frac{1}{16}(H_2(\tau)^2 - 64\Delta_2(\tau))$$
$$= \phi_S(\theta)^4 + 2\delta_S\phi_S(\theta)^2 + \varepsilon_S.$$

したがって ϕ_A あるいは ϕ_S は楕円曲線の標準形の一つである Jacobi quartic curve $Y^2 = X^4 + 2aX^2 + b$ をパラメトライズしている. なお, Jacobi の楕円関数との関係であるが,

$$\mathrm{sn}(u,k) = u - \frac{1+k^2}{3!}u^3 + \cdots, \quad k = k(\tau) : \text{elliptic modulus}$$

の変数を適当に置き換え, さらに逆数を取ったものが ϕ_A あるいは ϕ_S に対応する. Jacobi の楕円関数と直交多項式の関係は古典的な研究対象であって多くの先行研究が存在するが, 着眼点が本稿と比較的近い本として [8] を挙げておく.

続いて Dixon の楕円関数 $\mathrm{sm}^*(\theta), \mathrm{cm}^*(\theta)$ を定義する:

$$\mathrm{sm}^*(\theta) = \mathrm{sm}^*(\theta,\tau) := \frac{s(\theta,\tau)}{s(\theta+\frac{2\pi}{3},\tau)}, \quad \mathrm{cm}^*(\theta) = \mathrm{cm}^*(\theta,\tau) := \frac{s(\frac{2\pi}{3}-\theta,\tau)}{s(\theta+\frac{2\pi}{3},\tau)}.$$

前述の $\phi_A(\theta)$ と Jacobi sn 関数の関係と同様, $\mathrm{sm}^*(\theta), \mathrm{cm}^*(\theta)$ と Dixon が研究を行った楕円関数は若干異なるが, 本質的には同じものである. これらの楕円関数は以下の関係式を満たす:

$$\mathrm{sm}^*(\theta)^3 + \mathrm{cm}^*(\theta)^3 - \frac{3I_3(\tau)}{(I_3(\tau)^3 - 27\Delta_3(\tau))^{1/3}}\,\mathrm{sm}^*(\theta)\mathrm{cm}^*(\theta) - 1 = 0.$$

したがって $\mathrm{sm}^*(\theta), \mathrm{cm}^*(\theta)$ は楕円曲線の Hesse 標準形 $X^3+Y^3+3\gamma XY-1=0$ をパラメトライズしている. さらに変数 θ を調整したのち Laurent 展開を正規化して, 楕円関数 $\mathcal{S}(\theta), \mathcal{C}(\theta)$ を定める:

$$\mathcal{S}(\theta) := -s\left(\frac{2\pi}{3},\tau\right)^{-1}\mathrm{sm}^*\left(\theta - \frac{2\pi}{3},\tau\right) = \frac{1}{\theta} + \cdots,$$
$$\mathcal{C}(\theta) := s\left(\frac{2\pi}{3},\tau\right)^{-1}\mathrm{cm}^*\left(\theta - \frac{2\pi}{3},\tau\right) = \frac{1}{\theta} + \cdots.$$

これらは関係式 $\mathcal{C}(\theta) = -\mathcal{S}(-\theta)$ を満たす. また $\mathcal{S}(\theta), \mathcal{C}(\theta)$ の満たす微分方程式は

$$\frac{d}{d\theta}\mathcal{S}(\theta) = -\mathcal{C}(\theta)^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}I_3(\tau)\mathcal{S}(\theta), \quad \frac{d}{d\theta}\mathcal{C}(\theta) = -\mathcal{S}(\theta)^2 - \frac{\sqrt{3}}{3}I_3(\tau)\mathcal{C}(\theta). \tag{2.3}$$

2.2 超幾何級数, 直交多項式

超幾何級数 ${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)$ を以下で定める:

$${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n}\frac{x^n}{n!}.$$

ここで $(\alpha)_0 = 1$, $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)$ $(n \geq 1)$ である. これより α または β が負整数のとき ${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)$ は x に関する多項式となる.

定義 2.1. 微分方程式 $L(f) = 0$ が群 Γ (with cusps) に関する保型微分方程式であるとは, 微分作用素 L が $\mathbb{C}[M_*(\Gamma), \partial]$ の斉次元であることをいう. ここで $M_k(\Gamma)$ の元は次数 k, 微分作用素 (いわゆる “Serre 微分”) $\partial_k : M_k(\Gamma) \to M_{k+2}(\Gamma)$ の次数は 2 とみなす.

例 2.2. ($\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ の場合) $\partial_k = \frac{1}{2\pi i}\frac{d}{d\tau} - \frac{k}{12}E_2(\tau) : M_k(SL_2(\mathbb{Z})) \to M_{k+2}(SL_2(\mathbb{Z}))$, $L = \partial_{k+2}\circ\partial_k - \frac{k(k+2)}{144}E_4$ は次数 4 である.

上の例で挙げた微分作用素を用いた保型微分方程式 $(\partial_{k+2}\circ\partial_k - \frac{k(k+2)}{144}E_4)f(\tau) = 0$ を展開すると

$$f''(\tau) - \frac{k+1}{6}E_2(\tau)f'(\tau) + \frac{k(k+1)}{12}E_2'(\tau)f(\tau) = 0 \tag{2.4}$$

となるが, これは Kaneko-Zagier による超特異多項式・Atkin 直交多項式の研究 [5] に現れた $SL_2(\mathbb{Z})$ に関する保型微分方程式 (Kaneko-Zagier 方程式) である. また Sakai によるレベル 2,3 の Fricke 群 $\Gamma_0^*(2), \Gamma_0^*(3)$ に関する Atkin 直交多項式の研究 [10] に現れた保型微分方程式は

$$f''(\tau) - \frac{k+1}{4}E_{2,2}(\tau)f'(\tau) + \frac{k(k+1)}{8}E_{2,2}'(\tau)f(\tau) = 0, \tag{2.5}$$

$$f''(\tau) - \frac{k+1}{3}E_{2,3}(\tau)f'(\tau) + \frac{k(k+1)}{6}E_{2,3}'(\tau)f(\tau) = 0 \tag{2.6}$$

である. ここで $E_{2,2}(\tau) := \frac{1}{3}(2E_2(2\tau) + E_2(\tau))$, $E_{2,3}(\tau) := \frac{1}{4}(3E_2(3\tau) + E_2(\tau))$ は各々 $\Gamma_0^*(2)$, $\Gamma_0^*(3)$ に関する重さ 2 の準保型形式である. これらの微分方程式は本質的には超幾何微分方程式であって, 以下が成り立つ.

命題 2.3. (1) 保型微分方程式 (2.4) の $SL_2(\mathbb{Z})$ に関する重さ k の保型形式解は

$$F_k(\tau) = \begin{cases} E_4(\tau)^{\frac{k}{4}}{}_2F_1\left(-\frac{k}{12}, -\frac{k-4}{12}; -\frac{k-5}{6}; \frac{1728}{j(\tau)}\right) \\ \qquad \text{for } k \equiv 0, 4 \pmod{12}, \\ E_4(\tau)^{\frac{k-6}{4}}E_6(\tau){}_2F_1\left(-\frac{k-6}{12}, -\frac{k-10}{12}; -\frac{k-5}{6}; \frac{1728}{j(\tau)}\right) \\ \qquad \text{for } k \equiv 6, 10 \pmod{12}. \end{cases}$$

(2) 保型微分方程式 (2.5) の $\Gamma_0(2)$ に関する重さ k の保型形式解は

$$F_k^{(2*)}(\tau) = \begin{cases} E_{4,2}(\tau)^{\frac{k}{4}}{}_2F_1\left(-\frac{k}{8}, -\frac{k-2}{8}; -\frac{k-3}{4}; \frac{256}{j_2^*(\tau)}\right) \\ \qquad \text{for } k \equiv 0, 2 \pmod{8}, \\ E_{4,2}(\tau)^{\frac{k-6}{4}}E_{6,2}(\tau){}_2F_1\left(-\frac{k-6}{8}, -\frac{k-4}{8}; -\frac{k-3}{4}; \frac{256}{j_2^*(\tau)}\right) \\ \qquad \text{for } k \equiv 4, 6 \pmod{8}. \end{cases}$$

(3) 保型微分方程式 (2.6) の $\Gamma_0(3)$ に関する重さ k の保型形式解は

$$F_k^{(3*)}(\tau) = \begin{cases} E_{4,3}(\tau)^{\frac{k}{4}}{}_2F_1\left(-\frac{k}{6}, -\frac{k-1}{6}; -\frac{k-2}{3}; \frac{108}{j_3^*(\tau)}\right) \\ \qquad \text{for } k \equiv 0, 1 \pmod{6}, \\ E_{4,3}(\tau)^{\frac{k-6}{4}}E_{6,3}(\tau){}_2F_1\left(-\frac{k-4}{6}, -\frac{k-3}{6}; -\frac{k-2}{3}; \frac{108}{j_3^*(\tau)}\right) \\ \qquad \text{for } k \equiv 3, 4 \pmod{6}. \end{cases}$$

さて, これらの保型形式 $F_k(\tau), F_k^{(2*)}(\tau), F_k^{(3*)}(\tau)$ は Gegenbauer 多項式 $C_n^\nu(x)$ $(n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$

$$C_n^\nu(x) := \frac{2^n\Gamma(n+\nu)}{n!\,\Gamma(\nu)}x^n{}_2F_1\left(-\frac{n}{2}, -\frac{n-1}{2}; -n+1-\nu; \frac{1}{x^2}\right)$$

を用いて表示できる. 簡単のため

$$x_1(\tau) := \sqrt{1-\frac{j(\tau)}{1728}},\quad x_2(\tau) := \sqrt{1-\frac{j_2^*(\tau)}{256}},\quad x_3(\tau) := \sqrt{1-\frac{j_3^*(\tau)}{108}}$$

とおくとき以下が成り立つ. 証明は省略する.

命題 2.4. (1) 偶数 $k=12m+6\varepsilon+4\delta$, $k\not\equiv 2 \pmod 3$ ($m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\varepsilon,\delta\in\{0,1\}$) に対して

$$(-1728\Delta(\tau))^{m+\frac{\varepsilon}{2}}E_4(\tau)^{\delta}\,C_{2m+\varepsilon}^{\frac{4\delta+1}{6}}(x_1(\tau)) = 2^{2m+\varepsilon}\binom{\frac{k-5}{6}}{2m+\varepsilon}F_k(\tau).$$

(2) 偶数 $k=8m+4\nu+2\varepsilon$ ($m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\nu,\varepsilon\in\{0,1\}$) に対して

$$(-256\Delta_{2A}(\tau))^{m+\frac{\nu}{2}}H_2(\tau)^{\varepsilon}\,C_{2m+\nu}^{\frac{2\varepsilon+1}{4}}(x_2(\tau)) = 2^{2m+\nu}\binom{\frac{k-3}{4}}{2m+\nu}F_k^{(2*)}(\tau).$$

(3) 整数 $k=6m+3\lambda+\mu$, $k\not\equiv 2 \pmod 3$ ($m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\lambda,\mu\in\{0,1\}$) に対して

$$(-108\Delta_{3A}(\tau))^{m+\frac{\lambda}{2}}I_3(\tau)^{\mu}\,C_{2m+\lambda}^{\frac{\mu+1}{3}}(x_3(\tau)) = 2^{2m+\lambda}\binom{\frac{k-2}{3}}{2m+\lambda}F_k^{(3*)}(\tau).$$

これらの直交多項式による表示を用いて, 保型形式 $F_k(\tau), F_k^{(2*)}(\tau), F_k^{(3*)}(\tau)$ の母関数を考える. よく知られている Gegenbauer 多項式 $C_n^{\nu}(x)$ の母関数としては

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{\nu}(x)t^n = (1-2xt+t^2)^{-\nu}$$

が挙げられる. しかし今回は比較的なじみの薄い

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\nu+\frac{1}{2})_n}{(2\nu)_n}C_n^{\nu}(x)t^n = \frac{1}{R}\left(\frac{1-xt+R}{2}\right)^{\frac{1}{2}-\nu} \tag{2.7}$$

を用いる. ここで $R=(1-2xt+t^2)^{\frac{1}{2}}$ である (前者の母関数では, 楕円関数との関係を見出せなかった). 後者の母関数 (2.7) は Jacobi 多項式

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!}{}_2F_1\left(-n, n+\alpha+\beta+1;\,\alpha+1;\,\frac{1-x}{2}\right)$$

の母関数

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)t^n = \frac{1}{R}\left(\frac{1-t+R}{2}\right)^{-\alpha}\left(\frac{1+t+R}{2}\right)^{-\beta}$$

の特別な場合にあたる. 実際, Gegenbauer 多項式 $C_n^{\nu}(x)$ は Jacobi 多項式 $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ において パラメータを $\alpha=\beta=\nu-\frac{1}{2}$ としたもの

$$P_n^{(\nu-\frac{1}{2},\nu-\frac{1}{2})}(x) = \frac{(\nu+\frac{1}{2})_n}{(2\nu)_n}C_n^{\nu}(x)$$

であり, $\frac{1}{4}(1-t+R)(1+t+R)=\frac{1}{2}(1-xt+R)$ に注意すると (2.7) を得る.

3 主定理

3.1 $SL_2(\mathbb{Z})$ の場合

偶数 $k = 12m + 6\varepsilon + 4\delta$, $k \not\equiv 2 \pmod 3$ ($m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\varepsilon, \delta \in \{0, 1\}$) に対し,

$$c_k := (-1)^{\delta+\varepsilon} 2^{-\frac{2}{3}(k+2\delta)} 3^{-\frac{k}{2}} \binom{\frac{k-2}{6}}{2m+\varepsilon} \binom{\frac{k-5}{6}}{2m+\varepsilon} \binom{\frac{k-4}{6} + \frac{2\delta}{3}}{2m+\varepsilon}^{-1},$$
$$R_1(y) := \left(1 + \frac{E_6(\tau)}{432} y^6 - \frac{\Delta(\tau)}{432} y^{12}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad V_1(y) := \frac{1}{2}\left(1 + \frac{E_6(\tau)}{864} y^6 + R_1(y)\right)$$

と定める. Gegenbauer 多項式の母関数 (2.7) と命題 2.4 より以下を得る.

命題 3.1 (Generating function)**.**

$$\sum_{\substack{k \geq 0 : \text{even} \\ k \not\equiv 2 \bmod 3}} c_k F_k(\tau) y^k = \frac{1}{R_1(y)} \left(V_1(y)^{\frac{1}{3}} - \frac{E_4(\tau)}{144} y^4 V_1(y)^{-\frac{1}{3}}\right). \tag{3.1}$$

定理 3.2. 形式的べき級数 $y = f(\theta) = f(\theta, \tau) = \theta + \cdots \in M_*(SL_2(\mathbb{Z}))[\![\theta]\!]$ を

$$f(\theta) := \left(-\frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \wp(\theta)\right)^{-\frac{1}{3}}$$

と定める. このとき $f(\theta)$ の形式的逆級数 $\theta = g(y) = g(y, \tau) = y + \cdots \in M_*(SL_2(\mathbb{Z}))[\![y]\!]$ は保型微分方程式 (2.4) の保型形式解 $F_k(\tau)$ の母関数となる:

$$g(y) = \sum_{\substack{k \geq 0 : \text{even} \\ k \not\equiv 2 \bmod 3}} c_k F_k(\tau) \frac{y^{k+1}}{k+1}.$$

Proof. まず $\wp$ 関数の満たす二つの微分方程式 (2.1) から $\wp(\theta)$ を消去することで

$$108 \left(\frac{d}{d\theta} \wp(\theta)\right)^4 + E_6(\tau) \left(\frac{d}{d\theta} \wp(\theta)\right)^2 - 4\Delta(\tau) - 8 \left(\frac{d^2}{d\theta^2} \wp(\theta)\right)^3 + E_4(\tau) \left(\frac{d^2}{d\theta^2} \wp(\theta)\right)^2 = 0.$$

さらに変数変換 $\frac{d}{d\theta} \wp(\theta) = -2f(\theta)^{-3}$ を行うと,

$$432 + E_6(\tau) f(\theta)^6 - \Delta(\tau) f(\theta)^{12} - 432 \left(\frac{d}{d\theta} f(\theta)\right)^3 + 9E_4(\tau) f(\theta)^4 \left(\frac{d}{d\theta} f(\theta)\right)^2 = 0.$$

$y = f(\theta)$ の逆級数を $\theta = g(y)$ とおくと, $\frac{d}{d\theta} f(\theta) = \left(\frac{d}{dy} g(y)\right)^{-1}$ より

$$432 + E_6(\tau) y^6 - \Delta(\tau) y^{12} - 432 \left(\frac{d}{dy} g(y)\right)^{-3} + 9E_4(\tau) y^4 \left(\frac{d}{dy} g(y)\right)^{-2} = 0.$$

整理すると

$$\left(R_1(y) \frac{d}{dy} g(y)\right)^3 + \frac{E_4(\tau) y^4}{48} \left(R_1(y) \frac{d}{dy} g(y)\right) - R_1(y) = 0.$$

ここで $R_1(y)$ は前に定めた通り．この微分方程式を $X=R_1(y)\frac{d}{dy}g(y)$ に関する三次方程式とみて解く．さて, 三次方程式 $X^3+aX+b=0$ を Cardano の方法で解くと

$$\begin{aligned} X &= \left(-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{a^3}{27}+\frac{b^2}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(-\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{a^3}{27}+\frac{b^2}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \left(-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{a^3}{27}+\frac{b^2}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{a}{3}\left(-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{a^3}{27}+\frac{b^2}{4}}\right)^{-\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

が解の一つである (その他の解は上記 X の表示一行目を $\alpha+\beta$ とおくとき $\omega\alpha+\omega^2\beta$ および $\omega^2\alpha+\omega\beta$. ここで $\omega=e^{2\pi i/3}$. 仮にこれらの解を選んだとしても, 影響は係数 c_k がずれるだけである). a に $E_4(\tau)y^4/48$ を, b に $-R_1(y)$ を代入すると,

$$\frac{a^3}{27}+\frac{b^2}{4} = \frac{E_4^3}{144^3}y^{12}+\frac{1}{4}\left(1+\frac{E_6(\tau)}{432}y^6-\frac{\Delta(\tau)}{432}y^{12}\right) = \frac{1}{4}\left(1+\frac{E_6}{864}y^6\right)^2.$$

したがって

$$R_1(y)\frac{d}{dy}g(y) = \left(\frac{1+\frac{1}{864}E_6(\tau)y^6+R_1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{E_4(\tau)y^4}{144}\left(\frac{1+\frac{1}{864}E_6(\tau)y^6+R_1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}.$$

両辺を $R_1(y)$ で割ると, $\frac{d}{dy}g(y)$ は (3.1) の右辺に等しい．定理の主張は更に両辺を y に関して積分することで得られる． □

直交多項式の母関数 (= ある代数関数) の積分 (“楕円積分”) の形式的逆級数と楕円関数の関係:

$$\theta = g(y) = \int_0^y \frac{1}{R_1(t)}\left(V_1(t)^{\frac{1}{3}} - \frac{E_4(\tau)}{144}t^4V_1(t)^{-\frac{1}{3}}\right)dt \iff -\frac{1}{2}\frac{d}{d\theta}\wp(\theta) = \frac{1}{y^3} = \frac{1}{f(\theta)^3}.$$

実は定理 3.2 は, 本質的には Kaneko-Zagier [5] による以下の定理と同値になる．ただし我々と彼らでは $\wp$ 関数と $F_k(\tau)$ の正規化の仕方が異なるため, その見た目は若干異なる．

定理 3.3 (Kaneko-Zagier, “Generating function”)**.** 偶数 $k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, $k\not\equiv 2 \pmod 3$ および任意の α に対し $G_{k,\alpha}(\tau)$ を $\left(1-\frac{1}{48}E_4(\tau)X^4-\frac{1}{864}E_6(\tau)X^6\right)^{\alpha}$ の級数展開における X^k の係数とする．このとき

$$G_{k,\frac{k-2}{6}}(\tau) = c_kF_k(\tau).$$

Proof. $G_{k,\alpha}(\tau)$ の定義より

$$\begin{aligned} G_{k,\frac{k-2}{6}}(\tau) &\overset{\text{def}}{=} \text{coeff. of } X^k \text{ in } \left(1-\frac{1}{48}E_4(\tau)X^4-\frac{1}{864}E_6(\tau)X^6\right)^{\frac{k-2}{6}} \\ &= \operatorname*{Res}_{X=0}\frac{1}{X^{k+1}}\left(1-\frac{1}{48}E_4(\tau)X^4-\frac{1}{864}E_6(\tau)X^6\right)^{\frac{k-2}{6}}dX. \end{aligned}$$

変数変換 $X=(\wp(\theta,\tau))^{-1/2}$ より $dX=-\frac{1}{2}\wp(\theta)^{-3/2}\frac{d}{d\theta}\wp(\theta)d\theta$ となるから

$$G_{k,\frac{k-2}{6}}(\tau) = \operatorname*{Res}_{\theta=0}\left(\wp(\theta)^3-\frac{E_4(\tau)}{48}\wp(\theta)-\frac{E_6(\tau)}{864}\right)^{\frac{k-2}{6}}\frac{-1}{2}\frac{d}{d\theta}\wp(\theta)d\theta$$

$$= \operatorname*{Res}_{\theta=0}\left(\frac{-1}{2}\frac{d}{d\theta}\wp(\theta)\right)^{\frac{k+1}{3}} d\theta.$$

$\frac{d}{d\theta}\wp(\theta) = -2f(\theta)^{-3}$ とおき $y = f(\theta)$ の逆級数を $\theta = g(y)$ とすると

$$G_{k,\frac{k-2}{6}}(\tau) = \operatorname*{Res}_{\theta=0}\frac{d\theta}{f(\theta)^{k+1}} = \operatorname*{Res}_{y=0}\frac{1}{y^{k+1}}\frac{dg}{dy}dy = \text{coeff. of } y^k \text{ in } \frac{dg}{dy}.$$

□

上の定理では $G_{k,\alpha}(\tau)$ の α の部分も k に依存しているから, k 毎に母関数を取り換えていることに注意する. そのため "Generating function" と書いている.

3.2 $\Gamma_0^*(2)$ の場合

偶数 $k = 8m + 4\nu + 2\varepsilon$ ($m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\nu, \varepsilon \in \{0, 1\}$) に対し

$$c_k^{(2*)} := 2^{-k-\varepsilon}\binom{\frac{k-1}{4}}{2m+\nu}\binom{\frac{k-3}{4}}{2m+\nu}\binom{\frac{k-2}{4}+\frac{\varepsilon}{2}}{2m+\nu}^{-1},$$

$$R_2(y) := \left(1 - \frac{H_2(\tau)^2 - 128\Delta_2(\tau)}{16}y^4 - \frac{\Delta_{2A}(\tau)}{4}y^8\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$V_2(y) := \frac{1}{2}\left(1 - \frac{H_2(\tau)^2 - 128\Delta_2(\tau)}{32}y^4 + R_2(y)\right)$$

と定める. Gegenbauer 多項式の母関数 (2.7) と命題 2.4 より以下を得る.

命題 3.4 (Generating function)**.**

$$\sum_{k\geq 0\,:\,\text{even}} c_k^{(2*)}F_k^{(2*)}(\tau)y^k = \frac{1}{R_2(y)}\left(V_2(y)^{\frac{1}{4}} + \frac{H_2(\tau)}{8}y^2V_2(y)^{-\frac{1}{4}}\right).$$

定理 3.5. 形式的べき級数 $y = f_2(\theta) = f_2(\theta, \tau) = \theta + \cdots \in M_*(\Gamma_0(2))[\![\theta]\!]$ を

$$f_2(\theta) := \left(-\frac{d}{d\theta}\phi_S(\theta)\right)^{-\frac{1}{2}}$$

と定める. このとき $f_2(\theta)$ の形式的逆級数 $\theta = g_2(y) = g_2(y, \tau) = y + \cdots \in M_*(\Gamma_0(2))[\![y]\!]$ は保型微分方程式 (2.5) の保型形式解 $F_k^{(2*)}(\tau)$ の母関数となる:

$$g_2(y) = \sum_{k\geq 0\,:\,\text{even}} c_k^{(2*)}F_k^{(2*)}(\tau)\frac{y^{k+1}}{k+1}.$$

証明方針は $SL_2(\mathbb{Z})$ の場合と同様で, $\phi_S(\theta)$ の満たす微分方程式からある四次方程式 $X^4 + aX^2 + b = 0$ を導き, Cardano like に解けばよい. 詳細は省略する.

直交多項式の母関数 (= ある代数関数) の積分 ("楕円積分") の形式的逆級数と楕円関数の関係:

$$\theta = g_2(y) = \int_0^y \frac{1}{R_2(t)}\left(V_2(t)^{\frac{1}{4}} + \frac{H_2(\tau)}{8}t^2V_2(t)^{-\frac{1}{4}}\right)dt \iff -\frac{d}{d\theta}\phi_S(\theta) = \frac{1}{y^2} = \frac{1}{f_2(\theta)^2}.$$

定理 3.5 の同値な言い換えは以下の通り.

定理 3.6 ("Generating function"). 偶数 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ および任意の α に対し $G^{(2*)}_{k,\alpha}(\tau)$ を

$$\left(1 + \frac{1}{2}H_2(\tau)X^2 + \frac{1}{16}(H_2(\tau)^2 - 64\Delta_2(\tau))X^4\right)^{\alpha}$$

の級数展開における X^k の係数とする．このとき

$$G^{(2*)}_{k,\frac{k-1}{4}}(\tau) = c^{(2*)}_k F^{(2*)}_k(\tau).$$

3.3 $\Gamma_0^*(3)$ の場合

整数 $k = 6m + 3\lambda + \mu$, $k \not\equiv 2 \pmod 3$ ($m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\lambda, \mu \in \{0, 1\}$) に対し

$$\begin{aligned}
c^{(3*)}_k &:= 2^{2(2m+\lambda)} 3^{-\frac{k}{2}} \binom{\frac{2k-1}{6}}{2m+\lambda} \binom{\frac{k-2}{3}}{2m+\lambda} \binom{\frac{k-1}{3} + \frac{\mu}{3}}{2m+\lambda}^{-1}, \\
R_3(y) &:= \left(1 - \frac{4\sqrt{3}\left(I_3(\tau)^3 - 54\Delta_3(\tau)\right)}{9} y^3 - 16\Delta_{3A}(\tau) y^6\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(1 + 12\sqrt{3}\Delta_3(\tau) y^3\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{4\sqrt{3}\left(I_3(\tau)^3 - 27\Delta_3(\tau)\right)}{9} y^3\right)^{\frac{1}{2}}, \\
V_3(y) &:= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2\sqrt{3}\left(I_3(\tau)^3 - 54\Delta_3(\tau)\right)}{9} y^3 + R_3(y)\right)
\end{aligned}$$

と定める．Gegenbauer 多項式の母関数 (2.7) と命題 2.4 より以下を得る．

命題 3.7 (Generating function).

$$\sum_{\substack{k \geq 0 \\ k \not\equiv 2 \bmod 3}} c^{(3*)}_k F^{(3*)}_k(\tau) y^k = \frac{1}{R_3(y)}\left(V_3(y)^{\frac{1}{6}} + \frac{\sqrt{3}}{3} I_3(\tau) y V_3(y)^{-\frac{1}{6}}\right).$$

非常に天下り的であるが, 楕円関数 $\mathcal{P}(\theta) = \mathcal{P}(\theta, \tau)$ を以下で定める:

$$\mathcal{P}(\theta) := \mathcal{C}(\theta)^{-3}\left\{\mathcal{C}(\theta)^3 + \frac{\sqrt{3}}{9}\left(I_3(\tau)^3 - 27\Delta_3(\tau)\right)\right\}^2 = \frac{1}{\theta^3} + \cdots.$$

このとき微分方程式 (2.3) より

$$\mathcal{P}(\theta) = \mathcal{S}(\theta)^{-2}\mathcal{C}(\theta)^{-3}\left\{\mathcal{C}(\theta)\left(\frac{d^2}{d\theta^2}\mathcal{C}(\theta)\right) - \left(\frac{d}{d\theta}\mathcal{C}(\theta)\right)^2\right\}^2 \tag{3.2}$$

という表示を得る．さらに $\mathcal{C}(\theta)$ の倍角公式を用いると, $\mathcal{P}(\theta)$ の無限積表示も分かる:

$$\mathcal{P}(\theta) = \frac{27 s(\theta, \tau) s(2\theta, \tau)^2}{s(3\theta, 3\tau)^3} \mathcal{S}(\theta)\mathcal{C}(2\theta, \tau)^2.$$

定理 3.8. 形式的べき級数 $y = f_3(\theta) = f_3(\theta,\tau) = \theta + \cdots \in M_*(\Gamma_0(3))[\![\theta]\!]$ を $f_3(\theta) := \mathcal{P}(\theta)^{-\frac{1}{3}}$ と定める．このとき $f_3(\theta)$ の形式的逆級数 $\theta = g_3(y) = g_3(y,\tau) = y + \cdots \in M_*(\Gamma_0(3))[\![y]\!]$ は保型微分方程式 (2.6) の保型形式解 $F_k^{(3*)}(\tau)$ の母関数となる:

$$g_3(y) = \sum_{\substack{k\geq 0 \\ k\not\equiv 2 \bmod 3}} c_k^{(3*)} F_k^{(3*)}(\tau) \frac{y^{k+1}}{k+1}.$$

証明方針は $SL_2(\mathbb{Z})$ の場合と同様で, $\mathcal{P}(\theta)$ の満たす微分方程式 (導出の際には微分方程式 (2.3) と (3.2) から $\mathcal{S}(\theta), \mathcal{C}(\theta)$ を消去する) からある六次方程式 $X^6 + aX^4 + \frac{a^2}{4}X^2 + b = 0$ を導き, Cardano like に解けばよい．詳細は省略する．

直交多項式の母関数 (= ある代数関数) の積分 (“楕円積分”) の形式的逆級数と楕円関数の関係:

$$\theta = g_3(y) = \int_0^y \frac{1}{R_3(t)} \left(V_3(t)^{\frac{1}{6}} + \frac{\sqrt{3}}{3} I_3(\tau) t V_3(t)^{-\frac{1}{6}} \right) dt \iff \mathcal{P}(\theta) = \frac{1}{y^3} = \frac{1}{f_3(\theta)^3}.$$

定理 3.8 の同値な言い換えは以下の通り．

定理 3.9 (“Generating function”)**.** 整数 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $k \not\equiv 2 \pmod 3$ および任意の α に対し $G_{k,\alpha}^{(3*)}(\tau)$ を

$$\left(1 + \sqrt{3} I_3(\tau) X - 12\sqrt{3}\Delta_3(\tau) X^3\right)^{\alpha} \left(1 - \tfrac{\sqrt{3}}{3} I_3(\tau) X\right)^{-\frac{1}{2}}$$

の級数展開における X^k の係数とする．このとき

$$G_{k,\frac{2k-1}{6}}^{(3*)}(\tau) = c_k^{(3*)} F_k^{(3*)}(\tau).$$

$SL_2(\mathbb{Z}), \Gamma_0^*(2)$ の場合と比較して, “Generating function” の形が若干異なることに注意する．

4 今後の課題

いくつかの研究方向が考えられるが, いずれにしても母関数の不定性が問題である．すなわち係数 c_k を非常に巧妙に選択したときのみ, 考えたい関数 $F_k(\tau)$ の母関数

$$\sum_k c_k F_k(\tau) y^k$$

は数学的に「よい」性質を持つが, その選択基準は曖昧である．本稿の主結果は直交多項式の母関数 (これも無数にある) を一つ選び, それを基準に係数 c_k を定めている．以下, 今後の課題を列挙する．

- レベル N の楕円種数の「対数」とレベル N の (主) 合同部分群に関する Kaneko-Zagier 方程式の保型形式解との関係を探る．N が大きいとき, もはや超幾何多項式では表せない．例えばレベル $5, 7$ では Heun 多項式が現れる．それらの母関数?
- 準保型形式解 (超幾何多項式では表示できない) の「よい」母関数を探す.
- $SL_2(\mathbb{Z})$ に関する Kaneko-Zagier 方程式はレベル $2, 3, 4, 5$ の保型形式解を持つ ([4, 3]). それらの母関数?
- Kaneko-Zagier 方程式の階数を上げ, その保型形式解の母関数を考える．

謝辞

第 13 回福岡数論研究集会世話人の金子昌信先生, 權寧魯先生, 岸康弘先生に, 今回の講演機会を与えていただいた事をこの場をお借りして感謝いたします.

参考文献

[1] S. Cooper, Ramanujan's theta functions. Springer, Cham, 2017.

[2] F. Hirzebruch, T. Berger, and R. Jung, Manifolds and modular forms, Aspects of Mathematics, E20, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1992.

[3] M. Kaneko, *On modular forms of weight* $(6n+1)/5$ *satisfying a certain differential equation*, In: Number theory, 97–102. Springer, New York, 2006.

[4] M. Kaneko and M. Koike, *On modular forms arising from a differential equation of hypergeometric type*, Ramanujan J. **7** (2003), no. 1-3, 145–164.

[5] M. Kaneko and D. Zagier, *Supersingular j-invariants, hypergeometric series, and Atkin's orthogonal polynomials*, In: Computational perspectives on number theory (Chicago, IL, 1995), 97–126, AMS/IP Stud. Adv. Math., 7, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.

[6] P. S. Landweber, *Elliptic cohomology and modular forms*. In: Elliptic curves and modular forms in algebraic topology (Princeton, NJ, 1986), 55–68, Lecture Notes in Math., 1326, Springer, Berlin, 1988.

[7] P. S. Landweber, *Supersingular elliptic curves and congruences for Legendre polynomials*, In: Elliptic curves and modular forms in algebraic topology (Princeton, NJ, 1986), 69–93, Lecture Notes in Math., 1326, Springer, Berlin, 1988.

[8] J. S. Lomont and J. Brillhart, Elliptic polynomials, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2001.

[9] S. Ochanine, *Sur les genres multiplicatifs définis par des intégrales elliptiques*, Topology, **26** (1987), no. 2, 143–151.

[10] Y. Sakai, *The Atkin orthogonal polynomials for the low-level Fricke groups and their application*, Int. J. of Number Theory **7** (2011), no. 6, 1637–1661.

[11] Y. Sakai and K. Shimizu, *Modular differential equations with regular singularities at elliptic points for the Hecke congruence subgroups of low-levels*, Math. J. Okayama Univ. **57** (2015), 1–12.

[12] J. B. von Oehsen, *Elliptic genera of level N and Jacobi polynomials*, Proc. Amer. Math. Soc. **122** (1994), no. 1, 303–312.

[13] D. Zagier, *Note on the Landweber-Stong elliptic genus*, In: Elliptic curves and modular forms in algebraic topology (Princeton, NJ, 1986), 216–224, Lecture Notes in Math., 1326, Springer, Berlin, 1988.