シャッフル型対称多重ゼータ値の級数表示

小野 雅隆 (九州大学)

はじめに

本稿は, 筆者が 2019 年 8 月 8 日に第 13 回福岡数論研究集会で行った講演の内容をまとめたものである. 本稿の主役である対称多重ゼータ値は, Kaneko-Zagier 予想によって有限多重ゼータ値と対をなす, 多重ゼータ値の変種の 1 つである. 対称多重ゼータ値は, 多重ゼータ値全体が生成する $\mathbb{Q}$-代数 $\mathcal{Z}$ を $\zeta(2)$ が生成するイデアル $\zeta(2)\mathcal{Z}$ で割った商代数 $\mathcal{Z}/\zeta(2)\mathcal{Z}$ の元として定義される. その際 2 種類の正規化多重ゼータ値を用いて $\mathcal{Z}$ の元 $\zeta_{\mathcal{S}}^{*}(\boldsymbol{k})$ および $\zeta_{\mathcal{S}}^{ш}(\boldsymbol{k})$ を定義するが, $\mathcal{Z}/\zeta(2)\mathcal{Z}$ の中では同じ元を定めることが知られている. タイトルのシャッフル型対称多重ゼータ値とは $\zeta_{\mathcal{S}}^{ш}(\boldsymbol{k})$ のことである. Kontsevich の示唆による有限多重ゼータ値との類似性を通じて, $\zeta_{\mathcal{S}}^{*}(\boldsymbol{k})$ についてはある種の級数表示が Kaneko-Zagier によって知られていた (定理 2.1). 慶應義塾大学の山本修司氏との共同研究によって, $\zeta_{\mathcal{S}}^{ш}(\boldsymbol{k})$ についても類似の級数表示が存在することがわかったので, 本稿でこれを紹介する. 第 1 節ではイントロとして, 対称多重ゼータ値が世に出るきっかけとなった Kaneko-Zagier 予想を紹介する. 第 2 節で主定理の主張を, 第 3 節で証明を紹介する. また第 4 節で主定理の応用を紹介する.

約束

インデックスとは r 個の正整数の組 $\boldsymbol{k}=(k_1,\dots,k_r)$ のことを指す. r は 0 以上の整数である. $r=0$ の場合は正整数の組 $(k_1,\dots,k_0)$ がただ一つ存在する, と理解する. これを空インデックスと呼び $\varnothing$ と表す. インデックス $\boldsymbol{k}=(k_1,\dots,k_r)$ が admissible であるとは, $r=0$ の場合, および $r\geq 1$ かつ $k_r>1$ の場合を指す. インデックス $\boldsymbol{k}=(k_1,\dots,k_r)$ に対し $k_1+\cdots+k_r$, r をそれぞれ $\boldsymbol{k}$ の重さ, 深さと呼び, それぞれ $\mathrm{wt}(\boldsymbol{k}), \mathrm{dep}(\boldsymbol{k})$ と表す. $\mathrm{wt}(\varnothing)=0, \mathrm{dep}(\varnothing)=0$ である.

1 イントロダクション –Kaneko-Zagier 予想と対称多重ゼータ値–

Kaneko-Zagier 予想とは, 「有限多重ゼータ値」が生成する $\mathbb{Q}$-代数と「多重ゼータ値」が生成する $\mathbb{Q}$-代数の関係を示唆する予想である. この節では Kaneko-Zagier 予想を正確に主張することを目標に, 関連する諸概念を紹介する.

1.1 多重ゼータ値

定義 1.1. $\boldsymbol{k}=(k_1,\dots,k_r)$ を admissible インデックスとする. このとき, 実数

$$\zeta(\boldsymbol{k}) := \sum_{0<n_1<\cdots<n_r} \frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}} \tag{1}$$

を多重ゼータ値と呼ぶ.

$\boldsymbol{k}$ が admissible インデックスなので (1) の右辺は収束し, 定義が意味を持つ. 右辺は正確には

$$\lim_{M\to\infty}\zeta_M(\boldsymbol{k}) := \lim_{M\to\infty}\sum_{0<n_1<\cdots<n_r<M}\frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}} \tag{2}$$

である.

多重ゼータ値全体が生成する $\mathbb{R}$ の部分 $\mathbb{Q}$-ベクトル空間を $\mathcal{Z}$ と表す. $\mathcal{Z}$ は通常の $\mathbb{R}$ の積で $\mathbb{Q}$-代数をなすことが知られている. つまり多重ゼータ値の積を和に表せるのだが, その方法は 2 通り知られている. これを説明するため, [2] に従い調和代数の記号を導入しよう.

1.2 多重ゼータ値の代数的取り扱い

$\mathfrak{H} := \mathbb{Q}\langle e_0, e_1\rangle$ を e_0, e_1 を変数とする $\mathbb{Q}$ 上の 2 変数非可換多項式環とし, $\mathfrak{H}^1 := \mathbb{Q} + e_1\mathfrak{H} \supset \mathfrak{H}^0 := \mathbb{Q} + e_1\mathfrak{H}e_0$ をそれぞれ部分 $\mathbb{Q}$-代数とする. $\mathfrak{H}^1 = \mathbb{Q}\langle e_k \mid k \geq 1\rangle$ が知られている. ただし $e_k := e_1e_0^{k-1}$. $\mathbb{Q}$-線型写像 $Z\colon \mathfrak{H}^0 \to \mathbb{R}$ を $Z(1) := 1, Z(e_{k_1}\cdots e_{k_r}) := \zeta(k_1,\ldots,k_r)$ と定義する. ここで $(k_1,\ldots,k_r)$ は admissible インデックス. 同様に正整数 M に対し $\mathbb{Q}$-線型写像 $Z_M\colon \mathfrak{H}^1 \to \mathbb{Q}$ を $Z_M(1) := 1, Z_M(e_{k_1}\cdots e_{k_r}) := \zeta_M(k_1,\ldots,k_r)$ と定義する. ただし $(k_1,\ldots,k_r)$ はインデックス.

$\mathfrak{H}^1$ 上の $\mathbb{Q}$-双線型な二項演算 $*\colon \mathfrak{H}^1\times\mathfrak{H}^1\to\mathfrak{H}^1$ を, 以下のルールによって帰納的に定義する:

1. 任意の $w\in\mathfrak{H}^1$ に対し $w*1 = 1*w = w$.
2. 任意の $w_1, w_2\in\mathfrak{H}^1$ と任意の $k, l\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し $(w_1e_k)*(w_2e_l) = (w_1*w_2e_l)e_k + (w_1e_k*w_2)e_l + (w_1*w_2)e_{k+l}$.

$*$ によって $\mathfrak{H}^1$ は可換な $\mathbb{Q}$-代数になり, $\mathfrak{H}^0$ は $\mathfrak{H}^1$ の可換な部分 $\mathbb{Q}$-代数になることが知られている [2].

同様に $\mathfrak{H}$ 上の $\mathbb{Q}$-双線型な二項演算 $ш\colon \mathfrak{H}\times\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}$ を, 以下のルールによって帰納的に定義する:

1. 任意の $w\in\mathfrak{H}$ に対し $w\,ш\,1 = 1\,ш\,w = w$.
2. 任意の $w_1, w_2\in\mathfrak{H}$ と任意の $u_1, u_2\in\{e_0, e_1\}$ に対し $(w_1u_1)\,ш\,(w_2u_2) = (w_1\,ш\,w_2u_2)u_1 + (w_1u_1\,ш\,w_2)u_2$.

$ш$ によって $\mathfrak{H}^1$ は可換な $\mathbb{Q}$-代数になり, $\mathfrak{H}^0$ は $\mathfrak{H}^1$ の可換な部分 $\mathbb{Q}$-代数になることが知られている [8].

重要なことは, $*$ は Z および Z_M によって, $ш$ は Z によってそれぞれ保たれることである. つまり

$$Z(w\,ш\,w') = Z(w)Z(w'),\quad Z(w*w') = Z(w)Z(w')$$

が $w, w'\in\mathfrak{H}^0$ に対して成り立ち,

$$Z_M(w*w') = Z_M(w)Z_M(w')$$

が $w, w'\in\mathfrak{H}^1$ および $M\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して成り立つ.

さらに $\mathcal{R}$ をインデックス全体が生成する $\mathbb{Q}$-ベクトル空間, $\mathcal{R}^0$ を admissible インデックス全体が生成する $\mathcal{R}$ の部分 $\mathbb{Q}$-ベクトル空間とする．すると $\mathbb{Q}$-ベクトル空間として $\mathcal{R} \cong \mathfrak{H}^1$, $\mathcal{R}^0 \cong \mathfrak{H}^0$ である．この同型を通じて $\mathcal{R}, \mathcal{R}^0$ に調和積・シャッフル積を導入する．すると admissible インデックス $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{l}$ に対し

$$\zeta(\boldsymbol{k} * \boldsymbol{l}) = \zeta(\boldsymbol{k})\zeta(\boldsymbol{l}), \quad \zeta(\boldsymbol{k} ш \boldsymbol{l}) = \zeta(\boldsymbol{k})\zeta(\boldsymbol{l})$$

が成り立つ．ただし右辺の ζ は $\mathbb{Q}$-線型写像 $\zeta\colon \mathcal{R}^0 \to \mathbb{R}$ を表す．それぞれ多重ゼータ値の調和関係式・シャッフル関係式と呼ばれる．一般には $\boldsymbol{k} * \boldsymbol{l} \neq \boldsymbol{k} ш \boldsymbol{l}$ であるので, これが多重ゼータ値の積を和に表す 2 通りの方法である．

同様にインデックス $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{l}$ と正整数 M に対し, 調和関係式

$$\zeta_M(\boldsymbol{k} * \boldsymbol{l}) = \zeta_M(\boldsymbol{k})\zeta_M(\boldsymbol{l}) \tag{3}$$

が成り立つ．

注意 1.2. 調和関係式は多重ゼータ値の積の和の範囲を分割することによって得られる線形和に由来する代数関係式である．一方シャッフル関係式は, 多重ゼータ値を反復積分表示し, 積の積分領域を分割することによって得られる線形和に由来する代数関係式である．

1.3 有限多重ゼータ値

次に Kaneko-Zagier 予想の主役の一人である有限多重ゼータ値を定義する．有限多重ゼータ値は以下で定義される環 $\mathcal{A}$ に住んでいる対象である．

定義 1.3.

$$\mathcal{A} := \prod_p \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \Big/ \bigoplus_p \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{(a_p)_p \mid a_p \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}/\sim$$

とおく．ただし p は有理素数全てをわたる．また $(a_p)_p, (b_p)_p \in \prod_p \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ に対し, 有限個を除く全ての素数 p に対し $a_p = b_p$ であるとき $(a_p)_p \sim (b_p)_p$ と表す．

注意 1.4. p 成分毎の演算により $\mathcal{A}$ は環となる．また有理数 r と素数 p に対し

$$r_p := \begin{cases} r \bmod p & (r \text{ の分母}, p) = 1 \text{ のとき}, \\ 0 & (r \text{ の分母}, p) \neq 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

と定義すると, 写像 $f\colon \mathbb{Q} \to \mathcal{A}; r \mapsto (r_p)_p$ は単射な環準同型になる．これにより $\mathcal{A}$ は $\mathbb{Q}$-代数となる．

定義 1.5. インデックス $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ に対し, $\mathcal{A}$ の元

$$\zeta_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{k}) := \left(\sum_{0<n_1<\cdots<n_r<p} \frac{1}{n_1^{k_1} \cdots n_r^{k_r}} \bmod p \right)_p$$

を有限多重ゼータ値と呼ぶ．

有限多重ゼータ値全体が生成する $\mathcal{A}$ の部分 $\mathbb{Q}$-ベクトル空間を $\mathcal{Z}_{\mathcal{A}}$ と表す．(3) により有限多重ゼータ値は調和関係式を満たす．つまりインデックス $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{l}$ に対し

$$\zeta_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{k} * \boldsymbol{l}) = \zeta_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{k})\zeta_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{l})$$

が成り立つ．これより $\mathcal{Z}_{\mathcal{A}}$ も $\mathbb{Q}$-代数になる．

1.4 Kaneko-Zagier 予想

Kaneko-Zagier 予想とは次の予想である.

予想 1.6. 次を満たす well-defined な $\mathbb{Q}$-代数の準同型 $\phi_{\mathrm{KZ}}\colon \mathcal{Z}_{\mathcal{A}} \to \mathcal{Z}/\zeta(2)\mathcal{Z}$ が存在する:

1. 任意のインデックス $\boldsymbol{k}$ に対し $\phi_{\mathrm{KZ}}\bigl(\zeta_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{k})\bigr) = \zeta_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{k})$ が成り立つ.
2. ϕ_{KZ} は $\mathbb{Q}$-代数の同型である.

注意 1.7. この予想は非常に難しい予想だと思われている. 例えば写像の well-definedness ですら知られていない. また, この予想が正しいとすると, この予想を通じて他の難しい予想が結びつく. 例えば $\zeta_{\mathcal{A}}(1,2) = (B_{p-3})_p$, $\zeta_{\mathcal{S}}(1,2) = \zeta(3) \bmod \zeta(2)\mathcal{Z}$ が知られている. ここで B_n は n 番目の Bernoulli 数である. Kaneko-Zagier 予想が正しいとすると, $\phi_{\mathrm{KZ}}(\zeta_{\mathcal{A}}(1,2)) = \zeta_{\mathcal{S}}(1,2)$ である. 実は無限個の素数 p に対して $B_{p-3} \not\equiv 0 \pmod p$ が予想されている. これは $\zeta_{\mathcal{A}}(1,2) \neq 0$ と言い換えられるが, 未解決である (より強く, $\zeta_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{k}) \neq 0$ となるようなインデックス $\boldsymbol{k} \neq \varnothing$ は見つかっていない！). 一方 $\zeta(3)$ は π べきの有理数倍で書けるかどうか知られていない. もし Kaneko-Zagier 予想が正しいとすると, $B_{p-3} \not\equiv 0 \pmod p$ なる素数 p の無限性と, $\zeta(3)$ が $\zeta(2)$ の, 特に π^2 べきの有理数倍で書けないことが同値であることがわかる.

このように Kaneko-Zagier 予想が正しいと仮定すると, ある種の素数の無限性と Riemann ゼータの奇数値の情報が等価になる. このような現象は極めて興味深い.

この Kaneko-Zagier 予想によって $\zeta_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{k})$ の像となることが予想されるのが対称多重ゼータ値 $\zeta_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{k})$ である. $\zeta_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{k})$ は Kaneko-Zagier 予想の成立と無関係に定義することができる.

1.5 正規化多重ゼータ値と対称多重ゼータ値

定義 1.8. インデックス $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ と $\bullet \in \{*, ш\}$ に対し

$$\zeta_{\mathcal{S}}^{\bullet}(\boldsymbol{k}) := \sum_{i=0}^{r} (-1)^{k_{i+1}+\cdots+k_r} \zeta^{\bullet}(k_1, \ldots, k_i)\zeta^{\bullet}(k_r, \ldots, k_{i+1})$$

とおく. $\zeta_{\mathcal{S}}^{ш}(\boldsymbol{k})$ (resp. $\zeta_{\mathcal{S}}^{*}(\boldsymbol{k})$) をシャッフル型 (resp. 調和型) 対称多重ゼータ値と呼ぶ.

ここで $\zeta^{\bullet}(\boldsymbol{k})$ は $\bullet$-正規化多重ゼータ値と呼ばれる多重ゼータ値の一般化である. 以下, これを定義しよう.

積 $\bullet \in \{*, ш\}$ が定まっている可換 $\mathbb{Q}$-代数 $\mathfrak{H}^1, \mathfrak{H}^0$ を, それぞれ $\mathfrak{H}^1_{\bullet}, \mathfrak{H}^0_{\bullet}$ と表す. このとき $\mathbb{Q}$-代数の同型 $\mathfrak{H}^1_{\bullet} \cong \mathfrak{H}^0_{\bullet}[e_1]$ が知られている ($*$ については [2], ш については [8]). したがって $\bullet \in \{*, ш\}$ およびインデックス $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ に対し $\mathfrak{H}^1_{\bullet}$ の元 $e_{k_1} \cdots e_{k_r}$ は

$$e_{k_1} \cdots e_{k_r} = \sum_{i=0}^{n^{\bullet}} w_i^{\bullet}(\boldsymbol{k}) e_1^{\bullet i}$$

と一意的に表せる. ただし $n^{\bullet} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, w_i^{\bullet}(\boldsymbol{k}) \in \mathfrak{H}^0_{\bullet}$ である. そこで $\bullet$-正規化多重ゼータ値 $\zeta^{\bullet}(\boldsymbol{k})$ を

$$\zeta^{\bullet}(\boldsymbol{k}) := Z(w_0^{\bullet}(\boldsymbol{k}))$$

と定義する.

$\boldsymbol{k}$ が admissible インデックスならば $\zeta^{\bullet}(\boldsymbol{k}) = \zeta(\boldsymbol{k})(= Z(e_{k_1}\cdots e_{k_r}))$ であることが定義から直ちに従う．また $\zeta^{\bullet}$ は積 $\bullet$ を保つ $\mathbb{Q}$-線型写像であること知られている．つまりインデックス $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{l}$ に対し

$$\zeta^{*}(\boldsymbol{k} * \boldsymbol{l}) = \zeta^{*}(\boldsymbol{k})\zeta^{*}(\boldsymbol{l}), \qquad \zeta^{ш}(\boldsymbol{k} \,ш\, \boldsymbol{l}) = \zeta^{ш}(\boldsymbol{k})\zeta^{ш}(\boldsymbol{l})$$

が成り立つ．

話を $\zeta^{\bullet}_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{k})$ に戻そう．正規化多重ゼータ値の定義より $\zeta^{\bullet}_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{k}) \in \mathcal{Z}$ であるが，実は $\zeta^{*}_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{k}) - \zeta^{ш}_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{k}) \in \zeta(2)\mathcal{Z}$ が知られている．つまり $\zeta^{*}_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{k}) \equiv \zeta^{ш}_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{k}) \bmod \zeta(2)\mathcal{Z}$ である．

定義 1.9. インデックス $\boldsymbol{k}$ に対し，$\mathcal{Z}/\zeta(2)\mathcal{Z}$ の元

$$\zeta_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{k}) := \zeta^{\bullet}_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{k}) \bmod \zeta(2)\mathcal{Z}$$

を対称多重ゼータ値と呼ぶ．($\bullet$ は $*, ш$ のどちらでも良いことに注意する.)

予想 1.6 が成立すると信じるならば，住んでいる空間が全く異なる 2 つの対象 $\zeta_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{k}), \zeta_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{k})$ が，全く同一の $\mathbb{Q}$ 上の代数関係式を満たすことになる．これは非常に興味深い．

2 主定理 –$\zeta^{ш}_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{k})$ の級数表示–

この節では主定理である $\zeta^{ш}_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{k})$ の級数表示を述べる．$\zeta^{*}_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{k})$ の級数表示はすでに Kaneko-Zagier によって知られていた．

定理 2.1 (Kaneko-Zagier, 例えば [4, (9.1)])**.** インデックス $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ と正整数 M に対し，

$$\zeta^{*}_{\mathcal{S},M}(\boldsymbol{k}) := \sum_{i=0}^{r} \sum_{\substack{0<n_1<\cdots<n_i<M \\ -M<n_{i+1}<\cdots<n_r<0}} \frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}}$$

とおく．このとき

$$\zeta^{*}_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{k}) = \lim_{M\to\infty} \zeta^{*}_{\mathcal{S},M}(\boldsymbol{k})$$

が成り立つ．

注意 2.2. $\mathbb{Z} \cup \{\infty“=”-\infty\}$ に次のような順序 $\prec$ を導入する．

$$0 \prec 1 \prec 2 \prec \cdots \prec \infty“=”-\infty \prec \cdots \prec -2 \prec -1 \prec 0.$$

このとき実は

$$\zeta^{*}_{\mathcal{S},M}(\boldsymbol{k}) = \sum_{\substack{n_1\prec\cdots\prec n_r \\ 0<|n_1|,\ldots,|n_r|<M}} \frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}}$$

が成り立つ ($n_1 \prec \cdots \prec n_r$ のどこに $\infty = -\infty$ を挟むかでバラすと定理 2.1 の形に変形できる)．つまり定理 2.1 は

$$\zeta^{*}_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{k}) = \lim_{M\to\infty} \sum_{\substack{n_1\prec\cdots\prec n_r \\ 0<|n_1|,\ldots,|n_r|<M}} \frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}}$$

と書き直せる．この表示は多重ゼータ値の無限級数による定義 (2) によく似ており，示唆的である．またこの表示によって $\zeta^{*}_{\mathcal{S},M}(\boldsymbol{k})$ および $\zeta^{*}_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{k})$ が調和関係式を満たすことが，通常の多重ゼータ値の場合と全く同様に証明することができる．詳しくは [4] を参照してほしい．

次の $\zeta_{\mathcal{S}}^{ш}(\boldsymbol{k})$ の級数表示が本稿の主定理である.

定理 2.3 (主定理, O.-Yamamoto)**.** インデックス $\boldsymbol{k}=(k_1,\ldots,k_r)$ と正整数 M に対し,

$$\zeta_{\mathcal{S},M}^{ш}(\boldsymbol{k}):=\sum_{i=0}^{r}\sum_{\substack{0<n_1<\cdots<n_i\\ n_{i+1}<\cdots<n_r<0\\ n_i-n_{i+1}<M}}\frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}}$$

とおく. このとき

$$\zeta_{\mathcal{S}}^{ш}(\boldsymbol{k})=\lim_{M\to\infty}\zeta_{\mathcal{S},M}^{ш}(\boldsymbol{k})$$

が成り立つ.

注意 2.4. 注意 1.2 でも述べたように, ш は 2 つの多重ゼータ値を反復積分表示し, それらの積の積分領域を分割することで多重ゼータ値の和に分ける過程を抽象化したものである. 多重ゼータ値の反復積分表示に由来する量 $\zeta_{\mathcal{S}}^{ш}(\boldsymbol{k})$ が, 上記のような級数表示を持つことは興味深い.

3 証明の概略 –部分分数分解–

この節では主定理の証明を述べる. まず $i+1\le j\le r$ に対し $n_j\mapsto -n_j$ と変数変換することで,

$$\zeta_{\mathcal{S},M}^{ш}(\boldsymbol{k})=\sum_{i=0}^{r}(-1)^{k_{i+1}+\cdots+k_r}\sum_{\substack{0<n_1<\cdots<n_i\\ 0<n_r<\cdots<n_{i+1}\\ n_i+n_{i+1}<M}}\frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}}$$

と変形できる. さらに, 内側の有限和は次のように変形できる.

命題 3.1. インデックス $\boldsymbol{k}=(k_1,\ldots,k_r)$, $0\le i\le r$ および正整数 M に対し,

$$\sum_{\substack{0<n_1<\cdots<n_i\\ 0<n_r<\cdots<n_{i+1}\\ n_i+n_{i+1}<M}}\frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}}=Z_M(e_{k_1}\cdots e_{k_i}\,ш\,e_{k_r}\cdots e_{k_{i+1}})$$

が成り立つ.

例を見てみよう.

例 3.2. $\boldsymbol{k}=(1,1,1), i=1$ の場合を考えよう. まず $e_1\,ш\,e_1e_1=3e_1e_1e_1$ なので, 命題 3.1 の右辺は

$$Z_M(e_1\,ш\,e_1e_1)=3Z_M(e_1e_1e_1)=3\zeta_M(1,1,1)$$

となる. 次に命題 3.1 の左辺を部分分数分解を用いて計算しよう. まず左辺を

$$\sum_{\substack{0<n_1\\ 0<n_3<n_2\\ n_1+n_2<M}}\frac{1}{n_1n_2n_3}=\sum_{\substack{m_1,m_2,m_3>0\\ m_1+m_2+m_3<M}}\frac{1}{m_1m_3(m_3+m_2)}$$

と書き直す. 部分分数分解

$$\frac{1}{ab}=\frac{1}{a+b}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\tag{4}$$

を $(a,b)=(m_1,m_3+m_2)$ に対して用いると

$$\frac{1}{m_1m_3(m_3+m_2)}=\frac{1}{m_1m_3(m_1+m_3+m_2)}+\frac{1}{m_3(m_3+m_2)(m_3+m_2+m_1)}$$

となる．この第 2 項から $\zeta_M(1,1,1)$ が出てくる．さらに第 1 項に部分分数分解を $(a,b)=(m_1,m_3)$ として適用すると $2\zeta_M(1,1,1)$ が出てくる．したがって

$$\sum_{\substack{0<n_1\\0<n_3<n_2\\n_1+n_2<M}}\frac{1}{n_1n_2n_3}=3\zeta_M(1,1,1)=Z_M(e_1 ш e_1e_1)$$

を得る．以上より $\boldsymbol{k}=(1,1,1), i=1$ の場合に命題 3.1 が示された．一般のインデックスと i の場合も部分分数分解 (4) を繰り返し用いることで示すことができる．詳細は [7] に譲る．

注意 3.3. 実は上述の証明は, [6, Corollary 4.1] の証明と全く同じである．[6, Corollary 4.1] は M が素数の場合の主張であるが, 証明には M が素数であることを使っていない．

$$w_{\mathcal{S}}^{ш}(\boldsymbol{k}):=\sum_{i=0}^{r}(-1)^{k_{i+1}+\cdots+k_r}e_{k_1}\cdots e_{k_i} ш e_{k_r}\cdots e_{k_{i+1}}\in\mathfrak{H}^1$$

とおく．ζ_M が $\mathbb{Q}$-線型であるので, 命題 3.1 により

$$\zeta_{\mathcal{S},M}^{ш}(\boldsymbol{k})=Z_M(w_{\mathcal{S}}^{ш}(\boldsymbol{k}))$$

となる．さらに, Kaneko-Zagier によって次が知られている．

命題 3.4 (Kaneko-Zagier, 例えば [4])**.** インデックス $\boldsymbol{k}$ に対し $w_{\mathcal{S}}^{ш}(\boldsymbol{k})\in\mathfrak{H}^0$ が成り立つ．

これより $\lim_{M\to\infty}\zeta_{\mathcal{S},M}^{ш}(\boldsymbol{k})=Z(w_{\mathcal{S}}^{ш}(\boldsymbol{k}))$ を得る．ここで $w_{\mathcal{S}}^{ш}(\boldsymbol{k})\in\mathfrak{H}^0$ なので, 正規化多重ゼータ値の性質から $Z(w_{\mathcal{S}}^{ш}(\boldsymbol{k}))=Z^{ш}(w_{\mathcal{S}}^{ш}(\boldsymbol{k}))$ である．さらに $w_{\mathcal{S}}^{ш}(\boldsymbol{k})$ の定義と, $Z^{ш}$ が ш を保つことから,

$$\begin{aligned}\lim_{M\to\infty}\zeta_{\mathcal{S},M}^{ш}(\boldsymbol{k})&=Z^{ш}\left(\sum_{i=0}^{r}(-1)^{k_{i+1}+\cdots+k_r}e_{k_1}\cdots e_{k_i} ш e_{k_r}\cdots e_{k_{i+1}}\right)\\&=\sum_{i=0}^{r}(-1)^{k_{i+1}+\cdots+k_r}Z^{ш}(e_{k_1}\cdots e_{k_i})Z^{ш}(e_{k_r}\cdots e_{k_{i+1}})\\&=\sum_{i=0}^{r}(-1)^{k_{i+1}+\cdots+k_r}\zeta^{ш}(k_1,\ldots,k_i)\zeta^{ш}(k_r,\ldots,k_{i+1})\\&=\zeta_{\mathcal{S}}^{ш}(\boldsymbol{k})\end{aligned}$$

となり, 主定理が証明された．

注意 3.5. 上述のストーリーは ш を $*$ に置き換えても成立する．すなわちインデックス $\boldsymbol{k}=(k_1,\ldots,k_r)$ に対し

$$w_{\mathcal{S}}^{*}(\boldsymbol{k}):=\sum_{i=0}^{r}(-1)^{k_{i+1}+\cdots+k_r}e_{k_1}\cdots e_{k_i}*e_{k_r}\cdots e_{k_{i+1}}$$

とおくと, ζ_M は $*$ を保つので $\zeta_{\mathcal{S},M}^{*}(\boldsymbol{k})=Z_M(w_{\mathcal{S}}^{*}(\boldsymbol{k}))$ がわかる．さらに Kaneko-Zagier により $w_{\mathcal{S}}^{*}(\boldsymbol{k})\in\mathfrak{H}^0$ が知られているので,

$$\lim_{M\to\infty}\zeta_{\mathcal{S},M}^{*}(\boldsymbol{k})=\lim_{M\to\infty}Z_M(w_{\mathcal{S}}^{*}(\boldsymbol{k}))=Z^{*}(w_{\mathcal{S}}^{*}(\boldsymbol{k}))=\zeta_{\mathcal{S}}^{*}(\boldsymbol{k})$$

となる．これは定理 2.1 の別証明になっている．

4 応用 –$\zeta_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{k})$ のシャッフル関係式–

この節では主定理の応用を述べる. 主定理は $\zeta_{\mathcal{S}}^{ш}(\boldsymbol{k})$ を有理数 $\zeta_{\mathcal{S},M}^{ш}(\boldsymbol{k})$ の極限で表すものであった. 従って $\zeta_{\mathcal{S},M}^{ш}(\boldsymbol{k})$ の間に関係式が得られれば, 極限をとることで $\zeta_{\mathcal{S}}^{ш}(\boldsymbol{k})$ の間に, さらには $\mathrm{mod}\,\zeta(2)\mathcal{Z}$ をとることで $\zeta_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{k})$ の間に関係式を得ることができる. 実際, $\zeta_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{k})$ の調和関係式はこの戦略に基づいて Kaneko-Zagier によって証明された.

実は $\zeta_{\mathcal{S},M}^{ш}(\boldsymbol{k})$ はシャッフル関係式を満たすことが知られている.

定理 4.1 ($\zeta_{\mathcal{S},M}^{ш}$ のシャッフル関係式)**.** 2 つのインデックス $\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}$ と正整数 M に対し,

$$\zeta_{\mathcal{S},M}^{ш}(\boldsymbol{k}\,ш\,\boldsymbol{l})=(-1)^{\mathrm{wt}(\boldsymbol{l})}\zeta_{\mathcal{S},M}^{ш}(\boldsymbol{k},\bar{\boldsymbol{l}})$$

が成り立つ. ただし $\boldsymbol{l}=(l_1,\ldots,l_s)$ に対し $\bar{\boldsymbol{l}}:=(l_s,\ldots,l_1)$ である.

この定理と主定理 (定理 2.3) を合わせると, $\zeta_{\mathcal{S}}^{ш}(\boldsymbol{k})$ がシャッフル関係式を満たすことが従う (いわば主定理によって $\zeta_{\mathcal{S}}^{ш}$ の世界に "戻ってくることができる"). これは Kaneko-Zagier [5] や Jarossay [3] による証明とは異なる. さらに $\mathrm{mod}\,\zeta(2)\mathcal{Z}$ をとることで, 対称多重ゼータ値のシャッフル関係式を得る. これは Hirose による証明 [1] とも異なるものである.

定理 4.2 ((シャッフル型) 対称多重ゼータ値のシャッフル関係式)**.** 2 つのインデックス $\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}$ に対し,

$$\zeta_{\mathcal{S}}^{ш}(\boldsymbol{k}\,ш\,\boldsymbol{l})=(-1)^{\mathrm{wt}(\boldsymbol{l})}\zeta_{\mathcal{S}}^{ш}(\boldsymbol{k},\bar{\boldsymbol{l}}),$$
$$\zeta_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{k}\,ш\,\boldsymbol{l})=(-1)^{\mathrm{wt}(\boldsymbol{l})}\zeta_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{k},\bar{\boldsymbol{l}})$$

が成り立つ.

注意 4.3. $\zeta_{\mathcal{S},M}^{ш}(\boldsymbol{k})$ は 2 方向への一般化が知られている. 1 つは筆者によって [6] で定義された "2 色根付き木" と呼ぶ組合せ論的な対象に対する一般化である. $\zeta_{\mathcal{S},M}^{ш}(\boldsymbol{k})$ を "2 色根付き木" に付随させることで, 筆者による有限多重ゼータ値のシャッフル関係式の別証明 [6, Corollary 4.1] と全く同様に定理 4.1 を証明することができる.

もう 1 つは, $\zeta_{\mathcal{S},M}^{ш}(\boldsymbol{k})$ を定数項にもつ形式的冪級数 $\zeta_{\widehat{\mathcal{S}},M}^{ш}(\boldsymbol{k})\in\mathbb{Q}[[t]]$ への一般化である. $\zeta_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{k})$ は, いわば "$\mathrm{mod}\,p$ を司る多重ゼータ値" と見ることができる. 実は $\mathrm{mod}\,p^n$ に対応する有限多重ゼータ値 $\zeta_{\mathcal{A}_n}(\boldsymbol{k})$, さらにはその極限に対応する有限多重ゼータ値 $\zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(\boldsymbol{k})$ が存在し, Kaneko-Zagier 予想はその極限のレベルに拡張されている. その極限のレベルで対応する $\mathcal{S}$ 側の対象が $\zeta_{\widehat{\mathcal{S}}}(\boldsymbol{k}):=\zeta_{\widehat{\mathcal{S}}}^{ш}(\boldsymbol{k})\bmod\zeta(2)\mathcal{Z}[[t]]$ である. $\zeta_{\widehat{\mathcal{S}}}^{ш}(\boldsymbol{k})$ は $\mathcal{Z}[[t]]$ の元であり, $\zeta_{\mathcal{S}}^{ш}(\boldsymbol{k})$ を定数項に持つ. $\zeta_{\widehat{\mathcal{A}}}(\boldsymbol{k})$ は [9, 10] を, $\zeta_{\widehat{\mathcal{S}}}(\boldsymbol{k})$ や Kaneko-Zagier 予想の一般化は [10] を参照してほしい.

実は定理 2.3 はこのレベルに一般化できる. つまりインデックス $\boldsymbol{k}$ に対し

$$\lim_{M\to\infty}\zeta_{\widehat{\mathcal{S}},M}^{ш}(\boldsymbol{k})=\zeta_{\widehat{\mathcal{S}}}^{ш}(\boldsymbol{k})$$

が成り立つ ($*$-版もある). さらに $\zeta_{\widehat{\mathcal{S}},M}^{ш}(\boldsymbol{k})$ は 2 色根付き木に付随させることができ, それを通じて $\zeta_{\widehat{\mathcal{S}},M}^{ш}(\boldsymbol{k})$ に対する t 進シャッフル関係式を証明することができる. 詳細は [7] で準備中である.

謝辞

末筆ではありますが, 第 13 回福岡整数論研究集会で講演の機会をくださいました世話人の金子昌信先生, 岸康弘先生, 権寧魯先生に感謝申し上げます.

参考文献

[1] M. Hirose, Double shuffle relation for refined symmetric multiple zeta values, preprint, arXiv:1807.04747.

[2] M. E. Hoffman, The algebra of multiple harmonic series, J. Algebra **194** (1997), 477–495.

[3] D. Jarossay, Double mélange des multizêtas finis et multizêtas symétrisés, C. R. Acad. Sci. Paris **352** (2014), 767–771.

[4] M. Kaneko, An introduction to classical and finite multiple zeta values, In: Publications Mathémathiques de Besançon. Algèbre et théorie des nombres, 2019, 103–129, Publ. Math. Besançon Algèbre Théorie Nr., 2019, Presses Univ. Franche-Comté, Besançon, 2019.

[5] M. Kaneko and D. Zagier, Finite multiple zeta values, in preparation.

[6] M. Ono, Finite multiple zeta values associated with 2-colored rooted trees, J. of Number Theory **181** (2017), 99–116.

[7] M. Ono, S. Seki, and S. Yamamoto, Double shuffle relation for t-adic symmetric multiple zeta values, in preparation.

[8] C. Reutenauer, Free Lie Algebras, London Mathematical Society Monographs. New Series, 7, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1993.

[9] S. Seki, Finite multiple polylogarithms, doctoral dissertation, Osaka University, 2017.

[10] 関真一朗, 「$\mathcal{F}$-有限多重ゼータ値」から「$\widehat{\mathcal{F}}$-有限多重ゼータ値」へ: ただし, $\mathcal{F} = \mathcal{A}$ or $\mathcal{S}$, 第 26 回整数論サマースクール報告集「多重ゼータ値」, 203–211, 2019.