On Hoffman's t-values of maximal height

村上 拓也 (九州大学)

概 要

Hoffman が定義し研究した多重 t 値は, 調和積の構造が入っていることから Euler Sum の $\mathbb{Q}$-線形和で表せることがすぐにわかる. 今回, 高さ最大の多重 t 値が, 多重ゼータ値の $\mathbb{Q}$-線形和で表されるという結果が得られた. 本稿ではそのことについて報告する.

1 導入

インデックス $\Bbbk = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p_{\geq 1}$ に対し, $\mathrm{wt}(\Bbbk) := k_1 + \cdots + k_p$, $\mathrm{dep}(\Bbbk) := p$, $\mathrm{ht}(\Bbbk) := \#\{\mathrm{i} \,|\, \mathrm{k_i} \geq 2\}$ をそれぞれインデックス $\Bbbk$ の重さ, 深さ, 高さと呼ぶ. はじめに, 多重ゼータ値, 多重 t 値の定義について述べる.

定義 1. インデックス $\Bbbk = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p_{\geq 1}$ $(k_p \geq 2)$ に対して, 多重ゼータ値, 多重 t 値をそれぞれ

$$\zeta(k_1, \ldots, k_p) := \sum_{0<m_1<\cdots<m_p} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_p^{k_p}} \in \mathbb{R},$$

$$t(k_1, \ldots, k_p) := \sum_{\substack{0<m_1<\cdots<m_p \\ m_1,\ldots,m_p:\mathrm{odd}}} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_p^{k_p}} \in \mathbb{R}$$

と定義する. $k_p \geq 2$ は, 多重ゼータ値や多重 t 値が収束する条件である.

次に, Euler Sum の定義について述べる.

定義 2. $(k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p_{\geq 1}$, $\epsilon_j \in \{\pm 1\}$ $((k_p, \epsilon_p) \neq (1,1))$ に対して,

$$\zeta(\epsilon_1 k_1, \ldots, \epsilon_p k_p) := \sum_{0<m_1<\cdots<m_p} \frac{\epsilon_1^{m_1} \cdots \epsilon_p^{m_p}}{m_1^{k_1} \cdots m_p^{k_p}} \in \mathbb{R}$$

と定義する. $(k_p, \epsilon_p) \neq (1,1)$ が Euler Sum が収束する条件である.

注意 1.

$$\sum_{0<m_1<\cdots<m_p} \frac{(1-(-1)^{m_1}) \cdots (1-(-1)^{m_p})}{m_1^{k_1} \cdots m_p^{k_p}}$$

を展開することで,

$$t(k_1, \ldots, k_p) = \frac{1}{2^p} \sum_{\epsilon_m \in \{\pm 1\}} \epsilon_1 \cdots \epsilon_p \zeta(\epsilon_1 k_1, \ldots, \epsilon_p k_p)$$

が得られる.

多重ゼータ値, 多重 t 値, Euler Sum で張られる $\mathbb{Q}$ 上の線型空間の予想次元については, 以下の表のようになる.

重さ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k$	1	0	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12
$\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{T}_k$	1	0	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
$\dim_{\mathbb{Q}} ES_k$	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

ここで, $\mathcal{Z}_k, \mathcal{T}_k, ES_k$ は, それぞれ重さが k の多重ゼータ値, 多重 t 値, Euler Sum で張られる $\mathbb{R}$ の部分 $\mathbb{Q}$ 線型空間とする. 多重ゼータ値の張る空間の次元に比べれば, 多重 t 値の張る空間の次元は随分大きいことがわかる.

次に, 多重積分を考える.

定義 3. $a_1, \ldots, a_n \in \{0, \pm 1\}$ で, $a_1 \neq 0$, $a_n \neq 1$ とする.

$$I(0; a_1, \ldots, a_n; 1) := \int_{0<t_1<\cdots<t_n<1} \frac{dt_1}{t_1 - a_1} \cdots \frac{dt_n}{t_n - a_n}$$

と定義する.

Euler sum はこの反復積分を用いて次のように表すことができる:

$$\zeta(\epsilon_1 n_1, \ldots, \epsilon_p n_p) = (-1)^p I(0; \eta_1, 0^{n_1-1}, \eta_2, 0^{n_2-1}, \ldots, \eta_p, 0^{n_p-1}; 1).$$

ここで, $\eta_i = \epsilon_i \cdots \epsilon_p$ である. 例えば,

$$\zeta(-2, 3, -4) = -I(0; \underbrace{1, 0}_{2}, \underbrace{-1, 0, 0}_{3}, \underbrace{-1, 0, 0, 0}_{4}; 1)$$

となる.

金子-田坂は [2] の中で, 次の (i) を示し, (ii) を予想した. そして Jin-Li は, [4] の中で, (ii) を示した.

定理 1. (i) 5 以上の奇数 N に対し,

$$\langle t(k_1, k_2) \,|\, k_1 + k_2 = N, k_i \geq 2 (i = 1, 2) \rangle_{\mathbb{Q}} \subseteq \langle \zeta(k_1, k_2) \,|\, k_1 + k_2 = N, k_2 \geq 2 \rangle_{\mathbb{Q}}.$$

(ii) 4 以上の偶数 N に対し,

$$\langle t(k_1, k_2) \,|\, k_1 + k_2 = N, k_i : \text{even } (i = 1, 2) \rangle_{\mathbb{Q}} \subseteq \langle \zeta(k_1, k_2) \,|\, k_1 + k_2 = N, k_2 \geq 2 \rangle_{\mathbb{Q}}.$$

特に, この定理は k_1, k_2 が 2 以上で, ともに奇数ではないとき, $t(k_1, k_2) \in \mathcal{Z}$ であることを示している. 今回, Glanois [3] の手法を用いることで, 次の結果が得られた. 多重ゼータ値で張られる $\mathbb{R}$ の部分 $\mathbb{Q}$ 線型空間を $\mathcal{Z}$ で表す.

定理 2 (M.)**.** $k_1, \ldots, k_p \geq 2$ に対し,

$$t(k_1, \ldots, k_p) \in \mathcal{Z}.$$

2　モチビックの準備

Glanois は, [3] の中で, $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ 上の混合テイトモチーフの理論から次のものを構成した.

- 次数付き $\mathbb{Q}$-代数 $\mathcal{H}^2$.
- 周期写像 $\mathrm{per}:\mathcal{H}^2 \twoheadrightarrow ES \subset \mathbb{R}$. ここで, ES は Euler Sum で張られる $\mathbb{R}$ の部分 $\mathbb{Q}$ 線型空間を表す.
- $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, a_1, \dots a_n \in \{0, \pm 1\}$ に対してモチビックな反復積分 $I^{\mathfrak{m}}(0; a_1, \dots, a_n; 1) \in \mathcal{H}^2$. 周期写像により $I(0; a_1, \dots, a_n; 1)$ に写される.
- $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, a_0, \dots a_{n+1} \in \{0, \pm 1\}$ に対して $I^{\mathfrak{l}}(a_0; a_1, \dots, a_n; a_{n+1}) \in \mathcal{L} := \frac{\mathcal{A}_{>0}}{\mathcal{A}_{>0} \cdot \mathcal{A}_{>0}}$. ここで, $\mathcal{A} := \mathcal{H}^2 / I^{\mathfrak{m}}(0; 1, 0; 1)\mathcal{H}^2$ とし, $\mathcal{A}_{>0}$ を $\mathcal{A}$ の重さが正の部分とする.

また, 次の事実が導かれる.

- $\mathcal{H}^2 = \langle I^{\mathfrak{m}}(0; a_1, \dots, a_n; 1) \,|\, a_i \in \{0, \pm 1\} \rangle_{\mathbb{Q}}$.
- 自然な射影 $\mathcal{H}^2_{>0} \longrightarrow \mathcal{A}_{>0} \longrightarrow \mathcal{L}$ により, $I^{\mathfrak{m}}(0; a_1, \dots, a_n; 1)$ は $I^{\mathfrak{l}}(0; a_1, \dots, a_n; 1)$ に写される.

  モチビックな反復積分について, 以下のような性質がある.

  (I1) $I^{\mathfrak{m}}(a_0; a_1) = 1,\ I^{\mathfrak{l}}(a_0; 0; a_1) = 0$.

  (I2) $I^{\mathfrak{l}}(a_0; a_1, \dots, a_n; a_{n+1}) = 0$ if $a_0 = a_{n+1},\ n > 0$.

  (I3) Path composition:

$$I^{\mathfrak{l}}(a_0; a_1, \dots, a_n; a_{n+1}) = I^{\mathfrak{l}}(a_0; a_1, \dots, a_n; x) + I^{\mathfrak{l}}(x; a_1, \dots, a_n; a_{n+1}) \qquad (x \in \{0, \pm 1\}).$$

  (I4) Path reversal:

$$I^{\mathfrak{l}}(a_0; a_1, \dots, a_n; a_{n+1}) = (-1)^n I^{\mathfrak{l}}(a_{n+1}; a_n, \dots, a_1; a_0).$$

  (I5) Homothety:

$$I^{\mathfrak{l}}(0; -a_1, \dots, -a_n; -a_{n+1}) = I^{\mathfrak{l}}(0; a_1, \dots, a_n; a_{n+1}).$$

$k_i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, \epsilon_i \in \{\pm 1\}$ に対し,

$$\zeta^{\mathfrak{m}}(\epsilon_1 k_1, \dots, \epsilon_p k_p) := (-1)^p I^{\mathfrak{m}}(0; \eta_1, 0^{k_1 - 1}, \eta_2, 0^{k_2 - 1}, \dots, \eta_p, 0^{k_p - 1}; 1) \ (\eta_i = \epsilon_i \cdots \epsilon_p)$$

とおき, これをモチビック Euler Sum とよぶ. 特にインデックスの符号がすべて正のものをモチビック多重ゼータ値とよぶ. また,

$$t^{\mathfrak{m}}(k_1, \dots, k_p) := \frac{1}{2^p} \sum_{\epsilon_m \in \{\pm 1\}} \epsilon_1 \cdots \epsilon_p \zeta^{\mathfrak{m}}(\epsilon_1 k_1, \dots, \epsilon_p k_p)$$

とおき, モチビック多重 t 値とよぶことにする.

モチビック多重ゼータ値全体の張る $\mathbb{Q}$-線型空間を $\mathcal{H}^1$ とおく.

定理 3 (Brown [1], Glanois [3])**.** 以下の式で与えられる well-defined な $\mathbb{Q}$-線形写像 $D_r : \mathcal{H}^2 \longrightarrow \mathcal{L} \otimes \mathcal{H}^2$ が存在する:

$$
\begin{aligned}
&D_r(I^{\mathfrak{m}}(a_0; a_1, \ldots, a_n; a_{n+1})) \\
&\qquad = \sum_{p=0}^{n-r} I^{\mathfrak{l}}(a_p; a_{p+1}, \ldots, a_{p+r}; a_{p+r+1}) \otimes I^{\mathfrak{m}}(a_0; a_1, \ldots, a_p, a_{p+r+1}, \ldots, a_n; a_{n+1}).
\end{aligned}
$$

右辺の 1 つの項 $I^{\mathfrak{l}}(a_p; a_{p+1}, \ldots, a_{p+r}; a_{p+r+1}) \otimes I^{\mathfrak{m}}(a_0; a_1, \ldots, a_p, a_{p+r+1}, \ldots, a_n; a_{n+1})$ を次の図のように, a_p と a_{p+r+1} を結んだ図で表すことにする:

$$a_0; a_1, \ldots, a_p, a_{p+1}, \ldots, a_{p+r}, a_{p+r+1}, \ldots, a_n; a_{n+1}$$

例えば, 具体的に次のように計算される.

1st term 3rd term

$$
\begin{aligned}
D_1(I^{\mathfrak{m}}(a_0; a_1, a_2, a_3; a_4)) &= I^{\mathfrak{l}}(a_0; a_1; a_2) \otimes I^{\mathfrak{m}}(a_0; a_2, a_3; a_4) \\
&\quad + I^{\mathfrak{l}}(a_1; a_2; a_3) \otimes I^{\mathfrak{m}}(a_0; a_1, a_3; a_4) \\
&\quad + I^{\mathfrak{l}}(a_2; a_3; a_4) \otimes I^{\mathfrak{m}}(a_0; a_1, a_2; a_4)
\end{aligned}
$$

2nd term

定理 4 (Glanois [3])**.** $\xi \in \mathcal{H}^2$ に対し,

$$\xi \in \mathcal{H}^1 \iff D_1(\xi) = 0 \text{ かつ任意の奇数 } r \text{ に対し } D_r(\xi) \in \mathcal{L} \otimes \mathcal{H}^1.$$

これらの道具を使って, 次の定理を示すことが出来る.

定理 5 (M.)**.** $k_1, \ldots, k_p \geq 2$ に対し,

$$t^{\mathfrak{m}}(k_1, \ldots, k_p) \in \mathcal{H}^1.$$

周期写像により, この定理の系として定理 2 が得られる.

3 定理 5 の証明

モチビック Euler sum, モチビック t 値の定義から, モチビック t 値がモチビックな反復積分を用いて次のように表すことができる:

$$
\begin{aligned}
t^{\mathfrak{m}}(k_1, \ldots, k_p) &= \frac{1}{2^p} \sum_{\epsilon_m \in \{\pm 1\}} \epsilon_1 \cdots \epsilon_p \zeta^{\mathfrak{m}}(\epsilon_1 k_1, \ldots, \epsilon_p k_p) \\
&= \frac{(-1)^p}{2^p} \sum_{\eta_m \in \{\pm 1\}} \eta_1 I^{\mathfrak{m}}(0; \eta_1, 0^{k_1 - 1}, \eta_2, 0^{k_2 - 1}, \ldots, \eta_p, 0^{k_p - 1}; 1).
\end{aligned}
$$

よって

$$(-1)^p 2^p t^{\mathfrak{m}}(k_1, \ldots, k_p) = \sum_{\eta_m \in \{\pm 1\}} \eta_1 I^{\mathfrak{m}}(0; \eta_1, 0^{k_1 - 1}, \eta_2, 0^{k_2 - 1}, \ldots, \eta_p, 0^{k_p - 1}; 1). \tag{1}$$

まず, $r=1$ の場合の計算を見る. $k_1,\dots,k_p\geq 2$ の仮定から, 式 (1) の右辺の反復積分の中は, 各 η_i,η_{i+1} の間に 1 つ以上の 0 が入る. $D_1(t^{\mathfrak{m}}(k_1,\dots,k_p))$ を計算すると, 各項は次の 4 つの場合がある:

(i) (iii)

$$\dots,0,\eta_{i-1},0,\eta_i,0,0,\eta_{i+1},0,\dots$$

(ii) (iv)

(i) $I^{\mathfrak{l}}(\eta_{i-1};0;\eta_i)=0$ (性質 (I1) より)

(ii) $I^{\mathfrak{l}}(0;\eta_i;0)=0$ (性質 (I2) より)

(iii) $I^{\mathfrak{l}}(\eta_i;0;0)=0$ (性質 (I1) より)

(iv) $I^{\mathfrak{l}}(0;0;\eta_{i+1})=0$ (性質 (I1) より)

よって, すべての項が 0 になるので, $D_1(t^{\mathfrak{m}}(k_1,\dots,k_p))=0$ となる.

次に r を 3 以上の奇数として, $D_r(t^{\mathfrak{m}}(k_1,\dots,k_p))$ を計算し, $\mathcal{L}\otimes\mathcal{H}^1$ の元であることを重さの帰納法により示す. 式 (1) の両辺を D_r で写すと,

$$(-1)^p 2^p D_r(t^{\mathfrak{m}}(k_1,\dots,k_p))=\sum_{\eta_m\in\{\pm1\}}\eta_1 D_r(I^{\mathfrak{m}}(0;\eta_1,0^{k_1-1},\eta_2,0^{k_2-1},\dots,\eta_p,0^{k_p-1};1))$$

となり, 右辺を計算すると, 以下の (A)〜(D) の 4 つのタイプの項に分かれる:

(C)

(A)

$$0;\eta_1,0^{k_1-1},\dots,\eta_i,0,\dots,0,\dots,0,\eta_{i+1},\dots\dots,\eta_j,0,\dots,0,\dots,0,\eta_{j+1},\dots$$

(B)

(D)

まずは (A) を計算する. 以下の計算で, ±1 の組に対し, $(\eta_{i+1},\dots,\eta_{j+1})\sim(-\eta_{i+1},\dots,-\eta_{j+1})$ で同値関係を定義している:

$$\begin{aligned}
(A)=&\sum_{\substack{1\leq i<j\leq p\\ k_i+\cdots+k_j>r+1\\ k_{i+1}+\cdots+k_j<r+1}}\ \sum_{\eta_m\in\{\pm1\}}\Bigl(\eta_1 I^{\mathfrak{l}}(0;0^{r-(k_{i+1}+\cdots+k_j)},\eta_{i+1},\dots,\eta_j,0^{k_j-1};\eta_{j+1})\\
&\otimes I^{\mathfrak{m}}(0;\eta_1,0^{k_1-1},\dots,\eta_i,0^{k_i+\cdots+k_j-r-1},\eta_{j+1},0^{k_{j+1}-1},\dots,\eta_p,0^{k_p-1};1)\Bigr)\\
=&\sum_{\substack{1\leq i<j\leq p\\ k_i+\cdots+k_j>r+1\\ k_{i+1}+\cdots+k_j<r+1}}\Biggl(\sum_{[(\eta_{i+1},\dots,\eta_{j+1})]\in\{\pm1\}^{j-i+1}/\sim} I^{\mathfrak{l}}(0;0^{r-(k_{i+1}+\cdots+k_j)},\eta_{i+1},\dots,\eta_j,0^{k_j-1};\eta_{j+1})\Biggr)\\
&\otimes\Biggl(\sum_{\substack{\eta_1,\dots,\eta_i,\\ \eta_{j+1},\dots,\eta_p\in\{\pm1\}}}\eta_1 I^{\mathfrak{m}}(0;\eta_1,0^{k_1-1},\dots,\eta_i,0^{k_i+\cdots+k_j-r-1},\eta_{j+1},0^{k_{j+1}-1},\dots,\eta_p,0^{k_p-1};1)\Biggr)\\
=&\sum_{\substack{1\leq i<j\leq p\\ k_i+\cdots+k_j>r+1\\ k_{i+1}+\cdots+k_j<r+1}}\Biggl(\sum_{[(\eta_{i+1},\dots,\eta_{j+1})]\in\{\pm1\}^{j-i+1}/\sim} I^{\mathfrak{l}}(0;0^{r-(k_{i+1}+\cdots+k_j)},\eta_{i+1},\dots,\eta_j,0^{k_j-1};\eta_{j+1})\Biggr)\\
&\otimes(-1)^{p-j+i}2^{p-j+i}t^{\mathfrak{m}}(k_1,\dots,k_{i-1},k_i+\cdots+k_j-r,k_{j+1},\dots,k_p)\quad(\text{式 (1) より})
\end{aligned}$$

$k_i + \cdots + k_j - r \geq 2$ であるから，帰納法の仮定により，$t^{\mathfrak{m}}(k_1, \ldots, k_{i-1}, k_i + \cdots + k_j - r, k_{j+1}, \ldots, k_p) \in \mathcal{H}^1$ である．よって，$(A) \in \mathcal{L} \otimes \mathcal{H}^1$ である．

(B) の計算も同様である:

$$
\begin{aligned}
(B) = & \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq p \\ k_i + \cdots + k_j > r+1 \\ k_i + \cdots + k_{j-1} < r+1}} \sum_{\eta_m \in \{\pm 1\}} \Big(\eta_1 I^{\mathfrak{l}}(\eta_i; 0^{k_i - 1}, \eta_{i+1}, \ldots, \eta_j, 0^{r-(k_i + \cdots + k_{j-1})}; 0) \\
& \otimes I^{\mathfrak{m}}(0; \eta_1, 0^{k_1 - 1}, \ldots, \eta_i, 0^{k_i + \cdots + k_j - r - 1}, \eta_{j+1}, 0^{k_{j+1}-1}, \ldots, \eta_p, 0^{k_p - 1}; 1) \Big) \\
= & \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq p \\ k_i + \cdots + k_j > r+1 \\ k_{i+1} + \cdots + k_j < r+1}} \Big(\sum_{[(\eta_i, \ldots, \eta_j)] \in \{\pm 1\}^{j-i+1}/\sim} I^{\mathfrak{l}}(\eta_i; 0^{k_i - 1}, \eta_{i+1}, \ldots, \eta_j, 0^{r-(k_i + \cdots + k_{j-1})}; 0) \Big) \\
& \otimes (-1)^{p-j+i} 2^{p-j+i} t^{\mathfrak{m}}(k_1, \ldots, k_{i-1}, k_i + \cdots + k_j - r, k_{j+1}, \ldots, k_p) \\
\in & \mathcal{L} \otimes \mathcal{H}^1.
\end{aligned}
$$

(C) の計算もほぼ同様である:

$$
\begin{aligned}
(C) = & \sum_{1 \leq j \leq p} \delta_{k_1 + \cdots + k_j = r} \sum_{\eta_m \in \{\pm 1\}} \Big(\eta_1 I^{\mathfrak{l}}(0; \eta_1, 0^{k_1 - 1}, \ldots, \eta_j, 0^{k_j - 1}; \eta_{j+1}) \\
& \otimes I^{\mathfrak{m}}(0; \eta_{j+1}, 0^{k_{j+1}-1}, \ldots, \eta_p, 0^{k_p - 1}; 1) \Big) \\
= & \sum_{1 \leq j \leq p} \delta_{k_1 + \cdots + k_j = r} \Big(\sum_{[(\eta_1, \ldots, \eta_{j+1})] \in \{\pm 1\}^{j+1}/\sim} \eta_1 \eta_{j+1} I^{\mathfrak{l}}(0; \eta_1, 0^{k_1 - 1}, \ldots, \eta_j, 0^{k_j - 1}; \eta_{j+1}) \Big) \\
& \otimes \Big(\sum_{\eta_{j+1}, \ldots, \eta_p \in \{\pm 1\}} \eta_{j+1} I^{\mathfrak{m}}(0; \eta_{j+1}, 0^{k_{j+1}-1}, \ldots, \eta_p, 0^{k_p - 1}; 1) \Big) \\
= & \sum_{1 \leq j \leq p} \delta_{k_1 + \cdots + k_j = r} \Big(\sum_{[(\eta_1, \ldots, \eta_{j+1})] \in \{\pm 1\}^{j+1}/\sim} \eta_1 \eta_{j+1} I^{\mathfrak{l}}(0; \eta_1, 0^{k_1 - 1}, \ldots, \eta_j, 0^{k_j - 1}; \eta_{j+1}) \Big) \\
& \otimes (-1)^{p-j} 2^{p-j} t^{\mathfrak{m}}(k_{j+1}, \ldots, k_p) \\
\in & \mathcal{L} \otimes \mathcal{H}^1.
\end{aligned}
$$

(D) を計算すると

$$
\begin{aligned}
(D) = & \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq p \\ k_i + \cdots + k_j = r+1}} \sum_{\eta_m \in \{\pm 1\}} \Big(\eta_1 I^{\mathfrak{l}}(\eta_i; 0^{k_i - 1}, \eta_{i+1}, \ldots, \eta_j, 0^{k_j - 1}; \eta_{j+1}) \\
& \otimes I^{\mathfrak{m}}(0; \eta_1, 0^{k_1 - 1}, \ldots, \eta_i, \eta_{j+1}, 0^{k_{j+1}-1}, \ldots, \eta_p, 0^{k_p - 1}; 1) \Big) \\
= & \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq p \\ k_i + \cdots + k_j = r+1}} \sum_{\substack{\eta_1, \ldots, \eta_i \\ \eta_{j+1} \cdots, \eta_p \in \{\pm 1\}}} \eta_1 \Big\{ \sum_{\eta_{i+1}, \ldots, \eta_j \in \{\pm 1\}} I^{\mathfrak{l}}(\eta_i; 0^{k_i - 1}, \eta_{i+1}, \ldots, \eta_j, 0^{k_j - 1}; \eta_{j+1}) \Big\} \\
& \otimes I^{\mathfrak{m}}(0; \eta_1, 0^{k_1 - 1}, \ldots, \eta_i, \eta_{j+1}, 0^{k_{j+1}-1}, \ldots, \eta_p, 0^{k_p - 1}; 1).
\end{aligned}
$$

ここで, 最後の式の $\{\cdots\}$ 内について, $\eta_i = \eta_{j+1}$ の場合は, 性質 (I2) より 0 になるので, $\eta_i \neq \eta_{j+1}$ の場合について計算する:

$$\begin{aligned}
\{\cdots\} &= \sum_{\eta_{i+1},\ldots,\eta_j\in\{\pm1\}} I^{\mathfrak{l}}(\eta_i;\ldots;-\eta_i) \\
&= \sum_{\eta_{i+1},\ldots,\eta_j\in\{\pm1\}} I^{\mathfrak{l}}(\eta_i;\ldots;0) + \sum_{\eta_{i+1},\ldots,\eta_j\in\{\pm1\}} I^{\mathfrak{l}}(0;\ldots;-\eta_i) \quad (\text{性質 (I3) より}) \\
&= \sum_{\eta_{i+1},\ldots,\eta_j\in\{\pm1\}} I^{\mathfrak{l}}(\eta_i;\ldots;0) + \sum_{\eta_{i+1},\ldots,\eta_j\in\{\pm1\}} I^{\mathfrak{l}}(0;\ldots;\eta_i) \quad (\text{性質 (I5) より}) \\
&= 0. \quad (\text{性質 (I3), (I2) より})
\end{aligned}$$

したがって, いずれの場合も $(D) = 0$ である.

以上の計算から

$$(-1)^p 2^p D_r(t^{\mathfrak{m}}(k_1,\ldots,k_p)) = (A) + (B) + (C) + (D) \in \mathcal{L}\otimes\mathcal{H}^1.$$

以上のことから, 定理 4 により, 定理 5 が導かれる.

4 謝辞

本稿は 2019 年 8 月に九州大学で行われた第 13 回福岡数論研究集会における著者の講演に基づくものです. 講演の機会を与えてくださった金子先生, 権先生, 岸先生に感謝申し上げます.

参考文献

[1] F. Brown, Mixed Tate motives over $\mathbb{Z}$, Annals of Math. (2) **175** (2012), 949–976.

[2] M. Kaneko and K. Tasaka, Double zeta values, double Eisenstein series, and modular forms of level 2, Math. Ann. **357** (2013), 1091–1118.

[3] C. Glanois, Unramified Euler sums and Hoffman $\star$ basis, preprint, arXiv:1603.05178v1.

[4] Z. Jin and J. Li, Motivic multiple zeta values relative to μ_2, preprint, arXiv:1805.02126v4.

[5] M. E. Hoffman, An odd variant of multiple zeta values, preprint, arXiv:1612.05232v4.