捻じれ Alexander 多項式の副有限剛性

植木 潤 (東京電機大学)

概 要

結び目の Alexander 多項式および捻じれ Alexander 多項式の副有限剛性に関する結果の概略を述べる. 本稿は第 13 回福岡数論研究集会 (2019 年 8 月, 九州大学) での講演内容をまとめ, 具体例や双曲体積に関する記述を添えたものである.

1 導入

Grothendieck は [Gro70] において, 一般に剰余有限な離散群 π がその副有限完備化 $\widehat{\pi} = \varprojlim_{\varpi \lhd \pi} \pi/\varpi$ (ここに ϖ は指数有限部分群を走る) の位相同型類から決定されるかどうかは, 興味深い問題であると述べた. 有限表示を持つとは限らない反例は Platonov-Tavgen [PT86], 有限表示を持つ反例は Bridson-Grunewald [BG04] によって最初に与えられた.

3 次元多様体 M の基本群は, 有限表示を持つ剰余有限な離散群 π である ([Hem87]+[Per02, Per03b, Per03a]). その副有限完備化の位相同型類から M の位相的性質がどの程度決まるか?という問を**副有限剛性の問題**という. 数論的位相幾何学の視点から, B. Mazur も「結び目群および Peripheral 系の副有限完備化から結び目が決定されるか？」という問題を提起した [Maz12]. 低次元位相幾何における副有限剛性はここ数年ほどで急激に研究が進められ, ファイバー性, JSJ 分解, グラフ多様体などの剛性, ある種の Klein 群の絶対剛性, 曲面の写像類群の元について有限の不定性を除いた剛性などの結果がある (cf. [BF15, BR15, BRW17, JZ17, WZ17, WZ19, Wil18b, Wil18a, Rei18, BMRS18, Liu19]). しかし, 2 つの素な結び目の対 (J, K) であって, 結び目群 (S^3 における補空間の基本群) の副有限完備化上の同型 $\widehat{\pi}_J \cong \widehat{\pi}_K$ が存在する例が存在するかどうかは, 未だに知られていない.

本稿では簡単のため, 対象を結び目群 $\pi = \pi_K$ に絞り, Alexander 多項式, および捻じれ Alexander 多項式の副有限剛性に関する結果 [Uek18b, Uek19] の概略を述べる. 副有限完備化の位相同型類を $\widehat{\pi}/\cong$ と書く.

2 Alexander 多項式

まず Alexander 多項式の定義を復習する. アーベル化写像を $\alpha : \pi \twoheadrightarrow \widehat{\pi}^{\rm ab} = t^{\mathbb{Z}}$ と書く. ここに t は形式的な生成元である. 群 $t^{\mathbb{Z}}$ は $H_1({\rm Ker}\alpha, \mathbb{Z}) = ({\rm Ker}\alpha)^{\rm ab}$ へ共役で作用し, Alexander 加群 $H_1({\rm Ker}\alpha, \mathbb{Z})$ は有限生成捻じれ $\mathbb{Z}[t^{\mathbb{Z}}]$ 加群となる. この Fitting イデアルの生成元を $\Delta_K(t) \in \mathbb{Z}[t^{\mathbb{Z}}]$ と書き, K の Alexander 多項式と呼ぶ. この $\Delta_K(t)$ は単数倍を除き決まる. $\mathbb{Z}[t^{\mathbb{Z}}]$ の単数倍を除いた等式を $\doteq$ を用いて表す. 次数に関する対称性 $\Delta_K(t) \doteq \Delta_K(t^{-1})$ が知られている.

次の定理は, 多項式が 1 の冪根を根に持たない場合は Boileau-Friedl [BF15], 一般の場合は筆者 [Uek18b] によって示された.

定理 2.1 ([BF15], [Uek18b])**.** $\widehat{\pi}_K/\cong$ は Alexander 多項式 $\Delta_K(t)$ を決定する.

Proof. Step 1: まず $\Delta_K(t)$ が 1 の冪根を根に持たない場合を考える．このとき Fox の公式 (cf. [Web79]) によって, 補空間 $S^3 - K$ の $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 被覆の Fox 完備化 $M_n \to S^3$ の 1 次ホモロジー群 $H_1(M_n)$ の位数は, 絶対巡回終結式 $|r_n| = |\prod_{\zeta^n=1}\Delta_K(\zeta)|$ に一致する．群 $H_1(M_n)$ は Hurewicz 同型によって $\mathrm{Ker}\widehat{\pi} \twoheadrightarrow \widehat{\mathbb{Z}} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ のアーベル化に同型であるから, $\widehat{\pi}/\cong$ は $|r_n|$ を定める．Fried の命題 [Fri88] によって, 次数に関する対称性を持ち 1 の冪根を根に持たない実係数の多項式 $\Delta_K(t)$ について, Artin-Mazur の力学系ゼータ関数 $B(z) = \sum |r_n| z^n/n!$ は $\mathbb{C}$ 上の有理関数に解析接続され, その零点と極から $\Delta_K(t)$ の根たちが決定される．最後に $|r_1|$ から最高次係数が決定される．

Step 2: 次に $\Delta_K(t)$ が 1 の冪根を根に持つ場合を考える．Prüffer 環 $\widehat{\mathbb{Z}} = \varprojlim \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}$ を考える．アーベル化写像 $\widehat{\alpha} : \widehat{\pi} \twoheadrightarrow \widehat{\pi}^{\mathrm{ab}} = t^{\widehat{\mathbb{Z}}}$ の像の生成元 s を任意に取ると, ある単数 $v \in \widehat{\mathbb{Z}}^*$ があって $s = t^v$ である．($\widehat{\pi}$ の位相同型類からは t が特定できないことに注意.) 完備 Alexander 加群 $\widehat{H}_1(\mathrm{Ker}\,\widehat{\alpha}, \mathbb{Z})$ からイデアル $(\Delta_K(t^v)) \subset \widehat{\mathbb{Z}}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]] = \varprojlim(\mathbb{Z}/n_1)\mathbb{Z}[t^{\mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z}}]$($v$ は未知の単数) を得る．環 $\widehat{\mathbb{Z}}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$ において各円分多項式 $\Phi_m(z)$ が零因子でないこと, また $\Phi_m(t^v)/\Phi_m(t)$ が単数であることなどから, $\Delta_K(t)$ の円分因子を特定・キャンセルできる．こうして定理の証明は Step 1 に帰着される． □

3 捻じれ Alexander 多項式

本稿では捻じれ Alexander 多項式 $\Delta_\rho(t)$ を, 捻じれ Alexander 加群の Fitting イデアルの生成元として定義する．低次元トポロジーでは $\mathbb{C}$ 上の表現を考えることが多いが, 副有限完備化で $\mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ は潰れてしまうので, 工夫が必要である．F を代数体, S を F の整数環 O_F の素イデアルからなる有限集合とするとき, O_F に S の逆元を添加して得られる Dedekind 環を F の S 整数環といい $O_{F,S}$ と書く．結び目群 π の $\mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ 表現は, 適当な共役を取ることで代数体の S 整数環 $O = O_{F,S}$ 上の表現と見ることができる

以後 $O = O_{F,S}$ を固定し, ここでは UFD だと仮定する．(S を適切に取ることで O を UFD に取れるが, 不変量が持つ情報が少し減る．UFD を仮定せずに可能な議論もある．詳しくは [Uek19] を参照されたい.) 表現 $\rho : \pi \to \mathrm{GL}_N(O)$ から, 副有限完備化の普遍性 [RZ10, Lemma 3.2.1] によって連続表現 $\widehat{\rho} : \pi \to \mathrm{GL}_N(\widehat{O})$ が導かれる．ここに $\mathrm{GL}_N(\widehat{O}) \cong \varprojlim_{I \subset O} \mathrm{GL}_N(O/I)$ (O/I は有限商を走る) もまた副有限群である．

結び目群 π のアーベル化写像 $\alpha : \pi \twoheadrightarrow t^{\mathbb{Z}}$ に対応する $\mathbb{Z}$ 被覆を $X_\infty \to X = S^3 - K$ と書く．表現 $\rho : \pi \to \mathrm{GL}_N(O)$ に対し, Shapiro の補題 [Bro94, III, Proposition 6.2] によって同型な以下の有限生成 $O[t^{\mathbb{Z}}]$ 加群たちを第 i 捻じれ Alexander 加群という:

$$\mathcal{A}_i := H_i(X_\infty, \rho) \cong H_i(\mathrm{Ker}\alpha, \rho) \cong H_i(\pi, \rho \otimes \alpha) \cong H_i(X, \rho \otimes \alpha).$$

一般にイデアル $\mathfrak{a} \subset O[t^{\mathbb{Z}}]$ に対し $\widetilde{\mathfrak{a}} = \cap_{\mathfrak{P} \supset \mathfrak{a}} \mathfrak{P}$ ($\mathfrak{P}$ は単項イデアルを走る) を $\mathfrak{a}$ の divisorial hull という．これは局所化による議論と相性が良い．$\mathcal{A}_i$ が捻じれ $O[t^{\mathbb{Z}}]$ 加群のとき, その Fitting イデアルの divisorial hull $\widetilde{\mathrm{Fitt}}\mathcal{A}_i$ は単項イデアルである．その生成元を捻じれ Alexander 多項式と呼び $\Delta_{\rho,i}(t) \in O[t^{\mathbb{Z}}]$ と書く．これは表現の共役類の不変量である．以下 i を省略することがある．次数に関する対称性は一般には成り立たないが, ρ が自己双対なとき (例えば SL_2 表現のとき) は成立つ [HSW10].

なお $W_\rho = \Delta_{\rho,1}(t)/\Delta_{\rho,0}(t)$ は Lin-Wada の捻じれ Alexander 不変量と呼ばれ, $O[t^{\mathbb{Z}}]$ の単数倍を除き Reidemeister トーション $\tau_\rho(X)$ と一致することが知られている．仮に $\widetilde{\mathrm{Fitt}}\mathcal{A}_i$ たちが単項イデアルでなくても, 分数イデアル $\widetilde{\mathrm{Fitt}}\mathcal{A}_1/\widetilde{\mathrm{Fitt}}\mathcal{A}_0$ は単項イデアルとなる．

4 主定理

2 つの連続表現 $\widehat{\rho}: \widehat{\pi} \to \mathrm{GL}_N(\widehat{O})$, $\widehat{\rho}': \widehat{\pi}' \to \mathrm{GL}_N(\widehat{O})$ が同型であるとは, ある同型 $\varphi: \widehat{\pi} \overset{\cong}{\to} \widehat{\pi}'$ に対し $\widehat{\rho}$ と $\widehat{\rho}' \circ \varphi$ が共役であることをいう. 連続表現の同型類を $\widehat{\rho}/\cong$ と書く.

有理数体 $\mathbb{Q}$ の $\mathbb{C}$ における代数閉包を $\overline{\mathbb{Q}}$ と書き, 代数体 F はこの部分体と考える. 各素数 p に対し p 進数体 $\mathbb{Q}_p$ の代数閉包の完備化を $\mathbb{C}_p$ と書き, 埋め込み $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}_p$ を固定する.

体の拡大におけるノルム写像が $\mathrm{Nr}_{F/\mathbb{Q}} : F \to \mathbb{Q}; \alpha \mapsto \prod_{\sigma: F \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}} \alpha^\sigma$ によって定義される. これは S 整数環上, また Laurent 多項式環上の写像に延長される: $\mathrm{Nr}_{F/\mathbb{Q}} : O_{F,S}[t^{\mathbb{Z}}] \to \mathbb{Z}_{\overline{S}}[t^{\mathbb{Z}}]; f(t) \mapsto \prod_\sigma f^\sigma(t)$. ここに $\overline{S} = \mathrm{Nr}_{F/\mathbb{Q}} S$ と書く.

2 つの多項式 $f(t), g(t) \in \mathbb{R}[t^{\mathbb{Z}}]$ が同じ Hillar 類に属するとは, ある $u(t), v(t) \in \mathbb{R}[t^{\mathbb{Z}}]$ があって $f(t) \doteq u(t)v(t)$ かつ $g(t) \doteq u(t)v(t^{-1})$ を満たすことをいう.

一般に集合 A と自然数 d に対し, A^d の要素を d 次対称群 S_d の作用によって同一視したものを $[a_i]_i \in A^d/S_d$ と書く.

定理 4.1 ([Uek19]). (1) 表現 $\rho: \pi \to \mathrm{GL}_N(O)$ の完備化であるような連続表現の同型類 $\widehat{\rho}/\cong$ は $\mathrm{Nr}_{F/\mathbb{Q}}\Delta_\rho(t)$ の Hillar 類を決める. もし $\Delta_\rho(t)$ が次数対称なら, $\mathrm{Nr}_{F/\mathbb{Q}}\Delta_\rho(t)$ 自体を決める.

(2) $\Delta_\rho(t) = a_0 \prod (t - \alpha_i) \in \overline{\mathbb{Q}}[t^{\mathbb{Z}}]$ と書くと, 有限個を除き任意の素数 p に対し $|a_0|_p = 1$, $|\alpha_i|_p = 1$ となる. このとき各 i に対し $|\alpha_i - \zeta_i|_p < 1$ なる 1 の冪根 ζ_i が一意に存在する. この ζ_i が 1 の原始 l_i 乗根であるとし, $m = \mathrm{lcm}\{l_i\}$ すると, $p \nmid l_i$, よって $p \nmid m$ である. 連続表現の同型類 $\widehat{\rho}/\cong$ は, このような素数 p, 類 $[l_i]_i \in \mathbb{Z}^d/S_d$, 数 m, および類の集合 $\{[(\alpha_i/\zeta_i)^w]_i \in \overline{\mathbb{Q}}^d/S_d \mid w \in \mathbb{Z}_p^*\}$, $\{[\zeta_i^u]_i \in \overline{\mathbb{Q}}^d/S_d \mid u \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*\}$ を決める.

アーベル化 $t^{\widehat{\mathbb{Z}}}$ の生成元 s を勝手に取ると, ある単数 $v \in \widehat{\mathbb{Z}}$ に対し $s = t^v$ となる. ここで不定性として現れる (u, w) は, $\widehat{\mathbb{Z}} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/m \times \mathbb{Z}_p; v \mapsto (u, w)$ による像である.

Proof. 完備捻じれ Alexander 多項式からイデアル $(\Delta_\rho(t^v)) \subset \widehat{O}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$ ($v \in \widehat{\mathbb{Z}}^*$ は未知の単数) が定まる. 完備群環 $\widehat{O}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]]$ での円分多項式の性質に関する補題, および Hillar による次数対称でない多項式への Fried の命題の拡張 [Hil05] から (1) が得られる.

(2) は次の写像によるイデアルの像を考えることで得られる:

$$\widehat{O}[[t^{\widehat{\mathbb{Z}}}]] \to O_{\mathfrak{p}}[[t^{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_p}]] \underset{\otimes \mathbb{C}_p}{\hookrightarrow} \mathbb{C}_p[[t^{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_p}]] \overset{\cong}{\to} \prod_{\xi^m = 1} \mathbb{C}_p[[t^{\mathbb{Z}}]] \underset{\xi t \mapsto 1+T}{\overset{\cong}{\to}} \prod \mathbb{C}_p[[T]].$$

□

Hillar [Hil05] は, 次数を既知とた場合に, 多項式を具体的に決定するアルゴリズムをも与えている. [Uek19] では具体決定に関する命題も与えた. また [Uek19] では Mahler 測度やその p 進類似についても [Uek18a], [Tan18] の延長として論じている. これらは, 本稿では省略する.

捻じれ Alexander の副有限剛性については筆者以外の研究もある. Boileau-Friedl [BF15] は有限体上の表現に付随する $\Delta_\rho(t)$ を考え, $\widehat{\pi}^{\mathrm{ab}}$ において t を既知とした形での副有限剛性を示し, それを用いて結び目のファイバー性の副有限剛性を証明した. また Liu [Liu19] は曲面の写像類群の元が有限の不定性を除き有限商で決定されることを証明する際に, 捻じれ Alexander 不変量を考察している.

5 具体例

2 橋結び目 K の放物 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ 表現を考える．K の結び目群は $\pi = \langle a, b \mid aw = wb \rangle$ という形の表示を持つ．Riley 多項式 $\Phi_K(1, u)$ の根 $u = \alpha$ を取り，$F = \mathbb{Q}(\alpha)$ の整数環を O とすれば，対応する Riley の放物既約表現 $\rho : \pi_K \to \mathrm{SL}_2(O)$ は

$$\rho(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -u & 1 \end{pmatrix}$$

で与えられる．O が UFD (よって PID) なら $\Delta_{\rho,i}(t)$ が定義されるが，ρ は任意の剰余表現が既約なので [Tan18, Corollary 3.1] によって $\Delta_{\rho,0}(t) \doteq 1$, $\Delta_\rho(t) := \Delta_{\rho,1}(t) \doteq W_\rho(t)$ である．K が双曲結び目のとき，この ρ はホロノミー表現である (cf. [Ril72, Ril84], [DHY09, Lemma 5], [HM10, Example 2.3], [Tan18, Section 9])．

例 5.1. (1) $K = 3_1$ (3 葉結び目) のとき，$\Delta_\rho(t) = t^2 + 1 = \Phi_4(t) \in \mathbb{Z}[t]$, $\mathrm{Nr}_{F/\mathbb{Q}} \Delta_\rho(t) = \Phi_4(t)^2$.

(2) $K = 4_1$ (8 の字結び目) のとき，$\Delta_\rho(t) = t^2 - 4t + 1 \in \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-3}}{2}]$ ($O = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-3}}{2}]$ は UFD), $\mathrm{Nr}_{F/\mathbb{Q}} \Delta_\rho(t) = \Delta(t)^2$.

(3) $K = 5_1$ のとき，$\Delta(t) = (t^2+1)(t^4 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} t^2 + 1) = \Phi_4(t)\phi_{20}^+(t) \in \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{5}}{2}]$ ($O = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{5}}{2}]$ は UFD), $\mathrm{Nr}_{F/\mathbb{Q}} \Delta_\rho(t) = (t^2+1)^2(t^8 - t^6 + t^4 - t^2 + 1) = \Phi_4(t)^2 \Phi_{20}(t)$.

(4) $K = 5_2$ ([HM10, Example 2.3 (3)] の $K(3/7)$) のとき，$\pi = \langle x, y \mid wx = yw \rangle$, $w = xyx^{-1}y^{-1}xy$. $\Phi_K(1, u) = u^3 + u^2 + 2u + 1$ の根 $u = \alpha$ に対応する ρ について，$\rho \otimes \mathbb{C}$ の Wada-Lin 多項式は $W_\rho(t) = (4 + \alpha^2)t^2 - 4t + (4 + \alpha^2)$. PARI/GP [The18] によれば $F = \mathbb{Q}(\alpha)$ の類数は 1, $O_F = \mathbb{Z}[\alpha]$ は PID である．また判別式は -23 で，$F/\mathbb{Q}$ では $p = 23$ のみが分岐する．$\Delta_\rho(t)$ は定義され $W_\rho(t)$ に一致する．(なお仮に O が UFD でなくとも $\mathrm{Nr}_{F/\mathbb{Q}} \widetilde{\mathrm{Fitt}} \mathcal{A}_1$ の生成元を $\mathrm{Nr}_{F/\mathbb{Q}} \Delta_\rho(t)$ と書けば $\mathrm{Nr}_{F/\mathbb{Q}} \Delta_\rho(t) = \mathrm{Nr}_{F/\mathbb{Q}} W_\rho(t)$ が成立つ.)

$\mathrm{Nr}_{F/\mathbb{Q}} \Delta_\rho(t) = \mathrm{Nr}_{F/\mathbb{Q}} \Delta_\rho(t) = \prod_{\Phi(1,u)=0} ((4t^2 - 4t + 4) + u^2(t^2+1)) = (4t^2 - 4t + 4)^3 - 3(4t^2 - 4t + 4)^2(t^2+1) + 2(4t^2 - 4t + 4)(t^2+1)^2 + (t^2+1)^3 = 25t^6 - 104t^5 + 219t^4 - 272t^3 + 219t^2 - 104t + 25$ となる．(これは [SW09, Example 4.5] における $\Phi_K(1, u) = u^3 + u^2 + 2u + 1$ の全表現 $\rho_\Phi : \pi \to \mathrm{GL}_8(\mathbb{Z})$ に付随する $\Delta_{\rho_\Phi}(t)$ に一致する．この多項式の Mahler 測度によって，捻じれ Alexander 加群へのメリディアン作用の位相的エントロピーが計算される.)

定理 4.1 から，$\widehat{\rho}/\cong$ は (1)〜(4) の $\mathrm{Nr}_{F/\mathbb{Q}} \Delta_\rho(t)$, (1) と (2) の $\Delta_\rho(t)$ を決めることが分かる．(3) では円分多項式 $\Phi_{20}(t)$ の 2 つの因子 $\phi_{20}^\pm = t^4 - \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} t^2 + 1 \in \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{5}}{2}]$ の区別ができない．(4) では $\mathrm{Nr}_{F/\mathbb{Q}} \Delta_\rho(t)$ から $\Delta_\rho(t) \in \mathbb{Z}[\alpha][t^{\mathbb{Z}}]$ の候補が 3 つ挙がる．ホロノミー表現は $u^3 + u^2 + 2u + 1$ の虚数根に対応するので候補は 2 つに絞られ，よって $\Delta_\rho(t)$ は複素共役を除き決まる．一般に，もし多項式の候補を別の候補に移すような群の自己同型があれば，その不定性は本質的ではない．

6 双曲体積

双曲結び目 K の補空間には本質的に一意な完備双曲構造が入り，その双曲計量に関する空間の体積 $\mathrm{Vol}(K)$ は位相不変量となる．Lück の"楽観的予想"から双曲体積の副有限剛性が従う．ホロノミー表現 $\rho_{\mathrm{hol}} : \pi_K \to \mathrm{SL}_2(O) \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ は双曲構造に対応する表現 (のリフト) である．ここでは $\widehat{\rho}/\cong$ から $\mathrm{Vol}(K)$ が得られるかを考察する．

テンソル表現 $\rho \otimes \alpha$ の Reidemeister トーション $\tau_\rho(t) := \tau_{\rho\otimes\alpha}(X) \in F[t^{\mathbb{Z}}]$ は $\pm t$ 倍を除き定義され, $O[t^{\mathbb{Z}}]$ の単数倍を除き Lin-Wada の多項式 $W_\rho(t)$ に一致する. (なお [Wad94] における $W_\rho(t)$ の定義の不定性は 2 通りに読むことができ, $W_\rho(t)$ 自体が $\pm t$ 倍を除き決まっていると見ることもできる.)

各 $n > 1$ に対し ρ_{hol} と対称表現 $\mathrm{SL}_2(O) \to \mathrm{SL}_n(O)$ の合成 ρ_n を高次ホロノミー表現と呼ぶ. Müller, Menal-Ferrer, Porti らの解析的トーションに関する結果 [Mül93, Mül12, MFP14], また北野・山口氏らによる各種トーションの関係性 [Kit96, Yam08] などから, 合田氏によって次が得られている:

命題 6.1 ([God17, Theorem 1.1])**.** 各 $m > 0$ に対し $A_{2m}(t) = \tau_{\rho_{2m}}(t)/\tau_{\rho_2}(t)$, $A_{2m+1}(t) = \tau_{\rho_{2m+1}}(t)/\tau_{\rho_3}(t)$ と置くと,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\log |A_{2m+1}(1)|}{(2m+1)^2} = \lim_{m\to\infty} \frac{\log |A_{2m}(1)|}{(2m)^2} = \frac{\mathrm{Vol}(K)}{4\pi}$$

が成立つ.

ここでは $t = 1$ での値が考察されているが, 任意の 1 の冪根 ζ に対し $t = \zeta$ での値を考えても同様の等式が成立つことが示されたというアナウンスがあった (Léo Bénard, 2019 年 9 月, Göttingen).

もし $\mathrm{Nr}_{F/\mathbb{Q}}\Delta_\rho(1)$ から $|\Delta_\rho(1)|$ が決まるなら, $\widehat{\rho}/\cong$ から $\mathrm{Vol}(K)$ が決まる. 定理 4.1 から次が従う.

系 6.2. F を $\mathbb{Q}$ もしくは虚 2 次体とする. 双曲結び目 K のホロノミー表現 ρ_{hol} が $O = O_F$ 上の表現と見られるとき, $\widehat{\rho}_{\mathrm{hol}}/\cong$ から双曲体積 $\mathrm{Vol}(K)$ が定まる.

例 5.1 のうち双曲結び目である (2) と (4) は, いずれも条件を満たす. ちなみに (2) の 8 の字結び目については, $\widehat{\pi}_K$ が他の全ての 3 次元多様体の $\widehat{\pi}$ と同型でないこと (絶対剛性) が示されている [BF15, BR15, BRW17]. 残された問題を以下に述べて本稿を終える.

問題 6.3. (1) 3 次元多様体のファイバー性は $\widehat{\pi}$ から決まる ([BF15, Theorem 1.2], [BRW17], [JZ17]). ファイバー双曲結び目の (高次) ホロノミー表現の $\tau_\rho(t)$ は monic であり, 逆も予想されている ([DFJ12], [Por18]). また $\tau_\rho(t)$ は次数対称である. ホロノミー表現を $\mathrm{SL}_2(O)$ 表現と見る. この状況下で, $\widehat{\rho}/\cong$ から $\mathrm{Vol}(K)$ が決定できるか?

(2) $\widehat{\rho}/\cong$ から $\tau_\rho(t) = \tau_{\rho\otimes\alpha}(X)$ はどの程度決まるか?そこから $\mathrm{Vol}(K)$ が決まるか?

(3) $\widehat{\pi}$ の連続表現の全体から $\mathrm{Vol}(K)$ を決定できるか?(ホロノミー表現の近傍にある幾何的表現の全体を考えると, 対応する体積の最大値が完備双曲体積である. 連続 $\mathrm{SL}_2(\widehat{O})$ 表現の全体を動かした場合は, 非常に難しそうである. 適当な表現のクラスを設定すべきか.)

謝辞

講演の機会を下さった組織委員の先生方, 講演の際に重要なご質問を下さった原隆さんに感謝します. また 2019 年 11 月に Göttingen 大学で同じテーマの講演をした際に重要なご指摘を下さった Léo Bénard さんと Steffen Kionke さんにも感謝します. 本研究は科研費 JP19K14538 の助成を受けています.

参考文献

[BF15] M. Boileau and S. Friedl, *The profinite completion of* 3*-manifold groups, fiberedness and Thurston norm*, preprint, 2015, arXiv:1505.07799.

[BG04] M. R. Bridson and F. J. Grunewald, *Grothendieck's problems concerning profinite completions and representations of groups*, Ann. of Math. (2) **160** (2004), no. 1, 359–373.

[BMRS18] M. R. Bridson, D. B. McReynolds, A. W. Reid, and R. Spitler, *Absolute profinite rigidity and hyperbolic geometry*, preprint, 2018, arXiv:1181.04394.

[BR15] Martin R. Bridson and Alan W. Reid, *Profinite rigidity, fibering, and the figure-eight knot*, preprint, 2015, arXiv:1505.07886.

[Bro94] K. S. Brown, Cohomology of groups, Graduate Texts in Mathematics, 87, Springer-Verlag, New York, 1994.

[BRW17] M. R. Bridson, A. W. Reid and H. Wilton, *Profinite rigidity and surface bundles over the circle*, Bull. Lond. Math. Soc. **49** (2017), no. 5, 831–841.

[DFJ12] N. M. Dunfield, S. Friedl and N. Jackson, *Twisted Alexander polynomials of hyperbolic knots*, Exp. Math. **21** (2012), no. 4, 329–352.

[DHY09] J. Dubois, V. Huynh and Y. Yamaguchi, *Non-abelian Reidemeister torsion for twist knots*, J. Knot Theory Ramifications **18** (2009), no. 3, 303–341.

[Fri88] D. Fried, *Cyclic resultants of reciprocal polynomials*, In: Holomorphic dynamics (Mexico, 1986), 124–128, Lecture Notes in Math., 1345, Springer, Berlin, 1988.

[God17] H. Goda, *Twisted Alexander invariants and hyperbolic volume*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **93** (2017), no. 7, 61–66.

[Gro70] A. Grothendieck, *Représentations linéaires et compactification profinie des groupes discrets*, Manuscripta Math. **2** (1970), 375–396.

[Hem87] J. Hempel, *Residual finiteness for* 3*-manifolds*, In: Combinatorial group theory and topology (Alta, Utah, 1984), 379–396, Ann. of Math. Stud., 111, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1987.

[Hil05] C. J. Hillar, *Cyclic resultants*, J. Symbolic Comput. **39** (2005), no. 6, 653–669.

[HM10] M. Hirasawa and K. Murasugi, *Evaluations of the twisted Alexander polynomials of* 2*-bridge knots at* ± 1, J. Knot Theory Ramifications **19** (2010), no. 10, 1355–1400.

[HSW10] J. A. Hillman, D. S. Silver, and S. G. Williams, *On reciprocality of twisted Alexander invariants*, Algebr. Geom. Topol. **10** (2010), no. 2, 1017–1026.

[JZ17] A. Jaikin-Zapirain, *Recognition of being fibred for compact 3-manifolds*, preprint, available at `http://verso.mat.uam.es/andrei.jaikin/preprints/fibering.pdf`.

[Kit96] T. Kitano, *Twisted Alexander polynomial and Reidemeister torsion*, Pacific J. Math. **174** (1996), no. 2, 431–442.

[Liu19] Y. Liu, *Mapping classes are almost determined by their finite quotient actions*, preprint, 2019, arXiv:1906.03602.

[Maz12] B. Mazur, *Primes, Knots and Po*, Lecture notes for the conference "Geometry, Topology and Group Theory" in honor of the 80th birthday of Valentin Poenaru, 2012.

[MFP14] P. Menal-Ferrer and J. Porti, *Higher-dimensional Reidemeister torsion invariants for cusped hyperbolic 3-manifolds*, J. Topol. **7** (2014), no. 1, 69–119.

[Mül93] W. Müller, *Analytic torsion and R-torsion for unimodular representations*, J. Amer. Math. Soc. **6** (1993), no. 3, 721–753.

[Mül12] W. Müller, *The asymptotics of the Ray-Singer analytic torsion of hyperbolic 3-manifolds*, In: Metric and differential geometry, 317–352, Progr. Math., 297, Birkhäuser/Springer, Basel, 2012.

[Per02] G. Perelman, *The entropy formula for the ricci flow and its geometric applications*, preprint, 2002, arXiv:0211159.

[Per03a] G. Perelman, *Finite extinction time for the solutions to the ricci flow on certain three-manifolds*, preprint, 2003, arXiv:0307245.

[Per03b] G. Perelman, *Ricci flow with surgery on three-manifolds*, preprint, 2003, arXiv:0303109.

[Por18] J. Porti, *Reidemeister torsion, hyperbolic three-manifolds, and character varieties*, In: Handbook of group actions. Vol. IV, 447–507, Adv. Lect. Math., 41, Int. Press, Somerville, MA, 2018.

[PT86] V. P. Platonov and O. I. Tavgen', *On the Grothendieck problem of profinite completions of groups*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **288** (1986), no. 5, 1054–1058.

[Rei18] A. W. Reid, *Profinite rigidity*, Proc. Int. Cong. of Math. Rio de Janeiro **1** (2018), 1191–1214.

[Ril72] R. Riley, *Parabolic representations of knot groups. I*, Proc. London Math. Soc. (3) **24** (1972), 217–242.

[Ril84] R. Riley, *Nonabelian representations of 2-bridge knot groups*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **35** (1984), no. 138, 191–208.

[RZ10] L. Ribes and P. Zalesskii, Profinite groups. Second edition, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, 40, Springer-Verlag, Berlin, 2010.

[SW09] D. S. Silver and S. G. Williams, *Dynamics of twisted Alexander invariants*, Topology Appl. **156** (2009), no. 17, 2795–2811.

[Tan18] R. Tange, *Fox formulas for twisted Alexander invariants associated to representations of knot groups over rings of S-integers*, J. Knot Theory Ramifications **27** (2018), no. 5, 1850033.

[The18] The PARI Group, Univ. Bordeaux, PARI/GP version `2.11.0`, 2018, available at `http://pari.math.u-bordeaux.fr/`.

[Uek18a] J. Ueki, *p-adic Mahler measure and $\mathbb{Z}$-covers of links*, to appear in Ergodic Theory Dynam. Systems.

[Uek18b] J. Ueki, *The profinite completions of knot groups determine the Alexander polynomials*, Algebr. Geom. Topol. **18** (2018), no. 5, 3013–3030.

[Uek19] J. Ueki, *Profinite rigidity for twisted Alexander polynomials*, preprint, 2019, arXiv:1909.01334.

[Wad94] M. Wada, *Twisted Alexander polynomial for finitely presentable groups*, Topology **33** (1994), no. 2, 241–256.

[Web79] C. Weber, *Sur une formule de R. H. Fox concernant l'homologie des revêtements cycliques*, Enseign. Math. (2) **25** (1979), no. 3-4, (1980), 261–272.

[Wil18a] G. Wilkes, *Profinite completions, cohomology and JSJ decompositions of compact 3-manifolds*, New Zealand J. Math. **48** (2018), 101–113.

[Wil18b] G. Wilkes, *Profinite rigidity of graph manifolds and JSJ decompositions of* 3*-manifolds*, J. Algebra **502** (2018), 538–587.

[WZ17] H. Wilton and P. Zalesskii, *Distinguishing geometries using finite quotients*, Geom. Topol. **21** (2017), no. 1, 345–384.

[WZ19] H. Wilton and P. Zalesskii, *Profinite detection of* 3*-manifold decompositions*, Compos. Math. **155** (2019), no. 2, 246–259.

[Yam08] Y. Yamaguchi, *A relationship between the non-acyclic Reidemeister torsion and a zero of the acyclic Reidemeister torsion*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **58** (2008), no. 1, 337–362.