On the cyclicity of the unramified Iwasawa modules of the maximal multiple $\mathbb{Z}_p$-extensions over imaginary quadratic fields

村上 和明 (慶應義塾女子高等学校)

概 要

本稿は第 13 回福岡数論研究集会における筆者による講演の報告集である. K が虚二次体, p が K で不分解な奇素数であるとき, 多重 $\mathbb{Z}_p$-拡大における岩澤加群の生成元の個数と K のイデアル類群の p-Sylow 部分群との関係について述べる. また, 多重 $\mathbb{Z}_p$-拡大における岩澤加群が巡回的であるかを判定する方法について述べる. 本研究は大槻玲氏 (慶應義塾大学), 岡野恵司氏 (都留文科大学), 三浦崇氏 (鶴岡工業高等専門学校) との共同研究である.

1 序

p を奇素数, $\mathbb{Z}_p$ を p 進整数環とする. K を有限次代数体, K_∞^{c} を K の円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大とする. 古典的な岩澤理論では K_∞^{c} の最大不分岐アーベル pro-p 拡大のガロア群の構造が重要な研究対象の一つであった. このガロア群を $X_{K_\infty^{\mathrm{c}}}$ と表し, 岩澤加群と呼ぶことにする. $\mathbb{Z}_p$-拡大におけるガロア群 $\mathrm{Gal}(K_\infty^{\mathrm{c}}/K)$ は $X_{K_\infty^{\mathrm{c}}}$ に内部自己同型によって作用し, $X_{K_\infty^{\mathrm{c}}}$ は有限生成ねじれ $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(K_\infty^{\mathrm{c}}/K)]]$-加群になることが知られている.

本稿では, 岩澤加群の $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(K_\infty^{\mathrm{c}}/K)]]$-加群としての生成元の個数に関連する事柄ついて考える. 岩澤理論の結果から p が K で不分解で, 分岐する p 上の素点が完全分岐するという条件のもとでは, 岩澤加群のガロア不変商 $(X_{K_\infty^{\mathrm{c}}})_{\mathrm{Gal}(K_\infty^{\mathrm{c}}/K)}$ は K のイデアル類群の p-Sylow 部分群と同型になる. 従って, 中山の補題から $X_{K_\infty^{\mathrm{c}}}$ の生成元の個数は K のイデアル類群の生成元の個数と一致することがわかる. 特に, $X_{K_\infty^{\mathrm{c}}}$ が $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(K_\infty^{\mathrm{c}}/K)]]$-加群として一元生成であることと, K のイデアル類群が巡回群であることが同値になる. (一般的には, $X_{K_\infty^{\mathrm{c}}}$ の生成元の個数を求めるためには, その高次 Fitting イデアルなどを研究する必要がある.)

K の最大多重 $\mathbb{Z}_p$-拡大体を $\widetilde{K}$ と表し, $\widetilde{K}$ 上の最大不分岐アーベル pro-p 拡大のガロア群を $X_{\widetilde{K}}$ と書くことにする. Greenberg 氏らの結果により, $X_{\widetilde{K}}$ は有限生成なねじれ $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K)]]$-加群であることが知られている. 次の問題を考えたい:

問題 1.1. $X_{\widetilde{K}}$ の $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K)]]$-加群としての最小な生成元の個数はいくつか？また, 生成元と個数と K のイデアル類群の p-Sylow 部分群と間には何か関係性があるのか？

本稿ではこの問題に対して, K が虚二次体, p が K で不分解な奇素数である場合に一つの答えを与える. 以下, いくつかの記号の設定と, 問題 1.1 に関する事柄について述べる. K が虚二次体, p が K で不分解な奇素数であるとする. $g = \dim_{\mathbb{F}_p}(A_K/pA_K)$ とおく. つまり, イデアル類群の p 部分はアーベル群として g 元生成であるとする. K は虚二次体であるからレオポルト予想が成り立ち, $\mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K) \cong \mathbb{Z}_p^2$ となる. K_∞^{c} と線形無関連な $\mathbb{Z}_p$-拡大 K_∞/K を一つ選

び (例えば反円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大など), $\mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K_\infty^{\mathrm{c}})$ と $\mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K_\infty)$ の位相的生成元をそれぞれ σ, τ と固定することにより, 同型

$$\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K)]] \cong \mathbb{Z}_p[[S,T]] \quad (\sigma \mapsto 1+S, \tau \mapsto 1+T)$$

が存在する. 従って, $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K)]]$ は二変数のべき級数環とみなすことができる.

一変数の岩澤加群 $X_{K_\infty^{\mathrm{c}}}$ は $X_{\widetilde{K}}$ と関係が深い. 例えば類体論により, $\mathbb{Z}_p[[S]]$-加群としての完全系列

$$0 \to X_{\widetilde{K}}/TX_{\widetilde{K}} \to X_{K_\infty^{\mathrm{c}}} \to \mathrm{Gal}(L_{K_\infty^{\mathrm{c}}} \cap \widetilde{K}/K_\infty^{\mathrm{c}}) \to 0 \tag{1}$$

によって, $X_{\widetilde{K}}$ のガロア不変商は $X_{K_\infty^{\mathrm{c}}}$ の部分加群とみなすことができる. この完全系列に対して, T 倍写像から誘導される蛇の補題を適用すれば

$$g-1 \le \dim_{\mathbb{F}_p} X_{\widetilde{K}}/(p,S,T) \le g+1 \tag{2}$$

を得る. 一般的に, $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K)]]$ 上のコンパクトな加群に対しても中山の補題は成立するため, $X_{\widetilde{K}}$ の生成元の個数は $g-1, g, g+1$ の 3 つのどれかになることがわかる.

$X_{\widetilde{K}}$ の生成元の個数が自明にわかる場合として, 例えば $L_K \cap \widetilde{K} = K$ のとき, 上記の完全系列 (1) より, $X_{\widetilde{K}}/T \cong X_{K_\infty^{\mathrm{c}}}$ が成り立つ. 従って $X_{\widetilde{K}}/(S,T)X_{\widetilde{K}} \cong (X_{K_\infty^{\mathrm{c}}})_{\mathrm{Gal}(K_\infty^{\mathrm{c}}/K)}$ となるから, $X_{\widetilde{K}}$ の生成元の個数は g である. この他に, K のイデアル類群の p-Sylow 部分群が巡回群である場合は, 岩澤加群の特別な生成元を選ぶことで $X_{\widetilde{K}}$ の生成元の個数を完全に分類することができる (定理 3.1). しかし, $L_K \cap \widetilde{K} \neq K$ や K のイデアル類群の p-Sylow 部分群が巡回群にならない場合は複雑な状況であり, 生成元の個数を特定するために岩澤加群の同型類の情報が必要になる (定理 5.1). 実際, この場合は岩澤加群 $X_{K_\infty^{\mathrm{c}}}$ に対するガロア群の作用の様子によって生成元の個数が変化する (定理 5.3). 本稿ではこれらの現象を具体例を中心に紹介する.

2 岩澤加群 $X_{K_\infty^{\mathrm{c}}}$ の生成元系

この節では, 岩澤加群 $X_{K_\infty^{\mathrm{c}}}$ のある特別な生成元系の定義をする. この生成系は本稿の定理 3.1, 5.1, 5.3 で用いられる. 前節に引き続き, $g = \dim_{\mathbb{F}_p}(A_K/pA_K)$ とおく. まず, 類体論の相互写像から得られる準同型写像

$$F : X_{K_\infty^{\mathrm{c}}} \twoheadrightarrow X_{K_\infty^{\mathrm{c}}}/SX_{K_\infty^{\mathrm{c}}} \cong A_K \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(L_K \cap \widetilde{K}/K)$$

を考える. 左端の写像は自然な準同型, 右端の写像は制限写像である. このとき, 次の性質を満たす岩澤加群 $X_{K_\infty^{\mathrm{c}}}$ の生成元 $x_1, \ldots, x_g$ を選択することができる.

命題 2.1. 以下の条件 (i), (ii) を満たす $X_{K_\infty^{\mathrm{c}}}$ の生成元 $x_1, x_2, \ldots, x_g$ を選ぶことができる:

(i) $\langle F(x_1) \rangle = \mathrm{Gal}(L_K \cap \widetilde{K}/K)$,

(ii) $i \ge 2$ に対して $F(x_i) = 1$.

続いて, $X_{K_\infty^{\mathrm{c}}}$ の部分加群 M, N, L を次のように定義する:

定義 2.2.

$$\begin{aligned} M &:= \langle p^m x_1, Sx_1 \rangle_{\mathbb{Z}_p[[S]]}, \\ L &:= (p,S)(M+N), \\ N &:= \begin{cases} \langle x_2, \ldots, x_g \rangle & g \ge 2 \text{ のとき}, \\ 0 & g = 1 \text{ のとき}. \end{cases} \end{aligned}$$

生成元の個数に関する不等式 (2) から, $X_{\widetilde{K}}$ は少なくとも, $g-1$ 個の生成元を有する．この $g-1$ 個の元から生成される部分群に対応する岩澤加群 $X_{K_\infty^{\mathrm{c}}}$ の部分群が N である．次の命題は簡単に確認することができる．

命題 2.3. 部分加群 M, N, L は次の性質を持つ:

(i) $X_{\widetilde{K}}/TX_{\widetilde{K}} = M + N$,

(ii) $X_{\widetilde{K}}/(p, S, T)X_{\widetilde{K}} \cong (M+L)/L \oplus (N+L)/L$,

(iii) $(N+L)/L \cong \mathbb{F}_p^{\oplus g-1}$.

この命題の意味を簡単に述べておく．命題の (ii) と中山の補題より, $X_{\widetilde{K}}$ の生成の個数を求めるためには $(M+L)/L \oplus (N+L)/L$ の生成元の個数を求めればよい． さらに (iii) より, $(N+L)/L$ は $g-1$ 個の元で生成されることがわかる．従って, $(M+L)/L$ の生成元がわかれば $X_{\widetilde{K}}$ の生成の個数がわかる．

3　A_K が巡回群の場合

K を虚二次体, p を K で不分解な奇素数とする．A_K を K のイデアル類群の p-Sylow 部分群とする．この節では, A_K が巡回群になる場合の $X_{\widetilde{K}}$ の生成元の個数を決定することについて述べる．

定理 3.1. $\dim_{\mathbb{F}_p}(A_K/pA_K) = 1$ と仮定する．このとき, 以下が成り立つ．

(i) (自明な場合) $L_K \cap \widetilde{K} = K$ のとき, $\dim_{\mathbb{F}_p}(X_{\widetilde{K}}/(p, S, T)X_{\widetilde{K}}) = 1$.

(ii) $L_K \cap \widetilde{K} \neq K$ かつ A_K が巡回群であるとき,

(ii-a) $\lambda(K_\infty^{\mathrm{c}}/K) = 1$ なら $\dim_{\mathbb{F}_p}(X_{\widetilde{K}}/(p, S, T)X_{\widetilde{K}}) = 1$.

(ii-b) $\lambda(K_\infty^{\mathrm{c}}/K) \geq 2$ なら $\dim_{\mathbb{F}_p}(X_{\widetilde{K}}/(p, S, T)X_{\widetilde{K}}) = \begin{cases} 1 & L_K \subset \widetilde{K} \text{ のとき,} \\ 2 & \text{その他.} \end{cases}$

この定理から, A_K が巡回群である場合は, $X_{\widetilde{K}}$ の生成元の個数が全てわかる．定理の (i) は第 1 節に述べた通り, 一般的に (A_K が巡回群でない場合も含めて) $\dim_{\mathbb{F}_p}(X_{\widetilde{K}}/(S, T)X_{\widetilde{K}}) = \dim_{\mathbb{F}_p}(X_{\widetilde{K}}/(p, S, T)X_{\widetilde{K}})$ が成り立つことを注意しておく．
定理にある条件 $L_K \subset \widetilde{K}$ は以下の命題で判定することができる．

命題 3.2 (Minardi [14, Corollary of Proposition 6.B], Brink [2, Theorem 13 (b)])**.** $L_K \subset \widetilde{K}$ は以下と同値である:

(i) $p = 3$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ かつ $d \not\equiv 3 \bmod 9$ のとき, $\mathbb{Q}(\sqrt{3d})$ の類数が 3 で割り切れない．

(ii) $p \geq 5, K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ のとき, $K(\zeta_p)$ の類数と K の類数は等しい．ただし, ζ_p は 1 の原始 p 乗根である．

まず, この命題を用いて, $X_{\widetilde{K}}$ が巡回群になる例を紹介する．

例 3.3. $p=7$, $K=\mathbb{Q}(\sqrt{-71})$ とする．このとき 7 は K で惰性し, 水澤氏のプログラムにより, $\lambda(K_\infty^{\mathrm{c}}/K)=1$ であることがわかる．PARI/GP によって $A_K\cong\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ がわかる．また, $K(\zeta_7)$ の類数が 28 であることもわかる．命題 3.2 (ii) より, $L_K\not\subset\widetilde{K}$ であることがわかるから $L_K\cap\widetilde{K}=K$ である．従って, 先ほどの定理の (i) より，$X_{\widetilde{K}}$ は $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K)]]$-加群として巡回的である．

例 3.4. $p=3$, $K=\mathbb{Q}(\sqrt{-61})$ とする．このとき 3 は K で惰性し, $\lambda(K_\infty^{\mathrm{c}}/K)=1$ であることがわかる．さらに $A_K\cong\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ である．また, $\mathbb{Q}(\sqrt{183})$ の類数は 2 なので 3 と素であるから, 命題 3.2 (ii) より, $L_K\subset\widetilde{K}=K$ である．従って, 先ほどの定理の (ii-a) より，$X_{\widetilde{K}}$ は $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K)]]$-加群として巡回的である．

例 3.5. $p=3$, $K=\mathbb{Q}(\sqrt{-1207})$ とする．このとき 3 は K で惰性し, 水澤氏のプログラムにより, $\lambda(K_\infty^{\mathrm{c}}/K)=2$ であることがわかる．さらに, $A_K\cong\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ である．また, $\mathbb{Q}(\sqrt{3621})$ の類数は 2 なので 3 と素であるから, 命題 3.2 (i) より, $L_K\subset\widetilde{K}$ である．従って, 定理 3.1 の (ii-b) より，$X_{\widetilde{K}}$ は $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K)]]$-加群として巡回的である．

続いて, $X_{\widetilde{K}}$ が一元生成にならない例を紹介する．定理 3.1 から, このような例は $L_K\cap\widetilde{K}\neq K$ かつ $L_K\not\subset\widetilde{K}$ の場合に起こる．まず, 条件 $L_K\cap\widetilde{K}\neq K$ を確かめる方法について述べる．$(p)=\mathfrak{p}$ を K における素イデアル分解とし, $U_{\mathfrak{p}}$ を $K_{\mathfrak{p}}$ の単数群とする．また, $U_{\mathfrak{p}}^{(1)}$ を $K_{\mathfrak{p}}$ の主単数群, $\mathfrak{X}_K$ を K の最大アーベル p 拡大のガロア群とする．類体論から次の完全列が得られる:

$$0\to\mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}_p}\left(U_{\mathfrak{p}}^{(1)}/\overline{\varphi(E_K^{(1)})}\right)\to\mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}_p}\mathfrak{X}_K\to\mathrm{Gal}(L_K/L_K\cap\widetilde{K})\to 0.$$

$\mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}_p}(U_{\mathfrak{p}}^{(1)}/\overline{\varphi(E_K^{(1)})})$ の構造はよく知られているため, 以下の命題によって条件 $L_K\cap\widetilde{K}\neq K$ が成り立つかどうかを判定することができる:

命題 3.6 (藤井 [5, Lemma 4.3])**.** $I_K(p)$ を p と素な分数イデアルからなる群, $S_K(p^n)$ を mod p^n の Strahl 群 (つまり K の単項な分数イデアル (α) で $\alpha\equiv 1 \bmod p^n$ を満たすものからなる群) とする．また, $\exp(A_K)$ を A_K の指数とし, $p^N=p\cdot\exp(A_K)$ とおく．このとき, ある整数 N_1,N_2 $(N+2\le n, N<N_i\ (i=1,2))$ が

$$(I_K(p)/S_K(p^n))\otimes\mathbb{Z}_p\cong A\oplus\mathbb{Z}/p^{N_1}\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/p^{N_2}\mathbb{Z}$$

を満たすならば, $\mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}_p}\mathfrak{X}_K\cong A$ である．

例 3.7. $p=3$, $K=\mathbb{Q}(\sqrt{-3271})$ とする．このとき 3 は K で惰性し, 水澤氏のプログラムにより, $\lambda(K_\infty^{\mathrm{c}}/K)=2$ であることがわかる．さらに, PARI/GP によって $A_K\cong\mathbb{Z}/27\mathbb{Z}$ である．また, 命題より $L_K\not\subset\widetilde{K}$, $L_K\cap\widetilde{K}\neq K$ である．実際,

$$(I(3)/S(3^6))\otimes\mathbb{Z}_3\cong\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/3^5\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/3^6\mathbb{Z}$$

より $[L_K\cap\widetilde{K}:K]=9$. 従って, 定理の (ii-b) により $X_{\widetilde{K}}$ は $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K)]]$-加群として巡回的ではない．

以下, 定理 3.1 の証明を述べる．

定理 3.1 の証明. (i) は第 1 節で述べたので, (ii) の場合を考える．$p^m=\#\mathrm{Gal}(L_K\cap\widetilde{K}/K)$ とおく．仮定から, p が不分解であることと, A_K が巡回群であることから $X_{K_\infty^{\mathrm{c}}}\cong\mathbb{Z}_p[[S]]/(F(S))$

を満たす非単数根多項式 (distinguished polynomial) $F(S) \in \mathbb{Z}_p[[S]]$ が存在する．また, 前節で定義された部分加群 M, N, L はそれぞれ $M = \langle p^m x_1, Sx_1 \rangle_{\mathbb{Z}_p[[S]]}$, $N = 0$, $L = \langle p^{m+1} x_1, pSx_1, S^2 x_1 \rangle_{\mathbb{Z}_p[[S]]}$ となる．

まず, (ii-a) のとき, つまり $\lambda(K_\infty^{\mathrm{c}}/K) = 1$ と仮定する．$p^m = \# A_K$ の場合は $X_{K_\infty^{\mathrm{c}}}$ の中で $p^m x_1 = 0$ が成り立つ．従って, $M = \langle Sx_1 \rangle_{\mathbb{Z}_p[[S]]}$ を満たすので $X_{\widetilde{K}}$ は一元生成であることがわかる．$0 < p^m < \# A_K$ の場合は $F(S)$ が 1 次式であることから $Sx_1 \in L$ が成り立つ．従って, $X_{\widetilde{K}}$ は一元生成である．

次に, (ii-b) のとき, つまり $\lambda(K_\infty^{\mathrm{c}}/K) \geq 2$ と仮定する．$p^m = \# A_K$ の場合は (ii-a) のときと同じ理由で $X_{\widetilde{K}}$ は一元生成である．$0 < p^m < \# A_K$ の場合は $F(S)$ が 2 次式以上であることから $F(S) \equiv F(0) \bmod (pS, S^2)$ が成り立つ．よって,

$$\begin{aligned} X_{\widetilde{K}}/(p, S, T) &\cong (p^m, S, F(S))\mathbb{Z}_p[[S]]/(p^{m+1}, pS, S^2, F(S))\mathbb{Z}_p[[S]] \\ &= (p^m, S)\mathbb{Z}_p[[S]]/(p^{m+1}, pS, S^2)\mathbb{Z}_p[[S]] \\ &\cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\oplus 2}. \end{aligned}$$

中山の補題から $X_{\widetilde{K}}$ は二元生成である． □

4 隅田氏と小池氏の結果

もう一つの結果を述べるために, この節では隅田氏と小池氏の結果を紹介する．E を p 進体 $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大, $\mathcal{O}_E$ をその整数環, π_E を素元とする．また, ord_E を E の正規化された加法的離散付値とする．つまり, ord_E は $\mathrm{ord}_E(\pi_E) = 1$ を満たすとする．$\mathcal{O}_E$ 上の一変数べき級数環 $\mathcal{O}_E[[S]]$ を Λ_E で表す．非単数根多項式 $f(S)$ に対して, 隅田氏は以下の様な有限生成ねじれ Λ_E-加群の同型類の集合 $\mathcal{M}_{f(S)}^E$ を導入した．

$$\mathcal{M}_{f(S)}^E = \left\{ [M]_E \;\middle|\; \begin{array}{l} M \text{ は有限生成ねじれ } \Lambda_E\text{-加群}, \\ \mathrm{char}(M) = (f(S)),\ M \text{ は } \mathcal{O}_E \text{ 上自由} \end{array} \right\}.$$

ここで, 有限生成ねじれ Λ_E-加群 M の Λ_E-加群としての同型類を $[M]_E$ または単に $[M]$ で表す．$\mathrm{char}(M)$ は M の特性イデアルである．隅田氏と小池氏は $f(S)$ が 2 次式の場合に $\mathcal{M}_{f(S)}^E$ を決定している ([20, Proposition 10])．$f(S)$ の (最小) 分解体を $\overline{E}$ とし, $\alpha, \beta \in \overline{E}$ を $f(S)$ の根とすると $f(S)$ は以下の通り分解される:

$$f(S) = (S - \alpha)(S - \beta).$$

ここで簡単のために, $f(S)$ は重根を持たないとする．つまり, $\alpha \neq \beta$ と仮定する．M は自由 $\mathbb{Z}_p$-加群なので非自明な有限部分 Λ-加群を持たない．従って, Λ-加群の構造定理の擬同型写像

$$\varphi_M : M \hookrightarrow \Lambda_E/(S - \alpha) \oplus \Lambda_E/(S - \beta)$$

は単射で, cokernel は有限である．ここで, 各加群 M に対して φ_M を固定して, M を常に $\Lambda_E/(S - \alpha) \oplus \Lambda_E/(S - \beta)$ の部分加群であると見なす．また, 標準的な同型写像 $\Lambda_E/(S - \alpha) \cong \mathcal{O}_E$ $(g(S) \mapsto g(\alpha))$ を用いて, 同型

$$\iota : \mathcal{E} = \Lambda_E/(S - \alpha) \oplus \Lambda_E/(S - \beta) \longrightarrow \mathcal{O}_E^{\oplus 2} \quad ((g_1(S), g_2(S)) \mapsto (g_1(\alpha), g_2(\beta)))$$

を定義する．ι によって，$\mathcal{E}$ を $\mathcal{O}_E^{\oplus 2}$ と同一視すれば，$\mathcal{E}$ の元を $(a_1, a_2) \in \mathcal{O}_E^{\oplus 2}$ の形で表示することが可能である．M の $\mathbb{Z}_p$ ランクは 2 であるため，M は $\mathcal{O}_E^{\oplus 2}$ のある 2 元を用いて，以下のように表示される:

$$M = \langle (a,b),(c,d) \rangle_{\mathcal{O}_E} \subset \Lambda_E/(S-\alpha) \oplus \Lambda_E/(S-\beta).$$

ここで $\langle * \rangle_{\mathcal{O}_E}$ は $*$ によって生成される $\mathcal{O}_E$-部分加群である．さらに，M の S 倍作用は

$$S(a,b) = (\alpha a, \beta b)$$

である．

注意 4.1. $\mathrm{ord}_E(a) \leq \mathrm{ord}_E(c)$ と仮定する．このとき $\mathcal{O}_E$-加群 $M = \langle (a,b),(c,d) \rangle_{\mathcal{O}_E}$ が Λ_E-加群であるための必要十分条件は $\mathrm{ord}_E(d - a^{-1}bc) - \mathrm{ord}_E(b) \leq \mathrm{ord}_E(\beta - \alpha)$ である．

同型類の集合 $\mathcal{M}_{f(S)}^E$ は次のように明示的に表すことができる:

命題 4.2 (隅田 [20, Proposition 10])**.** $f(S)$ を先ほどの非単数根多項式とする．このとき，

$$\mathcal{M}_{f(S)}^E = \{[M(k)]_E \,|\, 0 \leq k \leq \mathrm{ord}_E(\beta - \alpha)\}.$$

ただし，

$$M(k) = \langle (1,1),(0,\pi_E^k) \rangle_{\mathcal{O}_E} \subset \Lambda_E/(S-\alpha) \oplus \Lambda_E/(S-\beta)$$

である．さらに，

$$M(k) \cong M(k') \Leftrightarrow k = k'.$$

5 A_K が巡回群でない場合

この節では，A_K が巡回群でない場合の $X_{\widetilde{K}}$ の生成元の個数について述べる．記号等はこれまでと同じ表記を使用することにする．

5.1 設定

$\Lambda = \mathbb{Z}_p[[S]]$，$K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ (d は平方因子を含まない) とする．整数 $n \geq 0$ に対して，円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大体 K_∞^{c} の n 次の部分体を K_n^{c} で表すことにする．また，K_n^{c} のイデアル類群の p-Sylow 部分群を $A_{K_n^{\mathrm{c}}}$ で表すことにする．このとき，類体論によって $X_{K_\infty^{\mathrm{c}}} \cong \varprojlim A_{K_n^{\mathrm{c}}}$ が成り立つ．ここで，射影極限はイデアルのノルムに関してとることにする．$\mathrm{Gal}(K_\infty^{\mathrm{c}}/K)$ の位相的生成元 σ を一つ固定すれば，岩澤加群 $X_{K_\infty^{\mathrm{c}}}$ は以下の同型を介して (有限生成なねじれ) Λ-加群になる:

$$\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(K_\infty^{\mathrm{c}}/K)]] \cong \mathbb{Z}_p[[S]] \quad (\sigma \leftrightarrow 1+S). \tag{3}$$

岩澤加群 $X_{K_\infty^{\mathrm{c}}}$ の特性イデアル $\mathrm{char}(X_{K_\infty^{\mathrm{c}}})$ の生成元を $f(S)$ とする．この節では $f(S)$ は分離的な 2 次の非単数根多項式であるとする．つまり，

$$f(S) = (S-\alpha)(S-\beta) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_p,\ \alpha \neq \beta)$$

であるとする．$f(S)$ の最小分解体を E とおく．岩澤加群 $X_{K_\infty^{\mathrm{c}}}$ に対して，命題 4.2 から $X_{K_\infty^{\mathrm{c}}}$ の同型類を決めるある自然数 k $(0 \leq k \leq \mathrm{ord}_E(\beta - \alpha))$ が存在する．このとき，$X_{K_\infty^{\mathrm{c}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_E$ の $\mathcal{O}_E$-加群としてのある基底 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ を選んで，Λ_E-加群の単射準同型

$$X_{K_\infty^{\mathrm{c}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_E \hookrightarrow \Lambda_E/(S-\alpha) \oplus \Lambda_E/(S-\beta); \quad \mathbf{e}_1 \mapsto (1,1), \mathbf{e}_2 \mapsto (0, \pi_E^k) \tag{4}$$

が存在する．この単射準同型によって，$X_{K^c_\infty} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_E$ を $\Lambda_E/(S-\alpha) \oplus \Lambda_E/(S-\beta)$ の Λ_E-部分加群とみなす．但し，$k=0$ の場合，$X_{K^c_\infty} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_E \cong \Lambda_E/(S-\alpha) \oplus \Lambda_E/(S-\beta)$ であるから，基底 $\{(1,1),(0,1)\}$ の代わりに標準基底 $\{(1,0),(0,1)\}$ を選ぶことにする．以後，e_1, e_2 を $X_{K^c_\infty} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_E$ の標準的な基底と呼ぶ．また，記号の簡略化のために，単射準同型 $x \mapsto x \otimes 1$ によって $X_{K^c_\infty} \subset X_{K^c_\infty} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_E$ とみなすことにする．第 2 節で述べたように，$X_{K^c_\infty}$ の生成元 x_1 と x_2 で次の性質を満たすものが選べる:

- $X_{K^c_\infty} = \langle x_1, x_2 \rangle_{\Lambda_E}$.
- 第 2 節で定義された準同型写像 F に対して $\langle F(x_1) \rangle = \mathrm{Gal}(L_K \cap \widetilde{K}/K)$．また，$F(x_2) = 1$.

さらに，$\mathrm{Gal}(L_K \cap \widetilde{K}/K)$ が $\mathrm{Gal}(L_K/K)$ の直和因子であるとき，つまり

$$\mathrm{Gal}(L_K/K) \cong \mathrm{Gal}(L_K \cap \widetilde{K}/K) \oplus \mathrm{Gal}(L_K/L_K \cap \widetilde{K})$$

と分解しているとき，x_2 の相互写像による像は $\mathrm{Gal}(L_K/L_K \cap \widetilde{K})$ を生成することに注意せよ．このように直和に分解されない例もいくつか存在するが，$1 < d < 10^5$ の範囲ではほとんどすべての虚二次体に対して，直和に分解されている．

標準的な基底 e_1, e_2 を用いて，岩澤加群の生成元 x_1, x_2 が

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_{11}\mathbf{e}_1 + \lambda_{12}\mathbf{e}_2 = (\mu_{11}, \mu_{12}), \\ x_2 &= \lambda_{21}\mathbf{e}_1 + \lambda_{22}\mathbf{e}_2 = (\mu_{21}, \mu_{22}) \end{aligned}$$

と表せたとする．ここで，$\lambda_{21} = \mu_{21}$ であることに注意せよ．また，$k=0$ の場合は，$\lambda_{ij} = \mu_{ij}$ $(i, j = 1, 2)$ であることにも注意せよ．以下の定理が本稿 2 つ目の定理である．

定理 5.1. 上記の設定と同じ条件を仮定する．さらに，$\mathrm{Gal}(L_K \cap \widetilde{K}/K)$ は $\mathrm{Gal}(L_K/K)$ の直和因子であるとする．$m := \min\{\mathrm{ord}(\alpha), \mathrm{ord}(\beta)\}$ とおく．また，単射準同型

$$X_{K^c_\infty} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_E \to \mathcal{O}_E[[S]]/(S-\alpha) \oplus \mathcal{O}_E[[S]]/(S-\beta)$$

による $x_2 \otimes 1$ の像を (μ_{21}, μ_{22}) で表す．このとき，$X_{\widetilde{K}}$ が $\mathbb{Z}_p[[S,T]]$-加群として一元生成になることは以下の条件のどれか一つが成り立つことと同値である:

(i) $k > 0$, $\mathrm{ord}(\beta - \alpha) - k < m$,

(ii) $k > 0$, $\mathrm{ord}(\beta - \alpha) - k = m$, $\mathrm{ord}(\mu_{21}) = 0$,

(iii) $k = 0$, $\mathrm{ord}(\beta - \alpha) = m$, $n_1 < n_2$, $\mathrm{ord}(\mu_{21}) = 0$,

(iv) $k = 0$, $\mathrm{ord}(\beta - \alpha) = m$, $n_1 \geq n_2$, $\begin{cases} \mathrm{ord}(\mu_{21}) = 0, \\ \mathrm{ord}(\mu_{22}) = \mathrm{ord}(\beta) - \mathrm{ord}(\alpha). \end{cases}$

ここで，n_1 と n_2 はそれぞれ $p^{n_1} = \#\mathrm{Gal}(L_K \cap \widetilde{K}/K)$, $p^{n_2} = \#\mathrm{Gal}(L_K/L_K \cap \widetilde{K})$ である．また，ord_E を ord で表す．

定理 5.1 の証明では岩澤加群の同型類の情報が必要となる．本稿ではこの定理の証明を与えずに，その応用について述べる．証明は [15] を参照せよ．

次の補題は次節で用いる．

補題 5.2. (i) $k=0$ の場合, 以下の関係式が成り立つ:

$$Sx_1 = \frac{\alpha\lambda_{11}\lambda_{22}-\beta\lambda_{12}\lambda_{21}}{\det(\lambda_{ij})}x_1 + \frac{(\beta-\alpha)\lambda_{11}\lambda_{12}}{\det(\lambda_{ij})}x_2,$$
$$Sx_2 = \frac{(\alpha-\beta)\lambda_{21}\lambda_{22}}{\det(\lambda_{ij})}x_1 + \frac{-\alpha\lambda_{12}\lambda_{21}+\beta\lambda_{11}\lambda_{22}}{\det(\lambda_{ij})}x_2.$$

(ii) $k>0$ の場合, 以下の関係式が成り立つ:

$$Sx_1 = \frac{\alpha\lambda_{11}\lambda_{22}-\beta\lambda_{12}\lambda_{21}-\lambda_{11}\lambda_{21}\gamma}{\det(\lambda_{ij})}x_1 + \frac{(\beta-\alpha)\lambda_{11}\lambda_{12}+\lambda_{11}^2\gamma}{\det(\lambda_{ij})}x_2,$$
$$Sx_2 = \frac{(\alpha-\beta)\lambda_{21}\lambda_{22}-\lambda_{21}^2\gamma}{\det(\lambda_{ij})}x_1 + \frac{-\alpha\lambda_{12}\lambda_{21}+\lambda_{11}\lambda_{22}\beta+\lambda_{11}\lambda_{21}\gamma}{\det(\lambda_{ij})}x_2.$$

但し, $\gamma=(\alpha-\beta)\pi_E^{-k}$.

証明. $k=0$ の場合は $\delta=0$, その他の場合は $\delta=-1$ と書くことにすると,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}, \quad S\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma\delta \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}$$

と表すことができる. 従って,

$$S\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \gamma\delta \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

各成分を比較することで結論を得る. □

5.2 生成元の個数の判定法

この節では, 定理 5.1 における μ_{21} と μ_{22} を計算し, $X_{\widetilde{K}}$ の生成元の個数を判定する方法を述べる. まず, A_K が二元生成と仮定して, $A_K \cong \mathbb{Z}/p^{n_1}\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/p^{n_2}\mathbb{Z}$ と表されているとする (n_1, n_2 は正の整数). 次に, e を $E/\mathbb{Q}_p$ おける分岐指数とすると, $A_K\otimes\mathcal{O}_E \cong \mathcal{O}_E/\pi_E^{N_1}\mathcal{O}_E\oplus\mathcal{O}_E/\pi_E^{N_2}\mathcal{O}_E$ である ($N_i = en_i$ $(i=1,2)$). また, p-Hilbert 類体が次の様に分解していると仮定する:

$$\mathrm{Gal}(L_K/K)\cong\mathrm{Gal}(L_K\cap\widetilde{K}/K)\oplus\mathrm{Gal}(L_K/L_K\cap\widetilde{K}).$$

p は K で不分解であるので, 以下の Λ-加群の同型 ψ_n が成り立つ ([21, Proposition 13.22]):

$$\psi_n : X_{K_\infty^{\mathrm{c}}}/\omega_n(S)X_{K_\infty^{\mathrm{c}}} \xrightarrow{\sim} A_{K_n^{\mathrm{c}}}.$$

ここで, n は非負整数で, $\omega_n(S)=(1+S)^{p^n}-1$ である.

K_∞^{c}/K における岩澤 λ-不変量が 2 で, $L_K\cap\widetilde{K}=K_{n_1}^{\mathrm{an}}$ であったことを思い出そう. $K_{n_1}^{\mathrm{an}}$ は反円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大 K_∞^{an}/K の n_1-th layer である. $\lambda(K_\infty^{\mathrm{c}}/K)=2$ より, 非負整数 n に対して, $A_{K_n^{\mathrm{c}}}$ は二元生成である. 特に, $A_{K_n^{\mathrm{c}}}$ の生成元 $\{[\mathfrak{b}_1],[\mathfrak{b}_2]\}$ で次を満たすものを選ぶ:

(i) $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{L}_1$ は K_n^{c} の素イデアルで, ある非負整数 s,t が存在して, $[\mathfrak{b}_1]=s[\mathfrak{Q}_1], [\mathfrak{b}_2]=t[\mathfrak{L}_1]$ を満たす. ここで, $[*]$ は $*$ のイデアル類を表すとする.

(ii) $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{L}_1$ はそれぞれ, 素数 q,ℓ の上にある K_n^{c} の素イデアル.

(iii) q と ℓ はそれぞれ $K_n^{\mathrm{c}}/\mathbb{Q}$ で完全分解する.

$\mathfrak{q}, \bar{\mathfrak{q}}, \mathfrak{l}, \bar{\mathfrak{l}}$ を K の素イデアルで, $q\mathcal{O}_K = \mathfrak{q}\bar{\mathfrak{q}}$, $\ell\mathcal{O}_K = \mathfrak{l}\bar{\mathfrak{l}}$ とする. q と ℓ の素イデアル分解が

$$\begin{aligned} q\mathcal{O}_{K_n^{\mathrm{c}}} &= \mathfrak{Q}_1\overline{\mathfrak{Q}_1}\cdots\mathfrak{Q}_{p^n}\overline{\mathfrak{Q}_{p^n}}, \quad \mathfrak{Q}_1,\ldots,\mathfrak{Q}_{p^n} \mid \mathfrak{q}, \quad \overline{\mathfrak{Q}_1},\ldots,\overline{\mathfrak{Q}_{p^n}} \mid \bar{\mathfrak{q}}, \\ \ell\mathcal{O}_{K_n^{\mathrm{c}}} &= \mathfrak{L}_1\overline{\mathfrak{L}_1}\cdots\mathfrak{L}_{p^n}\overline{\mathfrak{L}_{p^n}}, \quad \mathfrak{L}_1,\ldots,\mathfrak{L}_{p^n} \mid \mathfrak{l}, \quad \overline{\mathfrak{L}_1},\ldots,\overline{\mathfrak{L}_{p^n}} \mid \bar{\mathfrak{l}} \end{aligned}$$

であるとする. ノルム写像 $N_{K_n^{\mathrm{c}}/K} : A_{K_n^{\mathrm{c}}} \to A_K$ は全射であるので,

$$\mathrm{Gal}(L_K/K) = \left\langle \left(\frac{L_K/K}{\mathfrak{q}}\right)^s, \left(\frac{L_K/K}{\mathfrak{l}}\right)^t \right\rangle$$

が成り立つ. ここで, $(\frac{L_K/K}{\mathfrak{q}})$, $(\frac{L_K/K}{\mathfrak{l}})$ はそれぞれ, $\mathfrak{q}$ と $\mathfrak{l}$ のフロベニウス自己準同型である. 従って, 部分群 $\mathrm{Gal}(L_K/L_K \cap \widetilde{K})$ はある整数 u, v ($s \mid u$, $t \mid v$) を用いて

$$\mathrm{Gal}(L_K/L_K \cap \widetilde{K}) = \left\langle \left(\frac{L_K/K}{\mathfrak{q}}\right)^u \cdot \left(\frac{L_K/K}{\mathfrak{l}}\right)^v \right\rangle$$

と表せる. Q と L をそれぞれ $(\frac{L_K/K}{\mathfrak{q}})^s$, $(\frac{L_K/K}{\mathfrak{l}})^t$ によって生成される部分群に対応する中間体とする. このとき, $L_K = QK_{n_1}^{\mathrm{an}}$ または $L_K = LK_{n_1}^{\mathrm{an}}$ である. $L_K = QK_{n_1}^{\mathrm{an}}$ としても一般性は失わないので, この場合のみを考える. 以下の可換図式が成り立つことに注意する:

$$\begin{array}{ccc} X_{K_\infty^{\mathrm{c}}} & & \\ \big\downarrow & & \\ X_{K_\infty^{\mathrm{c}}}/\omega_n(S)X_{K_\infty^{\mathrm{c}}} & \xrightarrow[\psi_n]{} & A_{K_n^{\mathrm{c}}} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow N_{K_n^{\mathrm{c}}/K} \\ X_{K_\infty^{\mathrm{c}}}/SX_{K_\infty^{\mathrm{c}}} & \xrightarrow[\psi_0]{} & A_K. \end{array}$$

この可換図式から, $x_1, x_2 \in X_{K_\infty^{\mathrm{c}}}$ で

$$\psi_n(x_1 \bmod \omega_n(S)) = [s\mathfrak{Q}_1], \quad \psi_n(x_2 \bmod \omega_n(S)) = [u\mathfrak{Q}_1 + v\mathfrak{L}_1]$$

を満たすものが存在する. 中山の補題から, $X_{K_\infty^{\mathrm{c}}} = \langle x_1, x_2 \rangle$ である. また, $A_{K_n^{\mathrm{c}}} = \langle [s\mathfrak{Q}_1], [u\mathfrak{Q}_1 + v\mathfrak{L}_1] \rangle$ も成り立つ. これらの x_1 と x_2 は本稿の生成元に課せられた条件を満足することに注意せよ.

同型 $\mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(K_n^{\mathrm{c}}/K)] \cong \Lambda/\omega_n(S)\Lambda$ によって, ある p-進整数 $A, B \in \mathbb{Z}_p$ が存在して,

$$\overline{S}([u\mathfrak{Q}_1 + v\mathfrak{L}_1]) = A[s\mathfrak{Q}_1] + B[u\mathfrak{Q}_1 + v\mathfrak{L}_1]. \tag{5}$$

ここで, $\overline{S} = S \bmod \omega_n(S)$ である. この関係式から以下の判定法を得る. この判定法は定理 5.1 の (ii), (iii), (iv) に対して適用される.

定理 5.3. $\mathrm{ord}([s\mathfrak{Q}_1])$ で $[s\mathfrak{Q}_1]$ の位数を表すとする. このとき, 以下が成り立つ:

(a) $k = 0$, $\mathrm{ord}_E(A) = \mathrm{ord}_E(\beta - \alpha) < \mathrm{ord}([s\mathfrak{Q}_1])$ のとき, $\mathrm{ord}_E(\mu_{21}) = \mathrm{ord}_E(\mu_{22}) = 0$.

(b) $k > 0$, $\mathrm{ord}_E(\beta - \alpha) - k = \mathrm{ord}_E(A) < \mathrm{ord}([s\mathfrak{Q}_1])$ のとき, $\mathrm{ord}_E(\mu_{21}) = 0$.

証明. (a) $k=0$ のとき, 補題 5.2 と (5) より,

$$\mathrm{ord}_E(A) \equiv \mathrm{ord}_E((\alpha-\beta)\lambda_{21}\lambda_{22}) \bmod \mathrm{ord}([s\mathfrak{Q}_1])$$

が成り立つ. また, $k=0$ から $\lambda_{ij}=\mu_{ij}$ $(i,j=1,2)$ であるので主張が成り立つ.
(b) $k>0$ の場合, 補題 5.2 と (5) より,

$$\mathrm{ord}_E(A) \equiv \mathrm{ord}_E(\lambda_{21}) + \mathrm{ord}_E((\alpha-\beta)\lambda_{22} - \lambda_{21}(\beta-\alpha)\pi_E^{-k}) \bmod \mathrm{ord}([s\mathfrak{Q}_1])$$

が成り立つ. また, $\lambda_{21}=\mu_{21}$ と

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ord}_E(\lambda_{21}) + \mathrm{ord}_E((\alpha-\beta)\lambda_{22} - \lambda_{21}(\beta-\alpha)\pi_E^{-k}) \\
&\qquad = \mathrm{ord}_E(\lambda_{21}) + \mathrm{ord}_E(\alpha-\beta) - k + \mathrm{ord}_E(\lambda_{21} + \lambda_{22}\pi_E^{k}) \\
&\qquad \geq \mathrm{ord}_E(\lambda_{21}) + \mathrm{ord}_E(\alpha-\beta) - k
\end{aligned}$$

より主張が成り立つ. □

注意 5.4. [11, Proposition 2.2] によって, $n \geq 0$ のとき,

$$A_{K_n^c} \cong \mathbb{Z}/p^{n_1+n}\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p^{n_2+n}\mathbb{Z}$$

であるから, 実際には $n = \mathrm{ord}_E(\beta-\alpha)$ の場合を調べれば十分である.

5.3 例

例 5.5. $p=3$, $K=\mathbb{Q}(\sqrt{-12394})$ とする. PARI/GP によって, $A_K \cong \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ である. 補題 3.6 から, $L_K \cap \widetilde{K} = K_2^{\mathrm{an}}$ である. 実際, $(I(3)/S(3^5)) \otimes \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3^4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3^6\mathbb{Z}$. それゆえに, $\mathrm{Gal}(L_K/L_K \cap \widetilde{K}) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. このことから, $L_K \cap \widetilde{K} = K_2^{\mathrm{an}}$. さらに, [3, Theorem 2] を用いると, K_2^{an} の $\mathbb{Q}$ 上の定義多項式が

$$\begin{aligned}
&S^{18} + 18S^{16} + 1069S^{14} - 4372S^{12} + 152180S^{10} - 1347136S^8 + \\
&\qquad\qquad 2053184S^6 + 36414976S^4 - 166023168S^2 + 203063296
\end{aligned}$$

であるとわかる. また, 水澤のプログラム [16] により,

$$f(S) \equiv S^2 + 63S + 135 \bmod 3^5$$

であることがわかる. E を $f(S)$ の最小分解体であるとする. $f(S)=(S-\alpha)(S-\beta)$, $\alpha, \beta \in E$ とする. 簡単な計算により, $E/\mathbb{Q}_p$ は分岐拡大であることがわかり, $\mathrm{ord}_E(\alpha-\beta)=3$ を満たす. 岩澤加群の同型類は [11] により,

$$X_{K_\infty^c} \otimes \mathcal{O}_E \cong \langle (1,0), (0,\pi_E^2) \rangle_{\mathcal{O}_E}$$

である. これから $k=2$ であることがわかる. また, $\mathrm{ord}_E(\alpha)=\mathrm{ord}_E(\beta)=3$ なので, $\mathrm{ord}_E(\alpha-\beta)-k=1<3$ である. 従って, $X_{\widetilde{K}}$ は定理 5.1 (i) により, 巡回的な $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K)]]$-加群である.

上記の例は次のように一般化することができる:

命題 5.6. 以下の条件を仮定する:

(i) $\mathrm{ord}_E(\alpha) = \mathrm{ord}_E(\beta)$,

(ii) $A_K \cong \mathbb{Z}/p^{m_1}\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p^{m_2}\mathbb{Z}$ $(m_1 < m_2)$,

(iii) $L_K \cap \widetilde{K} = K_{m_2}^{\mathrm{an}}$.

このとき, $X_{\widetilde{K}}$ は $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K)]]$-加群として一元生成である.

証明. $m = \min\{\mathrm{ord}_E(\alpha), \mathrm{ord}_E(\beta)\}$ とおく. イデアル類群の構造は [15, Lemma 5.1] より,

$$A_K \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_E \cong \begin{cases} \mathcal{O}_E/\alpha\mathcal{O}_E \oplus \mathcal{O}_E/\beta\mathcal{O}_E & \mathrm{ord}_E(\beta-\alpha) - k \geq m \text{ のとき}, \\ \mathcal{O}_E/(\beta-\alpha)\pi_E^{-k}\mathcal{O}_E \oplus \mathcal{O}_E/\frac{\alpha\beta}{(\beta-\alpha)\pi_E^{-k}}\mathcal{O}_E & \mathrm{ord}_E(\beta-\alpha) - k < m \text{ のとき} \end{cases}$$

である. また, 仮定の条件 (i) と (ii) より, $k > 0$ である. 従って, $\mathrm{ord}_E(\beta-\alpha) - k < m$ が成り立つ. さらに, 条件 (iii) より $\mathrm{Gal}(L_K \cap \widetilde{K}/K)$ は $\mathrm{Gal}(L_K/K)$ の直和因子である. 定理 5.1 の (i) より主張が成り立つ. □

命題 5.6 で巡回性が判定できる虚二次体の例とそれらに対する特性イデアルの生成元の近似式を, それぞれ以下の表 1 と表 2 に書いておく.

表 1:

d	$\mathrm{ord}_E(\alpha-\beta)$	k	m	$L_K \cap \widetilde{K}$	$E/\mathbb{Q}_3$	A_0	$X_{\widetilde{K}}$
5703	3	2	3	K_2^{an}	ramified	$(9,3)$	cyclic
12394	3	2	3	K_2^{an}	ramified	$(9,3)$	cyclic
50293	3	2	3	K_2^{an}	ramified	$(9,3)$	cyclic
54931	3	2	3	K_2^{an}	ramified	$(9,3)$	cyclic
89269	3	2	2	${K_3}^{\mathrm{an}}$	unramified	$(27,3)$	cyclic

(整数 k は (4) で定義された値で, $m = \min\{\mathrm{ord}_E(\alpha), \mathrm{ord}_E(\beta)\}$)

表 2:

d	$\mathrm{char}(X_{K_\infty^c})$ の生成元 mod 3^5
5703	$S^2 + 63S + 135$
12394	$S^2 + 63S + 27$
50293	$S^2 + 54S + 189$
54931	$S^2 + 135S + 216$
89269	$S^2 + 63S + 81$

次に, 定理 5.1 の (iv) によって $X_{\widetilde{K}}$ が一元生成にならないと判定される例を紹介する.

例 5.7. $p = 3$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-42619})$ とする. PARI/GP から, $A_K \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ であることがわかる. $L_K \cap \widetilde{K} = K_1^{\mathrm{an}}$ であることから, $\mathrm{Gal}(L_K \cap \widetilde{K}/K)$ は $\mathrm{Gal}(L_K/K)$ の直和因子になることがわかる. また, 水澤のプログラムから特性イデアルの生成元は以下のようになる:

$$f(S) \equiv S^2 + 573S + 252 \bmod 3^6.$$

ヘンゼルの補題から, $f(S)$ は可約で, $f(S)=(S-\alpha)(S-\beta)$, $\alpha\equiv 105 \bmod 3^5$, $\beta\equiv 51 \bmod 3^5$ に分解できることがわかる．従って, $\mathrm{ord}_p(\alpha-\beta)=3$ であることもわかる．この場合は, 小池氏の論文 [11] では岩澤加群 $X_{K^c_\infty}$ の同型類が決定されていない．ここでは, 高次 Fitting イデアルを用いて同型類を決定することにする．再び PARI/GP から,

$$A_{K^c_1}=\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}[\mathfrak{b}_1]\oplus\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}[\mathfrak{b}_2]$$

であることがわかる．ここで, $\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2\in\mathcal{O}_{K^c_1}$ は PARI/GP によって計算されている生成元である．また, $\mathrm{Gal}(K^c_1/K)$ の生成元の一つとして, $\overline{\sigma}$ を選ぶ. ($\overline{\sigma}$ も PARI/GP によって計算されている). $\overline{\sigma}$ の $\mathrm{Gal}(K^c_\infty/K)$ への延長を一つ選び, これを $\sigma\in\mathrm{Gal}(K^c_\infty/K)$ と表すことにする．$\overline{\sigma}$ と同型 (3) によって $X_{K^c_\infty}$ を $\mathbb{Z}_p[[S]]$-加群とみなすことにする．特性イデアルの生成元である $f(S)$ は $\overline{\sigma}$ の選び方によって変化するが, $\mathrm{ord}_p(\alpha)$, $\mathrm{ord}_p(\beta)$, $\mathcal{M}^{\mathbb{Q}_p}_{f(S)}$ は $\overline{\sigma}$ の選び方に関係なく一定である．続いて, Fitting イデアルを計算する．PARI/GP から, イデアル類群に σ が以下のように作用することがわかる:

$$\overline{\sigma}[\mathfrak{b}_1]=4[\mathfrak{b}_1],\quad \overline{\sigma}[\mathfrak{b}_2]=4[\mathfrak{b}_2].$$

この関係式から,

$$\mathrm{Fitt}_{1,\mathbb{Z}_p[[S]]}(X_{K^c_\infty}/\omega_1(S)X_{K^c_\infty})=(S-3) \bmod \omega_1(S)$$

であることがわかる．これは $k=0$ を意味する．よって, $X_{K^c_\infty}$ の同型類は

$$X_{K^c_\infty}\cong\langle(1,0),(0,1)\rangle=\Lambda/(S-\alpha)\oplus\Lambda/(S-\beta)$$

である．さらに, $\mathrm{ord}_p(\alpha-\beta)-k=3>\min\{\mathrm{ord}_p(\alpha),\mathrm{ord}_p(\beta)\}=1$. 従って, 定理 5.1 の (iv) より $X_{\widetilde{K}}$ は $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K)]]$-加群として巡回的ではない.

上記の例と同様な手法で $X_{\widetilde{K}}$ の生成元の個数が判別できる虚二次体の例と, それらに対する特性イデアルの生成元の近似式をそれぞれ以下の表 3 と表 4 に書いておく.

表 3:

d	$\mathrm{ord}_E(\alpha-\beta)$	k	m	$L_K\cap\widetilde{K}$	$E/\mathbb{Q}_3$	A_0	$X_{\widetilde{K}}$
32137	2	0	1	K_1^{an}	unramified	$(3,3)$	non-cyclic
34989	5	1	2	K_1^{an}	ramified	$(3,3)$	non-cyclic
42619	3	0	1	K_1^{an}	$E=\mathbb{Q}_p$	$(3,3)$	non-cyclic

(整数 k は (4) で定義された値で, $m=\min\{\mathrm{ord}_E(\alpha),\mathrm{ord}_E(\beta)\}$)

表 4:

d	$\mathrm{char}(X_{K^c_\infty})$ の生成元 mod 3^6
32137	$S^2+318S+657$
34989	$S^2+66S+117$
42619	$S^2+573S+252$

続いて, 定理 5.1 において, $\mathrm{ord}_E(\mu_{21})$, $\mathrm{ord}_E(\mu_{22})$ の値を決定して判定しなければならない例を紹介する.

例 5.8. $p=3$, $K=\mathbb{Q}(\sqrt{-2437})$ とする．PARI/GP から $\mathrm{Cl}_K \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\mathrm{Cl}_{K_1^{\mathrm{c}}} \cong \mathbb{Z}/3906\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ がわかる．従って, p-Sylow 部分群は $A_K \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $A_{K_1^{\mathrm{c}}} \cong \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ である．E を $f(S)$ の最小分解体とする．水澤のプログラムより

$$f(S) \equiv S^2 + 9S + 9 \bmod 3^3$$

であり, $f(S) = (S-\alpha)(S-\beta)$, $(\alpha\ \beta \in E)$ と分解されることもわかる．$f(S)$ の判別式が 45 mod 3^3 を満たすので, $E/\mathbb{Q}_p$ は不分岐拡大である．従って, $\mathrm{ord}_E(\alpha-\beta)=1$. また, 岩澤加群の同型類は [11] から,

$$X_{K_\infty^{\mathrm{c}}} \cong \langle (1,0),(0,1) \rangle_{\mathcal{O}_E}$$

であるので, $k=0$ とわかる．補題 3.6 から, $L_K \cap \widetilde{K} = K_1^{\mathrm{an}}$ である．実際に, $(I(3)/S(3^4)) \otimes \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3^3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3^4\mathbb{Z}$. よって $\mathrm{Gal}(L_K \cap \widetilde{K}/K)$ は $\mathrm{Gal}(L_K/K)$ の直和因子である．今回の例では求める必要はないが, [3, Theorem 2] を使うと K_1^{an} の $\mathbb{Q}$ 上の定義多項式は

$$x^6 - 20x^4 + 100x^2 + 38992$$

であることがわかる．さらに, 素数 53 と 251 は $K_1^{\mathrm{c}}/\mathbb{Q}$ で完全分岐する素数である．また,

$$\mathfrak{q} = (251, 18+\sqrt{-2437}),$$
$$\mathfrak{l} = (53, 1+\sqrt{-2437})$$

はそれぞれ 251 と 53 の上にある素イデアルである．$K_1^{\mathrm{c}}/\mathbb{Q}$ における 251 と 53 の素イデアル分解を次で表す:

$$251\mathcal{O}_{K_1^{\mathrm{c}}} = \mathfrak{Q}_1\overline{\mathfrak{Q}_1}\cdots\mathfrak{Q}_3\overline{\mathfrak{Q}_3},$$
$$53\mathcal{O}_{K_1^{\mathrm{c}}} = \mathfrak{L}_1\overline{\mathfrak{L}_1}\cdots\mathfrak{L}_3\overline{\mathfrak{L}_3}.$$

ここで, $\mathfrak{Q}_i, \overline{\mathfrak{Q}_i}, \mathfrak{L}_i$ と $\overline{\mathfrak{L}_i}$ は $\mathcal{O}_{K_1^{\mathrm{c}}}$ の素イデアルであり, $\mathfrak{Q}_i \mid \mathfrak{q}$, $\overline{\mathfrak{Q}_i} \mid \overline{\mathfrak{q}}$, $\mathfrak{L}_i \mid \mathfrak{l}$, $\overline{\mathfrak{L}_i} \mid \overline{\mathfrak{l}}$ $(i=1,2,3)$ を満たす．PARI/GP の計算によって, $\mathrm{Cl}_{K_1^{\mathrm{c}}} = \mathbb{Z}/3906\mathbb{Z}[\mathfrak{c}_1] \oplus \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}[\mathfrak{c}_2]$ (ただし, $\mathfrak{c}_1$ と $\mathfrak{c}_2$ は $\mathcal{O}_{K_1^{\mathrm{c}}}$ のイデアル) だとわかる．$[\mathfrak{b}_1] = 434[\mathfrak{Q}_1]$, $[\mathfrak{b}_2] = 434[\mathfrak{L}_1]$ とおくと, これらは $A_{K_1^{\mathrm{c}}}$ を生成する:

$$A_{K_1^{\mathrm{c}}} = \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}[434\mathfrak{Q}_1] \oplus \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}[434\mathfrak{L}_1].$$

さらに PARI/GP から

$$[\mathfrak{Q}_1] = 779[\mathfrak{c}_1] + 2[\mathfrak{c}_2], \quad [\mathfrak{L}_1] = 3004[\mathfrak{c}_1] + 8[\mathfrak{c}_2]$$

であることもわかる．再び PARI/GP から

$$\mathrm{Gal}(L_K/K_1^{\mathrm{an}}) = \left\langle \left(\frac{L_K/K}{\mathfrak{q}}\right) \cdot \left(\frac{L_K/K}{\mathfrak{l}}\right) \right\rangle$$

がわかるので,

$$\mathrm{Gal}(L_K/K_1^{\mathrm{an}}) = \left\langle \left(\frac{L_K/K}{\mathfrak{q}}\right)^{434} \cdot \left(\frac{L_K/K}{\mathfrak{l}}\right)^{434} \right\rangle$$

を得る．H を L_K の中間体で, $\langle (\frac{L_K/K}{\mathfrak{q}}) \rangle$ と対応する部分群とする．σ を $\mathrm{Gal}(K_1^{\mathrm{c}}/K)$ の生成元とする．このとき, PARI/GP から

$$\overline{\sigma}[\mathfrak{Q}_1] = 1229[\mathfrak{b}_1] + 8[\mathfrak{b}_2],$$
$$\overline{\sigma}[\mathfrak{L}_1] = 1318[\mathfrak{b}_1] + 8[\mathfrak{b}_2]$$

であることがわかる. 先ほどの例と同様に, $\mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(K_1^c/K)] \cong \Lambda/\omega_1(S)\Lambda$ から,

$$\overline{S}[\mathfrak{Q}_1] = -\frac{14424}{224}[\mathfrak{Q}_1] + \frac{3774}{224}[\mathfrak{L}_1],$$
$$\overline{S}[\mathfrak{L}_1] = -\frac{13488}{224}[\mathfrak{Q}_1] + \frac{3372}{224}[\mathfrak{L}_1].$$

ここで, $\overline{S} = S \bmod \omega_1(S)$. 定理 5.3 の可換図式から, $x_1, x_2 \in X_{K_\infty^c}$ として次を満たすものが選べる:

$$\psi_1(x_1 \bmod \omega_1(S)) = [434\mathfrak{Q}_1], \quad \psi_1(x_2 \bmod \omega_1(S)) = [434\mathfrak{Q}_1 + 434\mathfrak{L}_1].$$

従って,

$$Sx_2 \bmod \omega_1(S) = -\frac{35058}{224}x_1 + \frac{7146}{224}x_2 \bmod \omega_1(S).$$

係数の付値が

$$\mathrm{ord}_E\left(\frac{35058}{224}\right) = 1, \quad \mathrm{ord}_E\left(\frac{7146}{224}\right) = 2$$

であることに注意すると, 定理 5.3 から, $\mathrm{ord}_E(\mu_{21}) = \mathrm{ord}_E(\mu_{22}) = 0$ であることがわかる. よって定理 5.1 (iv) から $X_{\widetilde{K}}$ は $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K)]]$-加群として一元生成である.

例 5.8 と同様な手法で $X_{\widetilde{K}}$ の生成元の個数が判別できる虚二次体の例と, それらに対する K_1^{an} の定義多項式をそれぞれ以下の表 5 と表 6 に書いておく.

表 5:

d	$\mathrm{ord}_E(\alpha-\beta)$	k	m	$L_K \cap \widetilde{K}$	$E/\mathbb{Q}_3$	A_0	$X_{\widetilde{K}}$
2437	1	0	1	K_1^{an}	unramified	$(3,3)$	cyclic
3886	1	0	1	K_1^{an}	$E=\mathbb{Q}_p$	$(3,3)$	cyclic
4027	1	0	1	K_1^{an}	$E=\mathbb{Q}_p$	$(3,3)$	cyclic
7977	1	0	1	K_1^{an}	unramified	$(3,3)$	cyclic

(整数 k は (4) で定義された値で, $m = \min\{\mathrm{ord}_E(\alpha), \mathrm{ord}_E(\beta)\}$)

表 6:

d	K_1^{an} の定義多項式
2437	$x^6 - 20x^4 + 100x^2 + 38992$
3886	$x^6 - 66x^4 + 1089x^2 + 62176$
4027	$x^6 - 44x^4 + 484x^2 + 4027$
7977	$x^6 - 2x^5 - 53x^4 + 126x^3 + 8634x^2 - 1944x + 1296$

謝辞

講演の機会と素晴らしい交流の機会を与えて下さった世話人の金子昌信氏 (九州大学), 権寧魯氏 (九州大学), 岸康弘氏 (愛知教育大学) に感謝申し上げます.

参考文献

[1] N. Bourbaki, Elements of mathematics. Commutative algebra, Hermann, Paris; Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1972.

[2] D. Brink, Procyclic Galois Extensions of Algebraic Number Fields, Ph.D dissertation, University of Copenhagen, 2006.

[3] D. Brink, Prime decomposition in the anti-cyclotomic extensions, Math. Comp. **76** (2007), 2127–2138.

[4] B. Ferrero and L. C. Washington, The Iwasawa invariant μ_p vanishes for abelian number fields, Ann. of Math. (2) **109** (1979), 377–395.

[5] S. Fujii, Pseudo-null submodules of the unramified Iwasawa module for $\mathbb{Z}_p^2$-extensions, Interdiscip. Inform. Sci. **16** (2010), 55–66.

[6] S. Fujii, On a bound of λ and the vanishing of μ of $\mathbb{Z}_p$-extensions of an imaginary quadratic field, J. Math. Soc. Japan **65** (2013), 277–298.

[7] T. Fukuda, Iwasawa λ-invariants of imaginary quadratic fields, J. College Industrial Technology, Nihon Univ. **27** (1994), 35–88.

[8] R. Greenberg, The Iwasawa invariants of Γ-extensions of a fixed number field, Amer. J. Math. **95** (1973), 204–214.

[9] K. Iwasawa, On some modules in the theory of cyclotomic fields, J. Math. Soc. Japan **16** (1964) 42–82.

[10] K. Iwasawa, On p-adic L-functions, Ann. of Math. (2) **89** (1969) 198–205.

[11] M. Koike, On the isomorphism classes of Iwasawa modules associated to imaginary quadratic fields with $\lambda = 2$, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **6** (1999), 371–396.

[12] M. Kurihara, Iwasawa theory and Fitting ideals, J. Reine Angew. Math. **561** (2003), 39–86.

[13] B. Mazur and A. Wiles, Class fields of abelian extensions of $\mathbb{Q}$, Invent. Math. **76** (1984), 179–330.

[14] J. Minardi, Iwasawa modules for $\mathbb{Z}_p^d$-extensions of algebraic number fields, Ph.D dissertation, University of Washington, 1986.

[15] T. Miura, K. Murakami, R. Otsuki and K. Okano, Galois coinvariants of the unramified Iwasawa modules of multiple $\mathbb{Z}_p$-extensions, submitted.

[16] Y. Mizusawa, `http://mizusawa.web.nitech.ac.jp/index.html`.

[17] K. Murakami, On an upper bound of λ-invariants of $\mathbb{Z}_p$-extensions over an imaginary quadratic field, J. Math. Soc. Japan **71** (2019), 1005–1026.

[18] D. G. Northcott, Finite free resolutions, Cambridge Tracts in Mathematics, 71, Cambridge University Press, Cambridge-New York-Melbourne, 1976.

[19] M. Ozaki, Iwasawa invariants of $\mathbb{Z}_p$-extensions over an imaginary quadratic field, In: Class Field Theory–Its Centenary and Prospect, 387–399, Adv. Stud. Pure Math., 30, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2001.

[20] H. Sumida, Greenberg's conjecture and the Iwasawa polynomial, J. Math. Soc. Japan **49** (1997), 689–711.

[21] L. C. Washington, Introduction to cyclotomic fields. Second edition, Graduate Texts in Mathematics, 83, Springer-Verlag, New York, 1997.