高さ 1 の行列

岡崎 勝男 (九州大学)

概 要

このノートは, 第 13 回福岡数論研究集会に於いて著者が行った同一タイトルの講演の報告文章です. 講演中に詳しく述べられなかった証明の詳細や補題についても纏めてあります. 尚, ノートの内容は [3] に基づきます (と言うかほぼ [3] の和訳).

1 イントロダクション

K を代数体, 即ち有理数体 $\mathbb{Q}$ の有限次拡大とします. 本ノートを通じて, 以下の記号を固定します:

- $\mathcal{O}_K$: K の整数環;
- $\mathcal{M}_K^{\infty}$: K の $\mathbb{C}$ への体としての埋め込み全体;
- $\mathcal{M}_K^0$: $\mathcal{O}_K$ の (0) 以外の素イデアル全体;
- $\mathcal{M}_K := \mathcal{M}_K^{\infty} \sqcup \mathcal{M}_K^0$;
- $|\cdot|_v$: 各 $v \in \mathcal{M}_K$ に対して以下で定めた K の絶対値:

$$|x|_v := \begin{cases} |v(x)| & (v \in \mathcal{M}_K^{\infty}), \\ \#(\mathcal{O}_K/v)^{-\mathrm{ord}_v(x)} & (v \in \mathcal{M}_K^0); \end{cases}$$

- K_v: $|\cdot|_v$ による K の完備化.

このノートで扱うのは「高さ函数」と呼ばれる種々の整数論的な集合上に対して定義される函数なのですが, 先ずは高さ函数の中でも最も代表的且つ古典的なものの 1 つである「Weil 高さ H」を紹介します. $\vec{x} = {}^t(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ に対して

$$H(\vec{x}) := \left(\prod_{v \in \mathcal{M}_K} \max\{|x_1|_v, \ldots, |x_n|_v\} \right)^{1/[K:\mathbb{Q}]}$$

と定めます (但し慣習的に $H(\vec{0}) := 1$ とします). 今, 代数体 K に対して定義された H ですが, これは代数体 K の取り方に依らない事が知られていて ([1, Lemma 1.5.2]), 従って $\overline{\mathbb{Q}}^n$ 上の函数と見做す事が出来ます. この H を「Weil 高さ」と呼びます.

さて, 高さ函数と呼ばれるものは $\overline{\mathbb{Q}}^n$ 以外にも種々の整数論的な集合 (例えば $\overline{\mathbb{Q}}$-代数であったり, $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の代数多様体であったり, 或いはこれ等の函数体類似であったり $\cdots$) 上で定義されたものが知られており, 同じ整数論的な集合上に複数の高さ函数が定義される事もしばしばで

す．こういった種々の高さ函数を公理的に記述する方法は (少なくとも自分は) 知らないのですが,「高さ函数とは何か？」という問いに標語的に答えるなら「ある種の算術的な複雑さを測る函数である」となります．従って高さ函数と呼ばれるものが与えられた時, そいつがどの様な複雑さを測っているのかを把握するのは最も基本的な問いの 1 つであり, その手段の 1 つとして, 高さの値が最小になる様な元を決定する事が考えられます．例えば先の Weil 高さ H については, 次の定理が知られています.

Theorem (A) ([1, Theorem 1.5.9])**.** $\vec{x} \in \overline{\mathbb{Q}}^n$ に対して, 以下は同値:

- $H(\vec{x}) = 1$;[1]
- $r \in \overline{\mathbb{Q}}$ と全ての成分が 0 か 1 の冪根であるベクトル $\vec{e} \in \overline{\mathbb{Q}}^n$ が存在して, $\vec{x} = r\vec{e}$ となっている.

さて, このノートの目的は, [4] で導入された $M_n(\overline{\mathbb{Q}})$ 上の 2 つの高さ函数 $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}^{\mathrm{op}}$ を上記目的意識に基づいて調べる事, つまり $\mathcal{H}(A) = 1$ や $\mathcal{H}^{\mathrm{op}}(A) = 1$ を満たす行列 $A \in M_n(\overline{\mathbb{Q}})$ の必要十分条件を求める事ですが[2], その為にも先ずは $\mathcal{H}$ と $\mathcal{H}^{\mathrm{op}}$ の定義を述べる事にします．先ずは K^n 上にノルムの族 $\{N_v\}_{v\in\mathcal{M}_K}$ を

$$N_v(\vec{x}) := \begin{cases} \sqrt{|x_1|_v^2 + \cdots + |x_n|_v^2} & (v \in \mathcal{M}_K^\infty), \\ \max\{|x_1|_v, \ldots, |x_n|_v\} & (v \in \mathcal{M}_K^0) \end{cases}$$

で定めます．これを用いて $M_n(K)$ 上に 2 つの函数 $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}^{\mathrm{op}}$ を以下で定めます:

$$\mathcal{H}(A) := \left(\prod_{v\in\mathcal{M}_K} \|A\|_v \right)^{1/[K:\mathbb{Q}]},$$

$$\mathcal{H}^{\mathrm{op}}(A) := \sup_{\vec{x}\in\overline{\mathbb{Q}}^n\setminus\{\vec{0}\}} \left\{ \left(\prod_{v\in\mathcal{M}_{K_{\vec{x}}}} \frac{N_v(A\vec{x})}{N_v(\vec{x})} \right)^{1/[K_{\vec{x}}:\mathbb{Q}]} \right\}.$$

ここに $\|\cdot\|_v$ は $M_n(K)$ 上に N_v から誘導される作用素ノルムで, $K_{\vec{x}}$ は各 $\vec{x} = {}^t(x_1, \ldots, x_n) \in \overline{\mathbb{Q}}^n \setminus \{\vec{0}\}$ に対して $K_{\vec{x}} := K(x_1, \ldots, x_n)$ と定義されたものです．ここでも慣習的に $\mathcal{H}(O) = \mathcal{H}^{\mathrm{op}}(O) = 1$ と定めます．Weil 高さ H 同様, $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}^{\mathrm{op}}$ も K の取り方に依らない, 即ち $M_n(\overline{\mathbb{Q}})$ 上の函数である事が示せます (詳しくはセクション 2, 3 参照).

では本ノートの主定理を述べたいのですが, その前に 1 つだけ用語を導入しておきます．行列 B が scattered であるとは, B のどの行もどの列もノンゼロ成分を高々1 つしか持っていない事とします．以上の準備の下で

Theorem 1.1. (1) $A \in M_n(\overline{\mathbb{Q}})$ に対して, 以下は同値:

- $\mathcal{H}(A) = 1$;
- 全ての成分が 0 か 1 の冪根であり scattered な行列 $B \in M_n(\overline{\mathbb{Q}})$ と定数 $r \in \overline{\mathbb{Q}}^\times$ で $A = rB$ となるものが存在する.

(2) $A \in M_n(\overline{\mathbb{Q}})$ に対して, 以下は同値:

[1] $H(^\forall\vec{x}) \geq 1$ である事は, 定義からほぼ直ちに判ります.
[2] $\mathcal{H}(^\forall A) \geq 1$ や $\mathcal{H}^{\mathrm{op}}(^\forall A) \geq 1$ も, 定義からほぼ直ちに判ります.

- $\mathcal{H}^{\mathrm{op}}(A) = 1$;
- A はノンゼロな行を高々1つしか持たない, 又は全ての成分が0か1の冪根であり scattered な行列 $B \in M_n(\overline{\mathbb{Q}})$ と定数 $r \in \overline{\mathbb{Q}}^{\times}$ で $A = rB$ となるものが存在する.

2 Weil L^2 高さ

セクション1で見た通り, 通常の Weil 高さが各 $v \in \mathcal{M}_K$ に対して L^{∞} ノルムを用いて定義されていた一方で, $\mathcal{H}$ や $\mathcal{H}^{\mathrm{op}}$ は $v \in \mathcal{M}_K^{\infty}$ に対しては L^2 ノルムを用いて定義されていたのでした. なので $\mathcal{H}$ や $\mathcal{H}^{\mathrm{op}}$ を考える上では, 次の Weil L^2 高さと呼ばれるものを用いるのがより適切です: 各 $\vec{x} \in K^n$ に対して

$$H_2(\vec{x}) := \left(\prod_{v \in \mathcal{M}_K} N_v(\vec{x}) \right)^{1/[K:\mathbb{Q}]},$$

$$H_2^+(\vec{x}) := \left(\prod_{v \in \mathcal{M}_K} \max\{1, N_v(\vec{x})\} \right)^{1/[K:\mathbb{Q}]}.$$

H_2 に対しても H の場合同様, $H_2(\vec{0}) := 1$ と見做します. 代数体 K の取り方に依らず, 従って $\overline{\mathbb{Q}}^n$ 上の函数と見做せるのも同様です. この H_2 を用いれば

$$\mathcal{H}^{\mathrm{op}}(A) = \sup_{\vec{x} \in \overline{\mathbb{Q}}^n \setminus \{\vec{0}\}} \left\{ \frac{H_2(A\vec{x})}{H_2(\vec{x})} \right\}$$

となる事が判り, 従って $\mathcal{H}^{\mathrm{op}}$ も体の取り方に依らず, $M_n(\overline{\mathbb{Q}})$ 上の函数と見做す事が出来ると判ります (収束性は次のセクションで論じます).

これ等 H_2, H_2^+ に対しても Theorem (A) の類似を示しておきます (Theorem 1.1 の証明に使いもします).

Lemma 2.1. (1) $\vec{x} \in \overline{\mathbb{Q}}^n$ に対して, 以下は同値:

- $H_2(\vec{x}) = 1$;
- $\vec{x}$ はノンゼロ成分を高々1つしか持たない.

(2) $\vec{x} \in \overline{\mathbb{Q}}^n$ に対して, 以下は同値:

- $H_2^+(\vec{x}) = 1$;
- $\vec{x}$ の全ての成分は0か1の冪根で, しかもノンゼロ成分を高々1つしか持たない.

証明. (1) 前者ならば後者なのは, 不等式 $H_2(a, b) > H_2(a)$ $(a, b \neq 0)$ より判る. 後者ならば前者なのは積公式 ([1, Proposition 1.4.4]) より明らか.

(2) 前者ならば後者なのは (1) 同様. なので後者ならば前者である事を示す. 不等式 $H(1, \vec{x}) \leq H_2^+(\vec{x})$ と Thoerem (A) より $\vec{x}$ の全成分は0か1の冪根で, 不等式 $H_2(\vec{x}) \leq H_2^+(\vec{x})$ と (1) より ノンゼロ成分は高々1つだと判る. □

3 $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}^{\mathrm{op}}$ の諸性質

このセクションでは, $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}^{\mathrm{op}}$ の諸性質の内, 後に必要となるものを簡単に纏めておきます.

先ずはセクション 1 で導入した作用素ノルムについて補足します. $B = (b_{ij}) \in M_n(K_v)$ に対して

$$\|B\|_v = \begin{cases} \sqrt{\mathrm{sp}(B^*B)} & (v \in \mathcal{M}_K^\infty), \\ \max_{i,j}\{|b_{ij}|_v\} & (v \in \mathcal{M}_K^0) \end{cases} \tag{3.1}$$

となる事が知られています. ここに B^* は B の複素共役で, $\mathrm{sp}(B^*B)$ は B^*B の最大固有値です. 従って有限個の $v \in \mathcal{M}_K$ を除き $\|B\|_v = 1$ が判るので, セクション 1 の $\mathcal{H}$ は well-defined であり, $\mathcal{H}$ が K の取り方に依らない事から $\mathcal{H}^{\mathrm{op}}(A) \leq \mathcal{H}(A) \leq \infty$ が常に成り立ち, 従って $\mathcal{H}^{\mathrm{op}}$ も well-defined である事が判ります.

次に, $\mathcal{H}$ を調べる為に, 以下の補助的な高さ函数 $\mathcal{H}^+$ を導入します: $A \in M_n(K)$ に対し

$$\mathcal{H}^+(A) := \left(\prod_{v\in\mathcal{M}_K} \max\{1, \|A\|_v\}\right)^{1/[K:\mathbb{Q}]}.$$

(3.1) より, 以下を得ます.

Lemma 3.1. $A \in M_n(\overline{\mathbb{Q}})$ に対し

$$\mathcal{H}^+(A) = \mathcal{H}\begin{pmatrix} 1 & {}^t\vec{0} \\ \vec{0} & A \end{pmatrix}.$$

従って特に $\mathcal{H}^+$ も $M_n(\overline{\mathbb{Q}})$ 上の函数と見做せる事が判りました.

以下の不等式は, 簡単ですが主定理の証明で非常に重要な役割を果たします.

Lemma 3.2. $A = (\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_n}) \in M_n(\overline{\mathbb{Q}})$ とする. 各 $1 \leq j \leq n$ に対して

(1) $H_2(\vec{a}_j) \leq \mathcal{H}^{\mathrm{op}}(A)$.

(2) $H_2^+(\vec{a}_j) \leq \mathcal{H}^+(A)$.

証明. $(a_{ij}) := A$, $K := \mathbb{Q}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$, $\vec{e}_j := {}^t(0, \ldots, \underset{j\text{-th}}{\underset{\wedge}{1}}, \ldots, 0)$ とする.

(1)

$$H_2(\vec{a}_j) = \frac{H_2(A\vec{e}_j)}{H_2(\vec{e}_j)} \leq \mathcal{H}^{\mathrm{op}}(A).$$

(2)

$$H_2^+(\vec{a}_j) = \left(\prod_{v\in\mathcal{M}_K} \max\left\{1, \frac{N_v(A\vec{e}_j)}{N_v(\vec{e}_j)}\right\}\right)^{1/[K:\mathbb{Q}]} \leq \mathcal{H}^+(A).$$

□

$\mathbb{F}$ を $\mathbb{R}$ か $\mathbb{C}$ とし, $B \in M_n(\mathbb{F})$ とします. 線型代数より

$$\|B^*\| = \|B\|$$

です. ここで $\|\cdot\|$ は $\mathbb{F}^n$ 上の通常の L^2 ノルムから誘導される作用素ノルムです. 従って $A \in M_n(K)$ と $\sigma \in \mathcal{M}_K^\infty$ に対し

$$\|{}^tA\|_\sigma = \|(\sigma(a_{ji}))\| = \|(\overline{\sigma}(a_{ij}))\| = \|A\|_{\overline{\sigma}}$$

が成り立つ事から, 以下を得ます.

Lemma 3.3. $A \in M_n(\overline{\mathbb{Q}})$ に対して, $\mathcal{H}(A) = \mathcal{H}({}^tA)$ と $\mathcal{H}^+(A) = \mathcal{H}^+({}^tA)$ が成立.

次は Theorem 1.1 を証明する上で鍵となる補題です.

Lemma 3.4. $A \in M_n(\overline{\mathbb{Q}})$ に対して, 以下は同値:

- $\mathcal{H}(A) = 1$;
- A の全ての成分は 0 か 1 の冪根であり, 且つ A は scattered.

証明. 後者ならば前者である事は (3.1) から判るので, 前者ならば後者である事を示す. Lemma 3.2 (2) と Lemma 2.1 (2) より, A の各列ベクトルは全ての成分が 0 か 1 の冪根で, 且つノンゼロ成分を高々1 つしか持たない. 更に Lemma 3.3 より, A の各行ベクトルに対しても同様の事が言える. □

4 Theorem 1.1 の証明

(1) 後者ならば前者なのは明らかなので, 前者ならば後者である事を示す. $\mathcal{H}(A) = 1$ なる $A = (a_{ij}) \in M_n(\overline{\mathbb{Q}}) \setminus \{O\}$ を取る. Lemma 3.2 (1) と Lemma 2.1 (1) より, Lemma 3.4 と同様にして A は scattered である事が判る. ここで, A に左右から置換行列を掛けても $\mathcal{H}(A)$ の値は変わらない事から $a_{11} \neq 0$ と仮定出来, 更に積公式から $a_{11} = 1$ だと仮定出来る. 従って A は

$$\begin{pmatrix} 1 & {}^t\vec{0} \\ \vec{0} & A' \end{pmatrix}$$

の形だと仮定出来る. ここで $A' \in M_{n-1}(\overline{\mathbb{Q}})$ である. この時, Lemma 3.1 より $\mathcal{H}^+(A') = \mathcal{H}(A) = 1$ なので, Lemma 3.4 より証明は終っている.

(2) 先ずは後者ならば前者である事を示す. A のノンゼロな行ベクトルが高々1 つだとすると

$$A = \begin{pmatrix} & O & \\ a_1 & \cdots & a_n \\ & O & \end{pmatrix}.$$

この時, 任意の $\vec{x} = {}^t(x_1, \dots, x_n) \in \overline{\mathbb{Q}}^n \setminus \{\vec{0}\}$ に対して

$$\begin{aligned} H_2(A\vec{x}) &= H_2(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n) = 1, \\ H_2(\vec{x}) &\geq 1. \end{aligned}$$

従って $\mathcal{H}^{\mathrm{op}}(A) = 1$ が判る. 次に A が全ての成分が 0 か 1 の冪根で且つ scattered だとすると, (1) より $\mathcal{H}(A) = 1$ となり, 従って不等式 $\mathcal{H}^{\mathrm{op}}(A) \leq \mathcal{H}(A)$ から $\mathcal{H}^{\mathrm{op}}(A) = 1$ が判る.

次に前者ならば後者である事を示す. $A = (a_{ij}) \in M_n(\overline{\mathbb{Q}})$ は $\mathcal{H}^{\mathrm{op}}(A) = 1$ を満たすとする. この時, Lemma 3.2 (1) と Lemma 2.1 (1) から, A の各列ベクトルはノンゼロ成分を高々1 つしか持たないと判る. A が 2 つのノンゼロ成分 a_{ij}, a_{kl} で $j < l$ と $i \neq k$ を満たすものを持つと仮定する.

$$\vec{c} := {}^t(0, \dots, 0, \underset{\substack{\wedge \\ j\text{-th}}}{1}, 0, \dots, 0, \underset{\substack{\wedge \\ l\text{-th}}}{1}, 0, \dots, 0)$$

とする. この時, 計算すれば

$$\begin{aligned} H_2(A\vec{c}) &= H_2\left(\frac{1}{a_{ij}}A\vec{c}\right) = H_2(1,a), \\ H_2(\vec{c}) &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

が判る. ここで $a := a_{kl}/a_{ij}$ である. 不等式 $H_2(A\vec{c})/H_2(\vec{c}) \leq \mathcal{H}^{\mathrm{op}}(A)$ より, $H_2(1,a) = \sqrt{2}$ が判る. $K := \mathbb{Q}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$, $d := [K : \mathbb{Q}]$ とする.

$$\max\{1,t\} \geq \sqrt{t}, \tag{4.1}$$

$$\sqrt{1+t^2} \geq \sqrt{2t} \tag{4.2}$$

が実数 $t \geq 0$ に対して成り立ち, しかも等号成立が $t = 1$ の時である事に注意する. これより

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &\geq H_2(1,a) \\ &\geq \left(\prod_{v\in\mathcal{M}_K^0} |a|_v\right)^{1/2d} \left(2^d \prod_{v\in\mathcal{M}_K^\infty} |a|_v\right)^{1/2d} && (\because (4.1),\ (4.2)) \\ &= \sqrt{2} && (\because \text{積公式}) \end{aligned} \tag{4.3}$$

であり, 不等式 (4.3) は等式である必要が在ると判る. 従って全ての $v \in \mathcal{M}_K$ に対して $|a|_v = 1$ となり, Theorem (A) から a は 1 の冪根となる. 従って, 若し A が scattered なら, 全ての成分が 0 か 1 の冪根であり scattered な行列 $B \in M_n(\overline{\mathbb{Q}})$ と定数 $r \in \overline{\mathbb{Q}}^\times$ で $A = rB$ となるものが存在する. 今, A は scattered でなく, 更にノンゼロな行ベクトルを 2 つ以上持つとする (背理法). つまり 0 でない A の成分 a_{ij}, a_{kl}, a_{km} で, $i \neq k$ and $j \neq l \neq m \neq j$ となるものが存在する. 簡単の為 $j < l < m$ とする (そうでない場合も以下の議論は同様に可能). 先の議論より, $u_1 := a_{kl}/a_{ij}$ と $u_2 := a_{km}/a_{ij}$ は 1 の冪根である筈. $u_1^p = u_2^q = 1$ なる自然数 p, q を取り,

$$\vec{d} := {}^t(0, \ldots, 0, \underset{\underset{j\text{-th}}{\wedge}}{1}, 0, \ldots, 0, \underset{\underset{l\text{-th}}{\wedge}}{u_1^{p-1}}, 0, \ldots, 0, \underset{\underset{m\text{-th}}{\wedge}}{u_2^{q-1}}, 0, \ldots, 0)$$

と置く. この時,

$$\begin{aligned} H_2(A\vec{d}) &= H_2\left(\frac{1}{a_{ij}}A\vec{d}\right) = H_2(1,2) = \sqrt{5}, \\ H_2(\vec{d}) &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

であり, 従って $\mathcal{H}^{\mathrm{op}}(A) \geq H_2(A\vec{d})/H_2(\vec{d}) = \sqrt{5/3} > 1$ となるけど, これは如何考えても $\mathcal{H}^{\mathrm{op}}(A) = 1$ に矛盾する. 従って, A が scattered でない場合は, A はノンゼロな行ベクトルを高々1 つしか持たない.

謝辞

講演の機会を与えて下さった世話人の金子昌信先生, 権寧魯先生, 岸康弘先生に感謝申し上げます. また, このノートの結果は現指導教官の竹田雄一郎先生の指導無では絶対に得られなかったものなので, この場を借りて感謝申し上げます.

参考文献

[1] E. Bombieri and W. Gubler, Heights in Diophantine Geometry, New Mathematical Monographs, 4, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[2] M. Okazaki, *A Bogomolov type property relative to heights on* $M_n(\overline{\mathbb{Q}})$, Master thesis, Kyushu University, 2019.

[3] M. Okazaki, *Height one matrices*, to appear in Nihonkai Mathematical Journal.

[4] V. Talamanca, *A Gelfand-Beurling type formula for heights on endomorphism rings*, J. Number Theory **83** (2000), no. 1, 91–105.