一般化 $3x+1$ 問題の軌道周期

藤井 大輔 (名古屋大学)

概 要

$3x+1$ 問題 (別名 Collatz 予想) は, 数論の未解決問題であり, 今も様々なアプローチにより研究が続けられている. 本報告では, $3x+1$ 問題の概要を述べたあと, 先行研究による著名な結果を 3 つほど紹介し, そのうちの 1 つを筆者自ら拡張した結果を証明と合わせて記す. 本報告は筆者が第 13 回福岡数論集会 (2019) において行った発表を元にしている.

1 $3x+1$ 問題とは？

本節では, $3x+1$ 問題 (別名 Collatz 予想) とよばれる整数論上の問題について, 予想の主張と研究の背景などを述べ, 関連する用語を準備する.

1.1 予想の主張

以下, 正の整数の集合を $\mathbb{Z}_+$ と記す. $3x+1$ 問題および予想の定義について, Lothar Collatz 本人による [Col] から以下のように引用した.

予想 1.1.1 ($3x+1$ 予想 (Collatz による定式化))**.** 関数 $C\colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ を

$$C(x) = \begin{cases} x/2 & (x \text{ is even}) \\ 3x+1 & (x \text{ is odd}) \end{cases}$$

と定めるとき, 任意の正整数は C の繰り返し適用によって 1 に至る.

この予想は 1 から順に約 2^{65}〜2^{70} までの正整数についてはなりたつことが, 計算機により正しいと検証されている [Sil], [Roo]. この予想は本報告作成時点 (2019 年 11 月) で未解決であり, 証明も反例も与えられていない.

$3x+1$ 問題の研究では, 関数 C の代わりに次に紹介する関数 T_{3x+1} を用いることが多い.

予想 1.1.2 ($3x+1$ 予想 (T_{3x+1} を用いた表示))**.** 関数 $T_{3x+1} : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ を

$$T_{3x+1}(x) = \begin{cases} x/2 & (x \equiv 0 \bmod 2) \\ 3x+1/2 & (x \equiv 1 \bmod 2) \end{cases}$$

と定めるとき, 任意の $x \in \mathbb{Z}_+$ に対し, ある $k \in \mathbb{Z}_+$ が存在して,

$$T^k_{3x+1}(x) = 1$$

がなりたつ.

以下, 本報告では T_{3x+1} 関数を用いた表示を, 正式な予想として採用する.

1.2 用語の準備

$3x+1$ 問題に, より洗練された表示を与える目的で, 軌道 (orbit)・サイクル (cycle) という語句を準備する. これらの用語は次節以降で紹介する定理にも用いる.

定義 1.2.1 (軌道)**.** 集合 S の要素 $x \in S$, S 上の変換 $f : S \to S$ に対して, 無限列

$$(x, f(x), f^2(x), \dots)$$

を x の f による軌道 (orbit) という.

例. 集合 $\mathbb{Z}_+$ の要素 7 の, $\mathbb{Z}_+$ 上の変換 T_{3x+1} による軌道は

$$(7, 11, 17, 26, 13, 20, 5, 8, 4, 2, 1, 2, 1, 2, 1, \dots)$$

である.

定義 1.2.2 (サイクル)**.** x の f による軌道において, ある $k, l \in \mathbb{Z}_+$ が存在して $f^{k+l}(x) = f^k(x)$ がなりたち, かつ $f^k(x), f^{k+1}(x), \dots, f^{k+l-1}(x)$ が相異なるとき, その軌道の連続した部分列

$$(f^k(x), f^{k+1}(x), \dots, f^{k+l-1}(x))$$

を (x の f による軌道に含まれる) 長さ l のサイクルとよぶ.

サイクルは巡回置換 $(1, \dots, l)$ でうつりあう同値関係で等しいものとする. 軌道がサイクルを含むとき周期的 (periodic) であるといい, そうでないとき発散的 (divergent) であるという.

例. 7 の T_{3x+1} による軌道

$$(7, 11, 17, 26, 13, 20, 5, 8, 4, 2, 1, 2, 1, 2, \dots)$$

は, サイクル

$$(1, 2)\,(= (2, 1))$$

を含んでいる. また, $1, 3, 22$ の T_{3x+1} による軌道たち

$$(1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots),$$
$$(3, 5, 8, 4, 2, 1, 2, 1, 2, \dots),$$
$$(22, 11, 20, 10, 5, 4, 2, 1, 2, 1, 2, \dots)$$

は, いずれもサイクル $(1, 2)$ を含んでいる.

サイクルという言葉遣いにより, $3x+1$ 予想は以下のように言い換えられる.

予想 1.2.3 ($3x+1$ 予想 (言い換え))**.** 任意の $x \in \mathbb{Z}_+$ に対して x の T_{3x+1} についての軌道はサイクル $(1, 2)$ を含む.

$3x+1$ 予想の反例には, 以下の 2 つの場合がありえる.

(i) ある $x \in \mathbb{Z}_+$ で, その T_{3x+1} による軌道に $(1, 2)$ でないサイクルを含むものが存在する.

(ii) ある $x \in \mathbb{Z}_+$ で, その T_{3x+1} による軌道が発散的であるものが存在する.

どちらの場合の反例も起こらないことを示すことは, $3x+1$ 予想の肯定的解決と同義である. (片方の場合の反例が起こらないことを証明できれば「$3x+1$ 問題は半分解けた」といえる, と筆者は考えている.)

2　$3x+1$ 問題について何が知られているか？

本節では, $3x+1$ 問題についての先行研究において, 歴史的に重要な結果 (と, 筆者が思うもの) を 3 題ほど紹介する. 次節で述べる主定理は, このうちの 1 題を拡張するものである.

2.1　決定不能性に関する結果

Conway は, $3x+1$ 問題について次のような一般化を考え, それが決定不能問題であることを示した [Con].

定義 2.1.1 (Conway による一般化 $3x+1$ 関数)**.** $\mathbb{Z}_+$ 上の関数 Con で, ある整数 $d \geq 2$ と, ある有理数, $a_0, b_0, \ldots, a_{d-1}, b_{d-1}$ が存在し, d 個の場合分けによって

$$Con(x) = (a_i x + b_i)/d \ (x \equiv i \bmod d)$$

と表せるものを《Conway による一般化 $3x+1$ 関数》または《Conway Class》に属する関数という. ただし, ここで $\mathbb{Z}_+$ 上の変換であるという要請を満たすために, すべての $x \in \mathbb{Z}_+$ に対して,

$$d \mid (a_i x + b_i) \ (x \equiv i \bmod d)$$

となるよう, $a_0, b_0, \ldots, a_{d-1}, b_{d-1}$ たちを定めるものとする.

定理 2.1.2 ([Con])**.** 《Conway Class》の関数 Con たちすべてと, $x \in \mathbb{Z}_+$ すべてに対して x の Con による軌道が周期的であるかを判定する問題は, 決定不能 (undecidable) である.

2.2　大局的挙動に関する結果

定理 2.2.1 ([Ter], [Eve])**.** $x \in \mathbb{Z}_+$ で, T_{3x+1} による軌道に x 未満の正整数があらわれるものは, 自然密度が 1 である. すなわち $n \in \mathbb{Z}_+$ に対して,

$$P(n) = \sharp\{(n \geq)\, x \in \mathbb{Z}_+ \mid \exists k \in \mathbb{Z}_+ \text{ s.t. } T_{3x+1}^k(x) < x\}$$

と定めるとき,

$$\lim_{n \to \infty} P(n)/n = 1$$

がなりたつ.

この結果は $3x+1$ 予想の例外が 0 から十分遠方に置いても”少ない”ことを示唆している.

定理 2.2.2 ([Hep], [Mol])**.** 任意に $d \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{1\}$ と, $\gcd(d, m) = 1$ なる $m \in \mathbb{Z}_+$ をとり, $r_i \in \mathcal{O}_K$ $(i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z})$ を定め, これらを用いて, 関数 $H : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ を

$$H(x) = \begin{cases} x/d & (x \equiv 0 \bmod d) \\ (mx - r_i)/d & (x \equiv i \bmod d) \end{cases}$$

と定める. ただし, F が $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ の関数であるよう各 r_i は,

$$mi \equiv r_i \bmod d\mathbb{Z}$$

を満たすとする．このような関数は《Hasse Class》に属するという．このとき, $m < d^{d-1}$ を満たすなら, $x \in \mathbb{Z}_+$ で, H による軌道に x 未満の正整数があらわれるものは, 自然密度が 1 である．すなわち $n \in \mathbb{Z}_+$ に対して,

$$P(n) = \sharp\{(n \geq)x \in \mathbb{Z}_+ \mid \exists k \in \mathbb{Z}_+ \text{ s.t. } H^k(x) < x\}$$

と定めるとき,

$$\lim_{n\to\infty} P(n)/n = 1$$

がなりたつ．

T_{3x+1} が《Hasse Class》に属する関数であることを, $m = 3, d = 2, r_1 = -1$ ととることで確かめられる．したがって, 定理 2.2.2 は定理 2.2.1 の結果を含んでいる．

2.3 局所化に関する結果

Lagarias は局所化 $\mathbb{Z}_{(2)}$ に拡張して考えることで, T_{3x+1} のサイクルに関するさまざまな性質について研究した [Lag]．この論文以降, どのようなサイクルが現れうるかという研究や, 2 進整数 $\mathbb{Z}_2$ へ定義域を拡張した T_{3x+1} 関数をを調べる研究への流れが作られた．ここでは [Lag] に含まれる数多くの結果から, 筆者が面白いとおもうものを 1 つ紹介する．剰余軌道 (residue orbit) という用語を準備する．

定義 2.3.1 (剰余軌道)**.** 集合 S から S のある同値関係による剰余類 R への自然な全射 $\overline{\cdot} : S \to R$ があるとき, $x \in S$ の, 関数 $f : S \to S$ による軌道の各要素に全射 $\overline{\cdot}$ をほどこして得られる無限列, すなわち

$$(\overline{x}, \overline{f(x)}, \overline{f^2(x)}, \dots)$$

を x の f による $\overline{\cdot}$ についての剰余軌道という．

以下, $3x + 1$ 関数とその一般化では, 扱う関数の場合分けに用いられる法 (mod) による剰余類についての, 剰余軌道を考えるものとする．例えば関数 T_{3x+1} に対しては, 以下のように剰余類 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ についての剰余軌道を考える．

注意として [Lag] においては, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ についての剰余軌道に相当するものを偶奇列 (parity vector) と呼んでいる．しかし, 本報告の以降で偶奇 (mod 2) のみならず様々な剰余類を扱いたいため, より一般な剰余軌道という用語をここで準備した．

例. $\overline{\cdot} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ に対して $x \in \mathbb{Z}_+$ の T による ($\overline{\cdot} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ についての) 剰余軌道とは, $\{\bar{0}, \bar{1}\}$ の無限列

$$(\overline{x}, \overline{T_{3x+1}(x)}, \overline{T^2_{3x+1}(x)}, \dots)$$

のことである．特に 7 の T_{3x+1} による剰余軌道とは

$$(\overline{7}, \overline{11}, \overline{17}, \overline{26}, \overline{13}, \overline{20}, \overline{10}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{4}, \overline{2}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{1}, \dots) = (\bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{0}, \dots)$$

のことである．

定理 2.3.2 ([Lag])**.** 任意の $x \in \mathbb{Z}_+$ に対して, 以下の (i) と (ii) は同値である

(i) x の T_{3x+1} による軌道が周期的.

(ii) x の T_{3x+1} による剰余軌道が周期的.

(i) $\Rightarrow$ (ii) は明らかである一方, (ii) $\Rightarrow$ (i) は非自明である. T_{3x+1} と類似の関数 S について, 同様の定理が成り立たないことを以下に観察する.

例. 関数 $S : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ を

$$S(x) = \begin{cases} x/2 & (x \equiv 0 \bmod 2) \\ 2x+1 & (x \equiv 1 \bmod 2) \end{cases}$$

で与える. このとき, $1 \in \mathbb{Z}_+$ の S による軌道は

$$(1, 3, 7, 15, 31, \dots)$$

と (増大列であることがすぐわかり) 発散的である一方, 剰余軌道は

$$(\bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \dots)$$

と周期的である.

しかし, T_{3x+1} 関数の場合にはこのようなことが起こらず, 軌道と剰余軌道はサイクルを持つか否かを常に同じくする, というのが定理 2.3.2 の主張するところである.

3 主定理

定理 2.3.2 を拡張する以下の結果を得たのでこれを紹介する.

定理 3.0.1 (F. 2018)**.** 《Hasse Class》に属する任意の関数 H と, 任意の $x \in \mathbb{Z}$ に対して, 以下の (i) と (ii) は同値である.

(i) x の H による軌道が周期的.

(ii) x の H による剰余軌道が周期的.

3.1 証明

Proof. (i) $\Rightarrow$ (ii) は明らかであるから, (ii) $\Rightarrow$ (i) を示す.
《Hasse Class》から任意に一つ関数 H をとって,

$$H(x) = \begin{cases} x/d & (\text{if } x \equiv 0 \bmod d) \\ (mx - r_i)/d & (\text{if } x \equiv i \bmod d) \end{cases}$$

とする. ここで, d 個の行列 $A_0, \dots, A_{d-1}$ を

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1/d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_i = \begin{pmatrix} m/d & -r_i/d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (i \in \{1, \dots, d-1\})$$

と定めるとき, 任意の $x \in \mathbb{Z}_+$ に対して,

$$x \equiv i \bmod d \implies \begin{pmatrix} H(x) \\ 1 \end{pmatrix} = A_i \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

がなりたつ. (ii) の前提より $x \in \mathbb{Z}$ の H による剰余軌道が, あるサイクル $(a_1, \ldots, a_l)$ を含んでいるから, この剰余軌道においてサイクルが最初に現れるのが先頭から k 番め $(\overline{H^{k-1}(x)})$ として, $X = H^{k-1}(x)$ とおく. このとき k 番めから $k+l-1$ 番めの剰余軌道は $a_1, \ldots, a_l$ となることから,

$$\begin{pmatrix} T^l(X) \\ 1 \end{pmatrix} = A_{a_l} \times \cdots \times A_{a_1} \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$$

がなりたつ. 以降, 剰余軌道はサイクルを繰り返すため, 任意の $n \in \mathbb{Z}_+$ に対して

$$\begin{pmatrix} T^{ln}(X) \\ 1 \end{pmatrix} = (A_{a_l} \times \cdots \times A_{a_1})^n \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$$

がなりたつ. ここで行列 C を

$$C = A_{a_l} \times \cdots \times A_{a_1}$$

と定めると, $A_i (i \in \{0, \ldots, d-1\})$ たちは上三角行列であったから, $s = \sharp\{a_i \neq 0 \,|\, i \in \{1, \ldots, l\}\}$ とし, ある $\epsilon \in \mathbb{Q}$ が存在して C は,

$$C = \begin{pmatrix} m^s/d^l & \epsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と書ける. C の固有値は, その対角成分

$$m^s/d^l, 1$$

であり, それぞれに対応する固有ベクトルはある $q \in \mathbb{Q}$ が存在して

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix}$$

とかける. C をスペクトル分解すると,

$$C = m^s/d^l \begin{pmatrix} 1 & -q \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とあらわせる. したがって,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} T^{ln}(X) \\ 1 \end{pmatrix} &= C^n \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= (m^s/d^l)^n \begin{pmatrix} 1 & -q \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (m^s/d^l)^n (X - q) + q \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

がなりたつ．$d > 1$ であるから $\mathrm{ord}_p(d) \geq 1$ なる素数 p を 1 つとれる．$\gcd(m, d) = 1$ より，$\mathrm{ord}_p(m) = 0$ である．また，$H^{ln}(X) \in \mathbb{Z}$ より，

$$\mathrm{ord}_p((m^s/d^l)^n(X-q)+q) \geq 0$$

である．ord_p に関する強三角不等式より，

$$0 \leq \mathrm{ord}_p((m^s/d^l)^n(X-q)+q) \leq \min(-nl\mathrm{ord}_p(d) + \mathrm{ord}_p(X-q), \mathrm{ord}_p(q))$$

がなりたつ．ここで $n \to \infty$ とするとき，l, d, q 固定のもとで $-nl\mathrm{ord}_p(d) \to -\infty$ となるゆえ，上の不等式が常になりたつために，$\mathrm{ord}_p(X-q) = \infty$ すなわち $X - q = 0$ である必要がある．すると

$$\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix}$$

は，行列 C の固有値 1 の固有ベクトルであるから，$H^l(x) = x$ がなりたつ．したがって軌道はサイクルを含み周期的である．(ii) $\Rightarrow$ (i) を示せた． □

3.2 主定理の拡張

定理 3.0.1 の証明とほぼ平行な議論によって，代数体の整数環への拡張が成立する．

定理 3.2.1 (F. 2019)**.** 任意の代数体 K (有理数体の有限次拡大体) の整数環 $\mathcal{O}_K$ に対し，ある $d \in \mathcal{O}_K \setminus \mathcal{O}_K^\times$ をとり，その剰余類 $R = \mathcal{O}_K/d\mathcal{O}_K$ (注: R は必ず有限集合となる) ごとに，$m_i, r_i \in \mathcal{O}_K$ $(i \in R)$ を定め，これらを用いて，関数 $F : \mathcal{O}_K \to \mathcal{O}_K$ を

$$F(x) = m_i x - r_i \ (\text{if } x \equiv i \bmod d\mathcal{O}_K)$$

と定める．ただし，F が $\mathcal{O}_K \to \mathcal{O}_K$ の関数であるよう各 m_i, r_i は，

$$m_i i \equiv r_i \bmod d\mathcal{O}_K$$

を満たし，特に

$$m_0 = 1, r_0 = 0$$

であるとする．ある $\mathcal{O}_K$ の素イデアル $\mathfrak{p}$ が存在して，すべての m_i に対して

$$\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(m_i) < \mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(d)$$

であるなら，任意の $x \in \mathcal{O}_K$ に対して，以下の (i) と (ii) は同値である．

(i) x の F による軌道が周期的.

(ii) x の F による剰余軌道が周期的.

例. 代数体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ の整数環 $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ において，関数 $G : \mathbb{Z}[\sqrt{-1}] \to \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ を，

$$G(x) = \begin{cases} x/2 & (x \equiv 0 \bmod 2\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]) \\ (3x + \sqrt{-1})/2 & (x \equiv \sqrt{-1} \bmod 2\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]) \\ (3x+1)/2 & (x \equiv 1 \bmod 2\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]) \\ (3x + 1 + \sqrt{-1})/2 & (x \equiv 1 + \sqrt{-1} \bmod 2\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]) \end{cases}$$

と定めると，任意の $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ に対して，以下の (i),(ii) は同値である．

(i) x の G による軌道が周期的.

(ii) x の G による剰余軌道が周期的.

(注: G の $\mathbb{Z}_+$ への制限は T_{3x+1} となっている.)

3.3 今後の研究

上に例としてあげたガウス整数環で, $3x+1$ 問題と類似の問題を考えた際に, 観察できるサイクルの長さが, 有理整数環での一般化を考える際よりも大きくなることが経験的に分かっている. こうしたサイクルの成立条件が, 整数環の特徴量, 例えば類数や単数群の rank などを反映しているのではないかと筆者は予想しており, あらわれうるサイクルの長さと整数環の特徴量の関係式が出せないかと考えている.

また, 主定理 3.0.1 (および 3.2.1) は, その証明の構成法から見て分かる通り, 仰々しく言えばある一つの (有限) 素点 $\mathfrak{p}$ に注目した際の $\mathfrak{p}$ 進解析といえる. この視点から例えばアデール環やイデール群のような複数の素点を同時に取り扱うような枠組みを用いて, $3x+1$ 予想的現象の, より核心的な結果が得られないかとも考えている.

発表を行った第 13 回福岡数論集会を含め, 多くの方々にこうした結果の関数体類似は存在するかということについて質問いただいた. 筆者が実際に調べてみたところでは, 次数 (degree) の話に持ち込めるほど簡単な特別な場合を除いては, 力量及ばずほとんど何もわかっていない. しかしながら, 興味深い対象であるから引き続き研究していく予定である.

4 謝辞

今回, 発表の機会を与えていただき, 報告集を仕上げるよう激励してくださった第 13 回福岡数論集会の世話人の方々に感謝いたします. また, 集会を通じて私の発表をお聴きくださった方々, 真摯な質問を投げかけてくださった方々, 論文を投稿するよう勇気づけてくださった方々, みなさまそれぞれにこの場を借りてお礼を申し上げます. がんばります.

参考文献

[Col] L. Collatz, On the Motivation and Origin of the $(3n+1)$-Problem, In: The Ultimate Challenge The $3x+1$ Problem, 241–247, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010.

[Con] J. H. Conway, Unpredictable iterations, In: The Ultimate Challenge The $3x+1$ Problem, 219–223, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010.

[Eve] C. J. Everett, Iteration of the number theoretic function $f(2n) = n$, $f(2n+1) = 3n+2$, Adv. Math. **25** (1977), no. 1, 42–45.

[Hep] E. Heppner, Eine Bemerkung zum Hasse-Syracuse Algorithmus, Arch. Math. (Basel) **31** (1978/79), no. 3, 317–320.

[Lag] J. C. Lagarias, The set of rational cycles for the $3x+1$ problem, Acta Arith. **56** (1990), no. 1, 33–53.

[Mol] H. Möller, Über Hasses Verllgemeinerung des Syracuse-Algorithmus (kakutanis Problem), Acta Arith. **34** (1978), no. 3, 219–226.

[Roo] E. Roosendaal, On the $3x + 1$ problem, available at `http://www.ericr.nl/wondrous/`.

[Sil] T. O. Silva, Computational verification of the $3x + 1$ conjecture, available at `http://sweet.ua.pt/tos/3x+1.html`.

[Ter] R. Terras, A stopping time problem on the positive integers, Acta Arith. **30** (1976), no. 3, 241–252.