Some arithmetic properties of the elliptic Dedekind sum

渋川 元樹 (神戸大学)

1 Introduction

互いに素な正の整数 a, b に対し, 古典 Dedekind 和を

$$s(a;b) := \frac{1}{4b}\sum_{\nu=1}^{b-1}\cot\left(\frac{\pi a\nu}{b}\right)\cot\left(\frac{\pi\nu}{b}\right),$$
$$s(a;1) := 0$$

により定める. 良く知られているように,

$$s(1;a) = \frac{(a-1)(a-2)}{12a}, \quad s(2;a) = \frac{(a-1)(a-5)}{24a}$$

等の例外的な場合を除き, 一般には古典 Dedekind 和は (closed には) evaluate できないが, 以下のような基本的な性質が知られている:

(1) **parity**

$$s(-a;b) = -s(a;b).$$

(2) **reduction**

$$s(a+b;b) = s(a;b).$$

(3) **reciprocity**

$$s(a;b) + s(b;a) = -\frac{1}{4} + \frac{a^2+b^2+1}{12ab}.$$

その他, 古典 Dedekind 和に関しては

分母の決定

$$(2b\cdot\gcd(3,b))\cdot s(a;b) \in \mathbb{Z}, \tag{1.1}$$

零の決定

$$a^2+1 \equiv 0 \pmod b \quad \Leftrightarrow \quad s(a;b) = 0 \tag{1.2}$$

の様々な (数論的) 性質が成り立つことが知られている [4].

Dedekind 和及びその相互律に関しては多重化 (cot の積の数を 2 個ではなくもっと増やす), 高階化 (cot をより高階微分に置き換える) 等の様々な変奏があるが, cot を適当な楕円函数に置き換える楕円類似 (楕円 Dedekind 和) も知られている. これは最初は Sczech [5] により考えられた変奏だが, Egami [2] は Sczech とは異なる (多情) 楕円 Dedekind 和を導入した. その後, Bayad, Fukuhara-Yui, Asano, Machide らにより, Egami の楕円類似の更なる拡張, 変奏が研究なされている. 他方, 古典 Dedekind 和において知られていた相互律等の主要性質以外の (1.1), (1.2) 等の性質についての研究は皆無であった.

本稿では Egami の楕円 Dedekind 和の中でも最も簡単な場合である古典 Dedekind 和の楕円類似 (楕円古典 Dedekind 和) の, 古典 Dedekind 和を用いた明示公式を与え, 古典 Dedekind 和の (1.1), (1.2) に類する諸性質を導出する.

2　楕円函数 $\mathrm{cs}\,(z,k)$, $\mathrm{ds}\,(z,k)$, $\mathrm{ns}\,(z,k)$

必要となる楕円函数の諸定義と諸性質を list する [1], [7], [8]. 以下, $\mathbb{Z}$ を有理整数環, $\mathbb{Q}$ を有理数体, $\mathbb{R}$ を実数体, $\mathbb{C}$ を複素数体, $\mathfrak{H}$ を上半平面 $\{z\in\mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\,z>0\}$ とする. また $\tau\in\mathfrak{H}$,

$$e(x) := e^{2\pi\sqrt{-1}x}, \quad q := e(\tau)$$

とする. まず Jacobi のテータ函数を思い出す:

$$\begin{aligned}
\theta_1(z,\tau) &:= 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{1}{2}(n+\frac{1}{2})^2}\sin\left((2n+1)\pi z\right)\\
&= 2q^{\frac{1}{8}}\sin\pi z\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)(1-q^n e(z))(1-q^n e(-z)),\\
\theta_2(z,\tau) &:= 2\sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{1}{2}(n+\frac{1}{2})^2}\cos\left((2n+1)\pi z\right)\\
&= 2q^{\frac{1}{8}}\cos\pi z\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)(1+q^n e(z))(1+q^n e(-z)),\\
\theta_3(z,\tau) &:= 1+2\sum_{n=1}^{\infty} q^{\frac{1}{2}n^2}\cos\left(2n\pi z\right)\\
&= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)(1+q^{n-\frac{1}{2}} e(z))(1+q^{n-\frac{1}{2}} e(-z)),\\
\theta_4(z,\tau) &:= 1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{1}{2}n^2}\cos\left(2n\pi z\right)\\
&= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)(1-q^{n-\frac{1}{2}} e(z))(1-q^{n-\frac{1}{2}} e(-z)).
\end{aligned}$$

更に

$$k=k(\tau):=\frac{\theta_2(0,\tau)^2}{\theta_3(0,\tau)^2}, \quad \lambda=\lambda(\tau):=k(\tau)^2, \quad K=K(\tau):=\frac{\pi}{2}\theta_3(0,\tau)^2$$

とし, Jacobi の楕円函数 sn, cn, dn を

$$\mathrm{sn}\,(2Kz,k):=\frac{\theta_3(0,\tau)}{\theta_2(0,\tau)}\frac{\theta_1(z,\tau)}{\theta_4(z,\tau)}, \ \mathrm{cn}\,(2Kz,k):=\frac{\theta_4(0,\tau)}{\theta_2(0,\tau)}\frac{\theta_2(z,\tau)}{\theta_4(z,\tau)},$$
$$\mathrm{dn}\,(2Kz,k):=\frac{\theta_4(0,\tau)}{\theta_3(0,\tau)}\frac{\theta_3(z,\tau)}{\theta_4(z,\tau)}.$$

よく知られているように, Jacobi の楕円函数 $\mathrm{sn}\,(2Kz,k)$, $\mathrm{cn}\,(2Kz,k)$, $\mathrm{dn}\,(2Kz,k)$ はモジュラー群

$$\Gamma(2) := \left\{\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\ \middle|\ a\equiv d\equiv 1 \pmod 2,\ b\equiv c\equiv 0 \pmod 2\right\}$$

に関するモジュラー函数 (楕円ラムダ函数) $\lambda(\tau)=k(\tau)^2$ にしか依らない. そこで以下 τ を $\Gamma(2)$ の基本領域

$$\Gamma(2)\setminus\mathfrak{H}\simeq\left\{\tau\in\mathfrak{H}\ \middle|\ |\mathrm{Re}\,\tau|\le 1,\ \left|\tau\pm\frac{1}{2}\right|\ge\frac{1}{2}\right\}$$

に制限することにする．フルモジュラー群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の生成元

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \, T := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

について

$$\lambda\left(-\frac{1}{\tau}\right) = 1 - \lambda(\tau), \quad \lambda\left(\tau + 1\right) = \frac{\lambda(\tau)}{\lambda(\tau) - 1} \tag{2.1}$$

が成り立つ．特に $\tau = \sqrt{-1}$ とすると，

$$\lambda(\sqrt{-1}) = \lambda\left(\frac{-1}{\sqrt{-1}}\right) = 1 - \lambda(\sqrt{-1})$$

ゆえ

$$\lambda(\sqrt{-1}) = \frac{1}{2}. \tag{2.2}$$

Jacobi の楕円函数 sn, cn, dn は良く知られているが, 楕円 Dedekind 和に必要となるのは

$$\mathrm{cs}\,(2Kz, k) := \frac{\mathrm{cn}\,(2Kz, k)}{\mathrm{sn}\,(2Kz, k)}, \, \mathrm{ds}\,(2Kz, k) := \frac{\mathrm{dn}\,(2Kz, k)}{\mathrm{sn}\,(2Kz, k)}, \, \mathrm{ns}\,(2Kz, k) := \frac{1}{\mathrm{sn}\,(2Kz, k)},$$

特に $\cot(\pi z) = \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$ の楕円類似にあたる $\mathrm{cs}\,(2Kz, k)$ である． これについては sn, cn, dn 程は良く知られていないようなので, $\csc(\pi z) = \frac{1}{\sin(\pi z)}$ の楕円類似にあたる $\mathrm{ds}\,(2Kz, k)$, $\mathrm{ns}\,(2Kz, k)$ と併せて基本的性質を list する．

Lemma 2.1. (1) **parity**

$$\begin{aligned} \mathrm{cs}\,(-2Kz, k) &= -\mathrm{cs}\,(2Kz, k), \\ \mathrm{ds}\,(-2Kz, k) &= -\mathrm{ds}\,(2Kz, k), \\ \mathrm{ns}\,(-2Kz, k) &= -\mathrm{ns}\,(2Kz, k). \end{aligned} \tag{2.3}$$

(2) **periodicity** 任意の $\mu, \nu \in \mathbb{Z}$ について,

$$\begin{aligned} \mathrm{cs}\,(2K(z + \mu\tau + \nu), k) &= (-1)^{\mu}\mathrm{cs}\,(2Kz, k), \\ \mathrm{ds}\,(2K(z + \mu\tau + \nu), k) &= (-1)^{\mu+\nu}\mathrm{ds}\,(2Kz, k), \\ \mathrm{ns}\,(2K(z + \mu\tau + \nu), k) &= (-1)^{\nu}\mathrm{ns}\,(2Kz, k). \end{aligned} \tag{2.4}$$

(3) $z = 0$ **周りの Laurent 展開**

$$\begin{aligned} 2K\mathrm{cs}\,(2Kz, k) &= \frac{1}{z} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\lambda\right)(2K)^2 z - \left(\frac{1}{45} - \frac{1}{45}\lambda - \frac{7}{360}\lambda^2\right)(2K)^4 z^3 - \cdots, \\ 2K\mathrm{ds}\,(2Kz, k) &= \frac{1}{z} + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\lambda\right)(2K)^2 z + \left(\frac{7}{360} + \frac{1}{45}\lambda - \frac{1}{45}\lambda^2\right)(2K)^4 z^3 + \cdots, \\ 2K\mathrm{ns}\,(2Kz, k) &= \frac{1}{z} + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\lambda\right)(2K)^2 z + \left(\frac{7}{360} - \frac{11}{180}\lambda + \frac{7}{360}\lambda^2\right)(2K)^4 z^3 + \cdots, \\ \wp(z, \tau) &= \frac{1}{z^2} + 3\frac{2\zeta(4)}{\pi^4}(1 - \lambda + \lambda^2)(2K)^4 z^2 \\ &\quad + 5\frac{2\zeta(6)}{\pi^6}\left(1 - \frac{3}{2}\lambda - \frac{3}{2}\lambda^2 + \lambda^3\right)(2K)^6 z^4 + \cdots. \end{aligned}$$

ここで $\wp(z,\tau)$ は Weierstrass $\wp$ 函数

$$\wp(z,\tau) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{n,m\in\mathbb{Z}\\(n,m)\neq(0,0)}} \left\{ \frac{1}{(m+n\tau+z)^2} - \frac{1}{(m+n\tau)^2} \right\}$$

であり, $\zeta(N)$ は Riemann ζ 函数である.

(4) **部分分数展開**

$$\begin{aligned}
2K\mathrm{cs}\,(2Kz,k) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}{}^{e}\sum_{m\in\mathbb{Z}}{}^{e}\frac{(-1)^n}{m+n\tau+z},\\
2K\mathrm{ds}\,(2Kz,k) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}{}^{e}\sum_{m\in\mathbb{Z}}{}^{e}\frac{(-1)^{m+n}}{m+n\tau+z},\\
2K\mathrm{ns}\,(2Kz,k) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}{}^{e}\sum_{m\in\mathbb{Z}}{}^{e}\frac{(-1)^m}{m+n\tau+z}.
\end{aligned}$$

但し, $\sum_{n\in\mathbb{Z}}{}^{e}$ は Eisenstein の和

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}{}^{e} f(n) := f(0) + \sum_{n=1}^{\infty}\{f(n)+f(-n)\}.$$

(5) **微分**

$$\begin{aligned}
\mathrm{cs}\,'(z,k) &= -\mathrm{ds}\,(z,k)\mathrm{ns}\,(z,k),\\
\mathrm{ds}\,'(z,k) &= -\mathrm{cs}\,(z,k)\mathrm{ns}\,(z,k),\\
\mathrm{ns}\,'(z,k) &= -\mathrm{cs}\,(z,k)\mathrm{ds}\,(z,k).
\end{aligned}$$

(6) **Weierstrass $\wp$ 函数との関係**

$$\begin{aligned}
(2K\mathrm{cs}\,(2Kz,k))^2 &= \wp(z,\tau) - \wp\left(\frac{1}{2},\tau\right),\\
(2K\mathrm{ds}\,(2Kz,k))^2 &= \wp(z,\tau) - \wp\left(\frac{1+\tau}{2},\tau\right),\\
(2K\mathrm{ns}\,(2Kz,k))^2 &= \wp(z,\tau) - \wp\left(\frac{\tau}{2},\tau\right),\\
\wp'(z,\tau)^2 &= 4(2K\mathrm{cs}\,(2Kz,k))(2K\mathrm{ds}\,(2Kz,k))(2K\mathrm{ns}\,(2Kz,k)).
\end{aligned}$$

(7) **楕円曲線との関連**

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\,2K\mathrm{cs}\,(2Kz,k)}{dz}\right)^2 &= ((2K\mathrm{cs}\,(2Kz,k))^2 + \pi^2\theta_3(0,\tau)^4)((2K\mathrm{cs}\,(2Kz,k))^2 + \pi^2\theta_4(0,\tau)^4),\\
\left(\frac{d\,2K\mathrm{ds}\,(2Kz,k)}{dz}\right)^2 &= ((2K\mathrm{ds}\,(2Kz,k))^2 + \pi^2\theta_2(0,\tau)^4)((2K\mathrm{ds}\,(2Kz,k))^2 - \pi^2\theta_4(0,\tau)^4),\\
\left(\frac{d\,2K\mathrm{ns}\,(2Kz,k)}{dz}\right)^2 &= ((2K\mathrm{ns}\,(2Kz,k))^2 - \pi^2\theta_2(0,\tau)^4)((2K\mathrm{ns}\,(2Kz,k))^2 - \pi^2\theta_3(0,\tau)^4).
\end{aligned}$$

(8) 三角極限

$$\lim_{\tau\to\sqrt{-1}\infty} k(\tau)=0, \tag{2.5}$$
$$\lim_{\tau\to\sqrt{-1}\infty} 2K(\tau)=\pi,$$
$$\lim_{\tau\to\sqrt{-1}\infty} \mathrm{cs}\,(2K(z+w\tau),k)=\begin{cases}(-1)^w\cot(\pi z) & (w\in\mathbb{Z}),\\ -(-1)^{\lfloor w\rfloor}i & (w\notin\mathbb{Z}).\end{cases} \tag{2.6}$$

ここで $\lfloor w\rfloor$ を $w\in\mathbb{R}$ を越えない最大の整数とする.

Remark 2.2. (1) Egami をはじめ, その後の多くの研究者達も $2K\mathrm{cs}\,(2Kz,k)$ ではなく

$$\varphi(\tau,z):=\sqrt{\wp(z,\tau)-\wp\left(\frac{1}{2},\tau\right)}=\frac{1}{z}+O(z)\quad(z\to 0)$$

を用いている. しかしながら, Egami やその他の研究者達も $\varphi(\tau,z)$ が $2K\mathrm{cs}\,(2Kz,k)$ に他ならないことには言及していない.
(2) $2K\mathrm{cs}\,(2Kz,k)$ ではなく, 実解析 Eisenstein 級数

$$G(s,z;\tau):=\sum_{m,n\in\mathbb{Z}}\frac{\overline{m\tau+n+z}}{|m\tau+n+z|^{2s}}$$

を解析接続した

$$G(1,z;\tau)=\zeta(z,\tau)-zG_2(\tau)+\frac{2\pi i}{\tau-\overline{\tau}}(z-\overline{z})$$

という実解析的な二重周期函数を用いる楕円化もある (R. Sczech [5]). ここで, $\zeta(z,\tau)$ は Weierstrass ζ 函数, $G_2(\tau)$ は重さ 2 の Eisenstein 級数である:

$$\zeta(z,\tau):=\frac{1}{z}+\sum_{\substack{n,m\in\mathbb{Z}\\(n,m)\neq(0,0)}}\left\{\frac{1}{m+n\tau+z}-\frac{1}{m+n\tau}+\frac{z}{(m+n\tau)^2}\right\},$$
$$G_2(\tau):=\sum_{n\in\mathbb{Z}}^{e}\sum_{m\in\mathbb{Z}}^{e}{}'\frac{1}{(m+n\tau)^2}=\frac{\pi^2}{3}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8\pi^2e^{2\pi i\tau}}{(1-e^{2\pi i\tau})^2}.$$

3 楕円古典 Dedekind 和

以下, a, b を互いに素な正の整数とする. Egami [2] に従って, 古典 Dedekind 和

$$s(a;b):=\frac{1}{4b}\sum_{\nu=1}^{b-1}\cot\left(\frac{\pi a\nu}{b}\right)\cot\left(\frac{\pi\nu}{b}\right),\quad s(a;1):=0$$

の楕円類似 (楕円古典 Dedekind 和) を,

$$s_\tau(a;b):=\frac{1}{4b}\sum_{\substack{0\le\mu,\nu\le b-1\\(\mu,\nu)\neq(0,0)}}(-1)^\mu\mathrm{cs}\left(2Ka\frac{\mu\tau+\nu}{b},k\right)\mathrm{cs}\left(2K\frac{\mu\tau+\nu}{b},k\right),$$
$$s_\tau(a;1):=0$$

で定める. 以下, 便宜のために次の記号を準備する:

$$
\begin{aligned}
R(a;b) &:= \frac{a^2+b^2+1}{4ab}, \\
U^o &:= \{(a;b) \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \times \mathbb{Z}_{>0} \mid \gcd(a,b)=1,\ a+b \text{ is odd}\}.
\end{aligned}
$$

楕円古典 Dedekind 和については次のようなことが成り立つ.

Theorem 3.1. (1) **parity**

$$s_\tau(-a;b) = -s_\tau(a;b). \tag{3.1}$$

(2) **even reduction**

$$s_\tau(a+2b;b) = s_\tau(a;b). \tag{3.2}$$

(3) **inversion formula** b が奇数かつ $aa' \equiv \pm 1 \pmod{b}$, または b が偶数かつ $aa' \equiv \pm 1 \pmod{2b}$ とする. このとき,

$$s_\tau(a;b) = \pm s_\tau(a';b). \tag{3.3}$$

(4) **reciprocity**

$$s_\tau(a;b) + s_\tau(b;a) = R(a;b)\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\lambda(\tau)\right) \quad ((a;b) \in U^o). \tag{3.4}$$

(5) **rationality** 任意の $(a;b) \in U^o$ について,

$$s_\tau(a;b) = Q(a;b)\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\lambda(\tau)\right) \tag{3.5}$$

なる有理数 $Q(a;b)$ が一意に存在する.
(6) **degeneration**

$$\lim_{\tau \to \sqrt{-1}\infty} s_\tau(a;b) = s(a;b) + \frac{1}{4}S(a;b). \tag{3.6}$$

ここで $S(a;b)$ は Hardy-Berndt 和

$$S(a;b) := \sum_{\mu=1}^{b-1} (-1)^{\mu+1+\lfloor \frac{a\mu}{b} \rfloor}.$$

実際, (3.1) と (3.2) はそれぞれ (2.3) と (2.4) より直ちに従う. (3.3) に関しては, b が奇数のとき,

$$
\begin{aligned}
s_\tau(a;b) &= \frac{1}{4b} \sum_{\substack{0 \le \mu,\nu \le b-1 \\ (\mu,\nu) \neq (0,0)}} (-1)^\mu \mathrm{cs}\left(2Ka\frac{2a'\mu\tau + 2a'\nu}{b}, k\right) \mathrm{cs}\left(2K\frac{2a'\mu\tau + 2a'\nu}{b}, k\right) \\
&= \frac{1}{4b} \sum_{\substack{0 \le \mu,\nu \le b-1 \\ (\mu,\nu) \neq (0,0)}} (-1)^\mu \mathrm{cs}\left(2K2aa'\frac{\mu\tau + \nu}{b}, k\right) \mathrm{cs}\left(2Ka'\frac{2\mu\tau + 2\nu}{b}, k\right) \\
&= \frac{1}{4b} \sum_{\substack{0 \le \mu,\nu \le b-1 \\ (\mu,\nu) \neq (0,0)}} (-1)^\mu \mathrm{cs}\left(2Ka'\frac{2\mu\tau + 2\nu}{b}, k\right) \mathrm{cs}\left(\pm 2K\frac{2\mu\tau + 2\nu}{b}, k\right) \\
&= \pm s_\tau(a';b).
\end{aligned}
$$

同様に, b が偶数のとき

$$
\begin{aligned}
s_\tau(a;b) &= \frac{1}{4b}\sum_{\substack{0\le\mu,\nu\le b-1\\(\mu,\nu)\neq(0,0)}}(-1)^\mu \mathrm{cs}\left(2Ka\frac{a'\mu\tau+a'\nu}{b},k\right)\mathrm{cs}\left(2K\frac{a'\mu\tau+a'\nu}{b},k\right)\\
&= \frac{1}{4b}\sum_{\substack{0\le\mu,\nu\le b-1\\(\mu,\nu)\neq(0,0)}}(-1)^\mu \mathrm{cs}\left(2Kaa'\frac{\mu\tau+\nu}{b},k\right)\mathrm{cs}\left(2Ka'\frac{\mu\tau+\nu}{b},k\right)\\
&= \frac{1}{4b}\sum_{\substack{0\le\mu,\nu\le b-1\\(\mu,\nu)\neq(0,0)}}(-1)^\mu \mathrm{cs}\left(2Ka'\frac{\mu\tau+\nu}{b},k\right)\mathrm{cs}\left(\pm 2K\frac{\mu\tau+\nu}{b},k\right)\\
&= \pm s_\tau(a';b).
\end{aligned}
$$

相互律 (3.4) は Egami の相互律 [2] の特殊化である. しかし残念ながら, Egami の主張 (Theorem 1 in [2]) は符合が間違っている (これは Fukuhara-Yui [3] により指摘されている). なので, [3] の Lemma 3.1 より正しい相互律を refer しておく. $s_\tau(a;b)$ の有理性 (3.5) は (3.1), (3.2), (3.4) より従う. 楕円古典 Dedekind 和の退化極限 (3.6) は楕円函数の三角極限 (2.6) より従う.

ここで, U^o 上の楕円古典 Dedekind 和 $s_\tau(a;b)$ の値は (3.1), (3.2), (3.4) から完全に決まってしまうことに注意する. なので, U^o 上の楕円古典 Dedekind 和 $s_\tau(a;b)$ の値をもとめるのに $\mathrm{cs}\,(z,k)$ の元の定義に戻る必要はない. また (3.5) の corollary として, 次を得る.

Corollary 3.2.

$$
s_{-\frac{1}{\tau}}(a;b) = Q(a;b)\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\lambda(\tau)\right), \tag{3.7}
$$

$$
s_{\tau+1}(a;b) = Q(a;b)\frac{\lambda(\tau)-2}{6(\lambda(\tau)-1)}, \tag{3.8}
$$

$$
s_{-\frac{1}{\tau+1}}(a;b) = Q(a;b)\frac{1-2\lambda(\tau)}{6(\lambda(\tau)-1)}, \tag{3.9}
$$

$$
s_{\frac{\tau-1}{\tau}}(a;b) = Q(a;b)\frac{\lambda(\tau)+1}{6\lambda(\tau)}, \tag{3.10}
$$

$$
s_{\frac{\tau}{\tau+1}}(a;b) = Q(a;b)\frac{2\lambda(\tau)-1}{6\lambda(\tau)}. \tag{3.11}
$$

よって特に

$$
s_{\frac{-1+\sqrt{-1}}{2}}(a;b) = s_{\frac{1+\sqrt{-1}}{2}}(a;b) = 0.
$$

Proof. モジュラー変換 (2.1) より

$$
\lambda\left(-\frac{1}{\tau+1}\right) = \frac{1}{1-\lambda(\tau)},\quad \lambda\left(\frac{\tau-1}{\tau}\right) = \frac{\lambda(\tau)-1}{\lambda(\tau)},\quad \lambda\left(\frac{\tau}{\tau+1}\right) = \frac{1}{\lambda(\tau)}.
$$

ゆえ, (3.7)–(3.11) を得る. 更に楕円ラムダ函数の特殊値 (2.2) を思い出せば,

$$
\begin{aligned}
s_{\frac{-1+\sqrt{-1}}{2}}(a;b) &= s_{-\frac{1}{\sqrt{-1}+1}}(a;b) = Q(a;b)\left(\frac{1-2\lambda(\sqrt{-1})}{6(\lambda(\sqrt{-1})-1)}\right) = 0,\\
s_{\frac{1+\sqrt{-1}}{2}}(a;b) &= s_{\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}+1}}(a;b) = Q(a;b)\left(\frac{2\lambda(\sqrt{-1})-1}{6\lambda(\sqrt{-1})}\right) = 0.
\end{aligned}
$$

□

以下, $(a;b) \in U^o$ および $\tau \neq \frac{-1+\sqrt{-1}}{2}, \frac{1+\sqrt{-1}}{2}$ を仮定する．これらの場合, U^o 上の楕円古典 Dedekind 和 $s_\tau(a;b)$ の多くの性質はその有理数 part $Q(a;b)$ に同値である．$bQ(a;b)$ の tables は以下の通り．

表 1: $bQ(a;b)$ の tables

$b \setminus a$	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	4	-4	$\ast$	4	-4	$\ast$	4	-4	$\ast$	4	-4
5	0	12	-12	0	$\ast$	0	12	-12	0	$\ast$	0
7	12	12	24	-24	-12	-12	$\ast$	12	12	24	-24
9	4	-4	$\ast$	40	-40	$\ast$	4	-4	$\ast$	40	-40
11	24	-12	24	12	60	-60	-12	-24	12	-24	$\ast$
13	12	36	-12	0	36	84	-84	-36	0	12	-36
15	40	32	$\ast$	40	$\ast$	$\ast$	112	-112	$\ast$	$\ast$	-40
17	24	0	-36	-24	48	48	36	144	-144	-36	-48
19	60	-12	72	24	60	24	12	72	180	-180	-72
21	40	68	$\ast$	4	-40	$\ast$	$\ast$	68	$\ast$	220	-220

$b \setminus a$	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
2	1.5	-1.5	1.5	-1.5	1.5	-1.5	1.5	-1.5	1.5	-1.5	1.5
4	4.5	7.5	-7.5	-4.5	4.5	7.5	-7.5	-4.5	4.5	7.5	-7.5
6	9.5	$\ast$	17.5	-17.5	$\ast$	-9.5	9.5	$\ast$	17.5	-17.5	$\ast$
8	16.5	-4.5	4.5	31.5	-31.5	-4.5	4.5	-16.5	16.5	-4.5	4.5
10	25.5	22.5	$\ast$	22.5	49.5	-49.5	-22.5	$\ast$	-22.5	-25.5	25.5
12	36.5	$\ast$	8.5	27.5	$\ast$	71.5	-71.5	$\ast$	-27.5	-8.5	$\ast$
14	49.5	-1.5	-22.5	$\ast$	1.5	22.5	97.5	-97.5	-22.5	-1.5	$\ast$
16	64.5	43.5	52.5	-16.5	16.5	43.5	52.5	127.5	-127.5	-52.5	-43.5
18	81.5	$\ast$	17.5	-17.5	$\ast$	-9.5	9.5	$\ast$	161.5	-161.5	$\ast$
20	100.5	7.5	$\ast$	-52.5	4.5	55.5	-7.5	$\ast$	52.5	199.5	-199.5
22	121.5	70.5	25.5	94.5	25.5	$\ast$	73.5	70.5	73.5	94.5	241.5

Theorem 3.3. (1) **parity**

$$Q(-a;b) = -Q(a;b). \tag{3.12}$$

(2) **even reduction**

$$Q(a+2b;b) = Q(a;b). \tag{3.13}$$

(3) **inversion formula** b が奇数, a, a' が $aa' \equiv \pm 1 \pmod{b}$ を満たす偶数, もしくは b が偶数, a, a' が $aa' \equiv \pm 1 \pmod{2b}$ を満たす偶数とする．このとき,

$$Q(a;b) = \pm Q(a';b). \tag{3.14}$$

(4) **reciprocity**

$$Q(a;b) + Q(b;a) = R(a;b) \quad ((a;b) \in U^o). \tag{3.15}$$

実際, (3.12), (3.13), (3.14), (3.15) はそれぞれ (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) に対応する．楕円古典 Dedekind 和 $s_\tau(a;b)$ と同様に U^o 上の $Q(a;b)$ の値は (3.12), (3.13), (3.15) により完全に決まる．ゆえに (3.12), (3.13), (3.15) によって上記の $bQ(a;b)$ の tables が得られる．

4　An explicit formula of the rational part $Q(a;b)$

楕円古典 Dedekind 和 $s_\tau(a;b)$ の有理数 part $Q(a;b)$ の明示公式を与える.

Theorem 4.1.

$$Q(a;b) = 3\left(s(a;b) + \frac{1}{4}S(a;b)\right).$$

Proof. (3.5) より,

$$s_\tau(a;b) = Q(a;b)\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\lambda(\tau)\right).$$

ここで $Q(a;b)$ は τ に依らないので,

$$Q(a;b) = \lim_{\tau\to\sqrt{-1}\infty} \frac{s_\tau(a;b)}{\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\lambda(\tau)}.$$

ここで三角極限 (2.5), (3.6) を取れば結論を得る. □

この表示でもよいのだが, 以下のように Hardy-Berndt 和を古典的な Dedekind 和 $s(a;b)$ で書き直しておくとより便利である.

Lemma 4.2 (Sitaramachandra Rao [6])**.** $(a;b)\in U^o$ のとき,

$$S(a;b) = 8s(a;2b) + 8s(2a;b) - 20s(a;b). \tag{4.1}$$

この公式 (4.1) を使うと, $Q(a;b)$ を次のように書き直せる:

$$Q(a;b) = 6\left(s(a;2b) + s(2a;b) - 2s(a;b)\right). \tag{4.2}$$

5　Denominator

有理数 part $Q(a;b)$ の分母を決定しよう.

Theorem 5.1. 任意の $(a;b)\in U^o$ に対し,

$$bQ(a;b) = \frac{a(1-3b)}{2} + M(a;b)$$

となる整数 $M(a;b)\in\mathbb{Z}$ が一意に存在する. 特に

$$bQ(a;b) \in \begin{cases} \frac{1}{2}+\mathbb{Z} & \text{(if a is odd and b is even)},\\ \mathbb{Z} & \text{(if a is even and b is odd)}.\end{cases}$$

Proof. 古典的な Dedekind 和 $s(a;b)$ については以下の明示的表示が知られている (cot 和ではなくこちらを定義とするのが本義である [4]):

$$s(a;b) = \sum_{\nu=1}^{b-1}\left(\frac{a\nu}{b} - \left\lfloor\frac{a\nu}{b}\right\rfloor - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{\nu}{b} - \frac{1}{2}\right). \tag{5.1}$$

よって (4.2) と (5.1) を併せることで,

$$Q(a;b) = ab + \frac{a(1-3b)}{2b} + \frac{3}{b}\sum_{\nu=1}^{2b-1}\left\{\left\lfloor\frac{a\nu}{2b}\right\rfloor(b-\nu)\right\} + \frac{3}{b}\sum_{\nu=1}^{b-1}\left\{\left(\left\lfloor\frac{2a\nu}{b}\right\rfloor - 2\left\lfloor\frac{a\nu}{b}\right\rfloor\right)(b-2\nu)\right\}.$$

ここで

$$M(a;b) := ab^2 + 3\sum_{\nu=1}^{2b-1}\left\{\left\lfloor\frac{a\nu}{2b}\right\rfloor(b-\nu)\right\} + 3\sum_{\nu=1}^{b-1}\left\{\left(\left\lfloor\frac{2a\nu}{b}\right\rfloor - 2\left\lfloor\frac{a\nu}{b}\right\rfloor\right)(b-2\nu)\right\}$$

とおくと,

$$bQ(a;b) = \frac{a(1-3b)}{2} + M(a;b).$$

□

ここで (2.2) に注意すると,

$$s_{\sqrt{-1}}(a;b) = Q(a;b)\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\lambda(\sqrt{-1})\right) = \frac{1}{4}Q(a;b)$$

となるので, Theorem 5.1 と併せると $s_{\sqrt{-1}}(a;b)$ に関する次の整数性を得ることができる.

Corollary 5.2.

$$4bs_{\sqrt{-1}}(a;b) = bQ(a;b) \in \begin{cases} \frac{1}{2} + \mathbb{Z} & (\text{if } a \text{ is odd and } b \text{ is even}), \\ \mathbb{Z} & (\text{if } a \text{ is even and } b \text{ is odd}). \end{cases}$$

また Theorem 3.3 と Theorem 5.1 より, $s_\tau(a;b)$ の整数 part $M(a;b)$ について, Theorem 3.3 と同様に以下が成り立つこともわかる.

Corollary 5.3. (1) **parity**

$$M(-a;b) = -M(a;b).$$

(2) **even reduction**

$$M(a+2b;b) = M(a;b) + b(1-3b).$$

(3) **reciprocity**

$$M(a;b) + M(b;a) = \frac{1-a^2-b^2+6ab(a+b)}{4}.$$

6 Zeros

楕円古典 Dedekind 和 $s_\tau(a;b)$, 及びその有理数 part $Q(a;b)$ の零を決定する.

Proposition 6.1. a が偶数, b が奇数とすると,

$$a^2 \equiv -1 \pmod{b} \quad \Rightarrow \quad Q(a;b) = 0.$$

Proof. a と b に関する仮定より, $a' = a$ として, Theorem 3.3 の (3) を用いると,

$$Q(a;b) = -Q(a';b) = -Q(a;b).$$

よって $Q(a;b) = 0$. □

Theorem 6.2. a を偶数, b を奇数とすると,

$$Q(a;b) \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad a^2 \equiv -1 \pmod b.$$

よって特に

$$Q(a;b) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 \equiv -1 \pmod b.$$

Proof. $Q(a;b)$ に関する相互律 (3.15) に $4ab$ を掛けると

$$4abQ(a;b) + 4abQ(b;a) = a^2 + b^2 + 1. \tag{6.1}$$

ここで $Q(a;b) \in \mathbb{Z}$ とすると, 今 a が偶数で, b が奇数なので, Theorem 5.1 より $2aQ(b;a) \in \mathbb{Z}$. よって (6.1) の mod b を考えて,

$$a^2 + 1 \equiv 0 \pmod b.$$

Proposition 6.1 より, このとき $Q(a;b) = 0$ なので結論を得る. □

零は決定できたが, 次にそれを与える整数の組を具体的に構成することを考える. まず正の整数 N に対して, 次の recursion から定まる正の整数列 $P_M^{(N)}$ を考えよう:

$$P_{M+2}^{(N)} = NP_{M+1}^{(N)} + P_n^{(N)}, \quad P_0^{(N)} = 0, \quad P_1^{(N)} = 1.$$

この数列 $P_M^{(N)}$ は良く知られた Fibonacci 数列 ($N=1$) や Pell 数列 ($N=2$) を含むが, これに関して Cassini の公式

$$P_{M+1}^{(N)}P_{M-1}^{(N)} - {P_M^{(N)}}^2 = (-1)^M$$

が成立することに注意して, Theorem 3.3 の (3) を用いることで次が得られる.

Theorem 6.3. (1)

$$P_{2m+1}^{(2n)} \in 1 + 2\mathbb{Z}, \quad P_{2m}^{(2n)} \in 2\mathbb{Z}$$

であり,

$$\begin{aligned} &Q(P_{2m}^{(2n)}; P_{2m\pm1}^{(2n)}) = 0, \\ &Q(P_{2m\pm1}^{(2n)}; P_{2m}^{(2n)}) = Q(P_{2m\mp1}^{(2n)}; P_{2m}^{(2n)}). \end{aligned}$$

(2)

$$P_{3m\pm1}^{(2n+1)} \in 1 + 2\mathbb{Z}, \quad P_{3m}^{(2n+1)} \in 2\mathbb{Z}$$

であり,

$$\begin{aligned} Q(P_{3m}^{(2n+1)}; P_{3m\pm1}^{(2n+1)}) &= (-1)^m Q(P_{3m}^{(2n+1)}; P_{3m\pm1}^{(2n+1)}), \\ Q(P_{3m\pm1}^{(2n+1)}; P_{3m}^{(2n+1)}) &= (-1)^m Q(P_{3m\mp1}^{(2n+1)}; P_{3m}^{(2n+1)}). \end{aligned}$$

よって特に

$$Q(P_{6m+3}^{(2n+1)}; P_{6m+3\pm1}^{(2n+1)}) = 0.$$

7 Concluding remarks

最後に 2 つ今後の課題について述べる．まず Theorem 5.1 あるいは Corollary 5.2 のより精密化が挙げられる．実際, a が偶数, b が奇数のとき, 以下の $\frac{b}{4}Q(a;b)$ の table から次のことが予想される．

Conjecture 7.1. a が偶数, b が奇数のとき

$$4bs_{\sqrt{-1}}(a;b) = bQ(a;b) \in 4\mathbb{Z}.$$

より強く

$$(6m \pm 1)Q(a;6m \pm 1) \in 12\mathbb{Z}.$$

表 2: $\frac{b}{4}Q(a;b)$ の table

$a \setminus b$	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32
3	1															
5	0	3														
7	3	3	6													
9	1	-1	$*$	10												
11	6	-3	6	3	15											
13	3	9	-3	0	9	21										
15	10	8	$*$	10	$*$	$*$	28									
17	6	0	-9	-6	12	12	9	36								
19	15	-3	18	6	15	6	3	18	45							
21	10	17	$*$	1	-10	$*$	$*$	17	$*$	55						
23	21	15	15	-18	-9	21	-6	9	6	18	66					
25	15	3	-3	30	$*$	-15	3	-3	0	$*$	30	78				
27	28	-1	$*$	10	-10	$*$	28	26	$*$	1	26	$*$	91			
29	21	27	-12	3	-30	0	-21	24	-3	24	27	12	30	105		
31	36	24	33	24	45	-12	6	36	12	6	30	30	33	45	120	
33	28	8	$*$	-8	26	$*$	19	-28	$*$	-17	$*$	$*$	19	17	$*$	136

次いで, [3] で扱われている楕円 Dedekind-Aposotol 和

$$s_{2n+1,\tau}(a;b) := \frac{1}{4b} \sum_{\substack{\mu,\nu=0 \\ (\mu,\nu)\neq(0,0)}}^{b-1} (-1)^{\nu} \mathrm{cs}\left(2Ka\frac{\mu+\nu\tau}{b}, k\right) \mathrm{cs}^{(2n)}\left(2K\frac{\mu+\nu\tau}{b}, k\right) \quad (n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

に関して, 本研究の結果を拡張することが挙げられる ($s_{2n,\tau}(a;b)$ は恒等的に零). すなわち, この楕円 Dedekind-Aposotol 和 $s_{2n+1,\tau}(a;b)$ に関しても楕円古典 Dedekind 和と同様に次が成立することが知られている．

(1) **parity**

$$s_{n+1,\tau}(-a;b) = -s_{n+1,\tau}(a;b).$$

(2) **even reduction**

$$s_{n+1,\tau}(a+2b;b) = s_{n+1,\tau}(a;b).$$

(3) **reciprocity** (Fukuhara-Yui) $a+b$ が odd のとき,

$$s_{2n+1,\tau}(a;b)+s_{2n+1,\tau}(b;a)=R_{2n+1,0}(a,b)g_{2n+1}(k)-\sum_{l=1}^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}R_{2n+1,l}(a,b)g_{2n+1-l}(k)g_{2l-1}(k).$$

但し, $g_{2n+1}(k)$ は $\operatorname{cs}(z,k)$ の $z=0$ 周りの Laurent 展開の係数であり,

$$R_{2n+1,l}(a,b):=\frac{(2n)!}{4}\left(a^{2l-1}b^{2n+1-2l}+a^{2n+1-2l}b^{2l-1}+\frac{2n+1}{ab}\delta_{l,0}-a^nb^n\delta_{n,2l-1}\right).$$

これより容易に, $a+b$ を odd とするとき, k に依らない有理数 $Q_{2n+1,l}(a;b)$ が存在して

$$s_{2n+1,\tau}(a;b)=Q_{2n+1,0}(a;b)g_{2n+1}(k)+\sum_{l=1}^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}Q_{2n+1,l}(a;b)g_{2n+1-l}(k)g_{2l-1}(k)$$

と書けることがわかる. $n=0$ のときは, $Q_{1,0}(a;b)=Q(a;b)$ であり, これを古典 Dedekind 和を用いて書いた明示公式が今回の主結果だった. これを $n\geq 1$ へ拡張し, $Q_{2n+1,l}(a,b)$ についても, たとえば Dedekind-Aposotol 和等を用いた, 明示公式が得られることが望ましい.

参考文献

[1] R. Beals and R. Wong, Special functions, A graduate text, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 126, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[2] S. Egami, An elliptic analogue of the multiple Dedekind sums, Compositio Math. **99** (1995), 99–103.

[3] S. Fukuhara and N. Yui, Elliptic Apostol sums and their reciprocity laws, Trans. Amer. Math. Soc. **356** (2004), 4237–4254.

[4] H. Rademacher and E. Grosswald, Dedekind sums, The Carus Mathematical Monographs, 16, The Mathematical Association of America, Washington, D.C., 1972.

[5] R. Sczech, Dedekindsummen mit elliptischen Funktionen, Invent. Math. **76** (1984), 523–551.

[6] R. Sitaramachandra Rao, Dedekind and Hardy sums, Acta Arith. **48** (1987), 325–340.

[7] P. L. Walker, Elliptic functions, John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1996.

[8] Wolfram Research, The mathematical functions site, `http://functions.wolfram.com/EllipticFunctions/JacobiCS/`.