The absolute anabelian geometry of pro-p fundamental group of second configuration spaces

東山 和巳 (京都大学)

概 要

p を素数とする. 本稿では, 数体または p 進局所体上の低次元配置空間の副 p 基本群について研究する.

本稿の構成は以下の通りである: §1 で, 主結果の主張を述べて, 従来の結果との比較を行う. §2 以降では, §1 で述べた主結果の証明の一部を与える. 本稿で与えられている議論の詳細については [1], [2] を参照.

1 主結果

§1 では, [1] により得られた主結果を説明する. そのために, まず遠アーベル幾何について復習する.

遠アーベル幾何とは, 大雑把には, グロタンディーク予想 (以下 GC) と呼ばれるグロタンディークが提唱した以下の主張の解決を目的とした分野である:

グロタンディーク予想. 素体上有限生成な体 k 上の "遠アーベル多様体" X は, エタール基本群 $\pi_1(X)$ の位相群構造及び付随する k の絶対ガロア群への全射 $\pi_1(X) \twoheadrightarrow G_k$ の構造から "復元" できる.

ここでまず, "復元" について復習する. ${}^\dagger X, {}^\ddagger X$ を k 上の多様体, $\bar{k}$ を k の代数閉包とする. k 上の多様体の同型射 ${}^\dagger X \xrightarrow{\sim} {}^\ddagger X$ は, 基本群の同型射 $\pi_1({}^\dagger X) \xrightarrow{\sim} \pi_1({}^\ddagger X)$ の $\pi_1({}^\ddagger X_{\bar{k}})$ 共役類を誘導する. すなわち, $\mathrm{Isom}_k({}^\dagger X, {}^\ddagger X)$ を k 上の多様体の同型射全体, $\mathrm{Isom}_{G_k}(\pi_1({}^\dagger X), \pi_1({}^\ddagger X))$ を G_k 上の群の同型射全体としたとき, 以下の射が得られる:

$$\mathrm{Isom}_k({}^\dagger X, {}^\ddagger X) \to \mathrm{Isom}_{G_k}(\pi_1({}^\dagger X), \pi_1({}^\ddagger X))/\mathrm{Inn}(\pi_1({}^\ddagger X_{\bar{k}})).$$

"復元" とは, 例えば, この逆写像を与えることである.

$$\mathrm{Isom}_k({}^\dagger X, {}^\ddagger X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Isom}_{G_k}(\pi_1({}^\dagger X), \pi_1({}^\ddagger X))/\mathrm{Inn}(\pi_1({}^\ddagger X_{\bar{k}})).$$

また "遠アーベル多様体" とは, 大雑把には, このような意味での "復元" ができるような多様体のことである.

グロタンディーク予想にはさまざまなバージョンがある. 上にあげたような「共通の G_k 上の基本群の同型射

$$\begin{tikzcd} \pi_1({}^\dagger X) \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr] & & \pi_1({}^\ddagger X) \arrow[dl] \\ & G_k & \end{tikzcd}$$

からの多様体の射 ${}^{\dagger}X \xrightarrow{\sim} {}^{\ddagger}X$ の復元」の問題を, 相対グロタンディーク予想型問題という.

$$\text{相対 GC: } \mathrm{Isom}_k({}^{\dagger}X, {}^{\ddagger}X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Isom}_{G_k}(\pi_1({}^{\dagger}X), \pi_1({}^{\ddagger}X))/\mathrm{Inn}(\pi_1({}^{\ddagger}X_{\bar{k}})).$$

「基本群の図式

$$\begin{tikzcd} \pi_1({}^{\dagger}X) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \pi_1({}^{\ddagger}X) \arrow[d] \\ G_k \arrow[r, "\sim"] & G_k \end{tikzcd}$$

からの多様体の射 ${}^{\dagger}X \xrightarrow{\sim} {}^{\ddagger}X$ の復元」の問題を, 半絶対グロタンディーク予想型問題という.

$$\text{半絶対 GC: } \mathrm{Isom}({}^{\dagger}X, {}^{\ddagger}X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Isom}(\pi_1({}^{\dagger}X) \twoheadrightarrow G_k, \pi_1({}^{\ddagger}X) \twoheadrightarrow G_k)/\mathrm{Inn}(\pi_1({}^{\ddagger}X)).$$

「基本群の同型射 $\pi_1({}^{\dagger}X) \xrightarrow{\sim} \pi_1({}^{\ddagger}X)$ から多様体の射 ${}^{\dagger}X \xrightarrow{\sim} {}^{\ddagger}X$ の復元」の問題を絶対グロタンディーク予想型問題という.

$$\text{絶対 GC: } \mathrm{Isom}({}^{\dagger}X, {}^{\ddagger}X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Isom}(\pi_1({}^{\dagger}X), \pi_1({}^{\ddagger}X))/\mathrm{Inn}(\pi_1({}^{\ddagger}X)).$$

既存の結果には例えば以下のようなものがある.

定理 1.1. p を素数とする. k を数体または p 進局所体とする. ${}^{\dagger}X, {}^{\ddagger}X$ を双曲的曲線とする. G_k を k の絶対ガロア群とする.

(i)
$$\text{相対 GC: } \mathrm{Isom}_k({}^{\dagger}X, {}^{\ddagger}X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Isom}_{G_k}(\pi_1({}^{\dagger}X), \pi_1({}^{\ddagger}X))/\mathrm{Inn}(\pi_1({}^{\ddagger}X_{\bar{k}}))$$
が成立する ([3, 定理 A] を参照).

(ii) 自然な写像
$$\mathrm{Isom}({}^{\dagger}X, {}^{\ddagger}X) \to \mathrm{Isom}(\pi_1({}^{\dagger}X), \pi_1({}^{\ddagger}X))/\mathrm{Inn}(\pi_1({}^{\ddagger}X))$$
は, $\mathrm{Isom}({}^{\dagger}X, {}^{\ddagger}X)$ と, 分解群を保つ同型がなす $\mathrm{Isom}(\pi_1({}^{\dagger}X), \pi_1({}^{\ddagger}X))/\mathrm{Inn}(\pi_1({}^{\ddagger}X))$ の部分集合との全単射を定める ([5, 系 2.9] を参照). すなわち, 大まかには, 分解群の集合が与えられている場合, 双曲的曲線に対する絶対 GC が成立する.

(iii) ${}^{\dagger}X, {}^{\ddagger}X$ が種数 0 と同種であるとき,
$$\text{絶対 GC: } \mathrm{Isom}({}^{\dagger}X, {}^{\ddagger}X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Isom}(\pi_1({}^{\dagger}X), \pi_1({}^{\ddagger}X))/\mathrm{Inn}(\pi_1({}^{\ddagger}X))$$
が成立する ([6, 定理 1.9] を参照).

以下の定理が主結果である.

定理 1.2. p を素数とする. k を 1 の p べき根を含む数体または 1 の p べき根を含む p 進局所体とする. G を k の絶対ガロア群の最大副 p 商とする. K を k の最大副 p 拡大とする. Π_2 を k 上の $(0,5)$ 型の滑らかな曲線のモジュライ $\mathcal{M}_{0,5}$ のエタール基本群の最大副 p 商とする. $\mathcal{C}_2 \overset{\mathrm{def}}{=} \{D \subset \Pi_2 \mid$ ある $x \in \overline{\mathcal{M}}_{0,5}(K)$ が存在して $D = D_x\}$, ここで $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}$ は k 上の $(0,5)$ 型の点付き安定曲線のモジュライ, $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}(K)$ はその K 値点全体の集合, D_x は x の分解群である.

このとき, データ
$$\Pi_2 \twoheadrightarrow G, \quad \mathcal{C}_2$$
から以下のデータを復元できる.

(i) K 値点全体

$$\overline{\mathcal{M}}_{0,5}(K), \quad \mathcal{M}_{0,5}(K), \quad \overline{\mathcal{M}}_{0,4}(K), \quad \mathcal{M}_{0,4}(K)$$

が復元できる, ここで $\overline{\mathcal{M}}_{0,4}$ は k 上の $(0,4)$ 型の点付き安定曲線のモジュライであり, $\mathcal{M}_{0,4}$ は k 上の $(0,4)$ 型の滑らかな曲線のモジュライである. $\mathcal{M}_{0,5}$ の k 上の自己同型群が定める部分群

$$\mathrm{Aut}_k(\mathcal{M}_{0,5}) \subseteq \mathrm{Aut}(\mathcal{M}_{0,5}(K))$$

が復元できる. k 上の全射たち $\mathcal{M}_{0,5} \to \mathcal{M}_{0,4}$ が誘導する K 値点の集合の間の写像全体

$$\{\mathcal{M}_{0,5}(K) \twoheadrightarrow \mathcal{M}_{0,4}(K)\}$$

も復元できる.

(ii) 基礎体 K, k が復元できる.

(iii) $\mathcal{M}_{0,4}$ の関数体 $k(\mathcal{M}_{0,4})$ が復元できる. すなわち, $\Pi_2 \twoheadrightarrow G$ と分解群の集合 $\mathcal{C}_2$ が与えられている場合の, $\mathcal{M}_{0,4}$ に対する半絶対 GC が成立する.

既存の結果はどれも副有限基本群または幾何的副 p 基本群に対しての結果である. 定理 1.1, (i) のみ副 p 版でも成立するが, 他の結果の副 p 版の成立は知られていない. この主定理 1.2 は副 p 基本群に対して成り立つという点が新しい.

また, 従来の遠アーベル幾何は

$$\mathrm{Isom}_k({}^{\dagger}X, {}^{\ddagger}X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Isom}_{G_k}(\pi_1({}^{\dagger}X), \pi_1({}^{\ddagger}X))/\mathrm{Inn}(\pi_1({}^{\ddagger}X_{\bar{k}}))$$

のように「基本群の同型は多様体の同型から誘導されるか?」という, ${}^{\dagger}X$ と ${}^{\ddagger}X$ という 2 つの対象に対するものであった. このような遠アーベル幾何を "双遠アーベル幾何" という.

一方, 「単一の基本群から群の言葉を用いて多様体を復元する」という "単遠アーベル幾何" も存在する. 簡単な例では, G_k という単一の群から群論の言葉を用いて $\mathrm{H}^1(G_k, \hat{\mathbb{Z}}(1))$ を構成する. これは (Kummer 理論により) $\widehat{k^{\times}}$ と同型なので, 乗法群 $\widehat{k^{\times}}$ を構成したとみなすことができる. このような操作を繰り返すことで関数体ないし多様体を復元しようというのが単遠アーベル幾何である. 既存の結果の中では定理 1.1 (iii) のみが単 (遠アーベル幾何) 的に復元できる. 主定理 1.2 の復元は, 単的な復元であり, この点は特筆すべき点である.

副有限版である定理 1.1 (iii) は曲線に対するグロタンディーク予想型問題であった. しかしその証明は, 副 p 版で適用できる証明ではなかった. 一方, 曲線の配置空間は曲線の逐次拡大となっているため, グロタンディーク予想型問題を考察しやすい. そのため, 定理 1.2 は双曲的曲線として一番簡単な $X = \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ (これは $\mathcal{M}_{0,4}$ と同型である.) に 2 次配置空間 X_2 (これは $\mathcal{M}_{0,5}$ と同型である.) の情報を付加した曲線 X に対するグロタンディーク予想型問題にした.

まとめると, 主定理 1.2 は, 色々な条件をつけることで, 副 p 版半絶対 GC が成立するという主張である.

定理 1.2 (ii) の証明については, 次節以降で解説していく. 定理 1.2 (i), (iii) の証明については, [1], [2] を参照.

2 体構造の幾何的記述

§2 では, 定理 1.2 (ii) の証明の準備をする. 幾何的な命題を群の言葉に翻訳しやすいように整理する. 省略した議論については, [1] を参照.

命題 2.1. k を体とする.

(i) ラベル ($\in \{1,2,3,4,5\}$) を置換することで得られる準同型

$$S_5 \to \mathrm{Aut}_k(\mathcal{M}_{0,5})$$

は同型である. この同型により S_5 と $\mathrm{Aut}_k(\mathcal{M}_{0,5})$ を同一視する. また, S_5 は $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}$ と $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}(k)$ に作用する.

(ii) 最初の 3 つのラベル ($\in \{1,2,3\}$) を置換することで得られる準同型

$$S_3 \to \mathrm{Aut}_k(\mathcal{M}_{0,4})$$

は同型である. この同型により S_3 と $\mathrm{Aut}_k(\mathcal{M}_{0,4})$ を同一視する. また, S_3 は $\overline{\mathcal{M}}_{0,4}$ と $\overline{\mathcal{M}}_{0,4}(k)$ に作用する.

証明. 主張 (i), (ii) は [8, 定理 D] ([8, 定理 4.4], [7, 定理 A] も参照.) から従う. □

定義 2.2. k を体とする.

(i) $i \in \{1,2,3,4,5\}$ をとる. $p_i^{\mathrm{tpd}} \colon \overline{\mathcal{M}}_{0,5}(k) \twoheadrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,4}(k)$ を i 番目を忘れる射影 $\mathcal{M}_{0,5} \to \mathcal{M}_{0,4}$ が誘導する射影とする.

(ii) S_3 の $\overline{\mathcal{M}}_{0,4}(k)$ への作用と (i) の射影の合成することで, 全射 $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}(k) \twoheadrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,4}(k)$ の集合が得られる. $M \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\overline{\mathcal{M}}_{0,5}(k) \twoheadrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,4}(k)\}$ をその全射の集合とする.

(iii) M 上の同値関係を以下のようにして与える: ${}^{\dagger}q, {}^{\ddagger}q \in M$ に対して,

$${}^{\dagger}q \sim {}^{\ddagger}q \stackrel{\mathrm{def}}{\iff} \{{}^{\dagger}q^{-1}(z)\}_{z \in \overline{\mathcal{M}}_{0,4}(k) \setminus \mathcal{M}_{0,4}(k)} = \{{}^{\ddagger}q^{-1}(z)\}_{z \in \overline{\mathcal{M}}_{0,4}(k) \setminus \mathcal{M}_{0,4}(k)}$$

とする. 同値類全体の集合を $M_{\sim}$ とかく.

(iv) $i \in \{1,2,3,4,5\}$ に対して, $M_i \in M_{\sim}$ を p_i^{tpd} を含む同値類とする.

命題 2.3. k を体とする.

(i) 任意の $i \in \{2,3,4,5\}$ に対して, $p_i^{\mathrm{tpd}} = p_{i-1}^{\mathrm{tpd}} \circ (i-1, i)$ が成り立つ. ここで $(i-1, i) \in S_5 \stackrel{\sim}{\to} \mathrm{Aut}_k(\mathcal{M}_{0,5})$ は $i-1$ と i を入れ替える互換である.

(ii) 割り当て $\{1,2,3,4,5\} \ni i \mapsto M_i \in M_{\sim}$ は全単射 $\{1,2,3,4,5\} \stackrel{\sim}{\to} M_{\sim}$ を定める. M は 30 個の元からなる ($\sharp\{p_i^{\mathrm{tpd}} \mid i \in \{1,2,3,4,5\}\} \times \sharp S_3$).

(iii) $a, b, c \in \{1,2,3,4,5\}$ を異なる元とする. このとき, $M_a = M_a \circ (b, c)$ が成り立つ. ここで $(b, c) \in S_5 \stackrel{\sim}{\to} \mathrm{Aut}_k(\mathcal{M}_{0,5})$ は b と c を入れ替える互換である.

(iv) $x, y \in \overline{\mathcal{M}}_{0,4}(k)$ を相異なる元とする. このとき唯一の元 $z \in \overline{\mathcal{M}}_{0,5}(k)$ が存在して $p_5^{\mathrm{tpd}}(z) = x$, $p_4^{\mathrm{tpd}}(z) = y$ を満たす. この唯一の元を $(x, y) \in \overline{\mathcal{M}}_{0,5}(k)$ とかく.

証明. 主張 (i) は定義 2.2 (i) から従う．次に主張 (ii) について考える．$q \in M$ をとる．定義 2.2 (ii) によりある $\tau \in S_3$ と $i \in \{1,2,3,4,5\}$ が存在して，$q = \tau \circ p_i^{\mathrm{tpd}}$ が成り立つ．特に，$q \sim p_i^{\mathrm{tpd}}$ なので，この割り当て $\{1,2,3,4,5\} \to M_\sim$ は全射である．単射性は省略する．主張 (iii), (iv) はモジュラー解釈から従う． □

命題 2.4. k を体とする．任意の相異なる $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathcal{M}}_{0,4}(k) \setminus \mathcal{M}_{0,4}(k)$ に対して，以下を満たすような正則関数 $t_{z_1,z_2,z_3} \in \Gamma(\mathcal{M}_{0,4}, \mathcal{O}_{\mathcal{M}_{0,4}})$ がただ一つ存在する．

- t_{z_1,z_2,z_3} は全単射
$$t_{z_1,z_2,z_3} \colon \overline{\mathcal{M}}_{0,4}(k) \xrightarrow{\sim} k \cup \{\infty\}$$
を誘導する;
- t_{z_1,z_2,z_3} は z_1 にのみ 1 位の零点を持つ;
- $t_{z_1,z_2,z_3}(z_2) = 1$;
- t_{z_1,z_2,z_3} は z_3 にのみ 1 位の極を持つ．

証明. よく知られた射影直線の幾何から従う． □

注意 2.5. §2 では，全単射
$$t_{z_1,z_2,z_3} \colon \overline{\mathcal{M}}_{0,4}(k) \xrightarrow{\sim} k \cup \{\infty\}$$
を固定する．これにより $\{0, 1, \infty\} \subseteq \overline{\mathcal{M}}_{0,4}(k)$ と見なし，$\overline{\mathcal{M}}_{0,4}(k)$ の四則演算を誘導された四則演算とする．また相異なる $x, y \in \mathcal{M}_{0,4}(k)$ に対して，$(x, y) \in \mathcal{M}_{0,5}(k)$ は $(0, 1, \infty, x, y)$ にマークされた種数 0 の曲線に対応する．

命題 2.6. k を体，$x \in \overline{\mathcal{M}}_{0,4}(k) \setminus \mathcal{M}_{0,4}(k)$, $y \in \overline{\mathcal{M}}_{0,4}(k) \setminus \{x\}$ とする．このとき，次の元
$$p_5^{\mathrm{tpd}}((i,j)(x,y)) = (i,j)(p_5^{\mathrm{tpd}}(x,y)) \in \{0, 1, \infty\}$$
が与えられる．ここで，$i, j \in \{1,2,3\}$ は異なる元であり，左辺の (i,j) は $\in S_5 \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}_k(\mathcal{M}_{0,5})$ であり，右辺の (i,j) は $\in S_3 \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}_k(\mathcal{M}_{0,4})$ である．このとき，

(i) $x = 0 \Longleftrightarrow x = p_5^{\mathrm{tpd}}((2,3)(x,y))$.

(ii) $x = 1 \Longleftrightarrow x = p_5^{\mathrm{tpd}}((1,3)(x,y))$.

(iii) $x = \infty \Longleftrightarrow x = p_5^{\mathrm{tpd}}((1,2)(x,y))$.

証明. 定義から従う． □

定義 2.7. k を体，$x, y \in \mathcal{M}_{0,4}(k)$ を異なる元とする．

(i)
$$\tau_{\mathrm{rf}} \overset{\mathrm{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \in S_5$$
とする．すなわち，
$$\tau_{\mathrm{rf}} \colon \mathcal{M}_{0,5}(k) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{0,5}(k) \colon (x, y) \mapsto \left(1 - x, \tfrac{y(x-1)}{x-y}\right).$$

(ii) **(Ratio)**

$$\tau_{\mathrm{ra}} \overset{\mathrm{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \in S_5$$

とする．すなわち,

$$\tau_{\mathrm{ra}} \colon \mathcal{M}_{0,5}(k) \simeq \mathcal{M}_{0,5}(k) \colon (x,y) \mapsto \left(\tfrac{1}{x}, \tfrac{y}{x}\right).$$

(iii) **(Cross ratio)**

$$\tau_{\mathrm{cr}} \overset{\mathrm{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in S_5$$

とする．すなわち,

$$\tau_{\mathrm{cr}} \colon \mathcal{M}_{0,5}(k) \simeq \mathcal{M}_{0,5}(k) \colon (x,y) \mapsto \left(\tfrac{y-x}{y}, \tfrac{y-x}{y-1}\right).$$

命題 2.8. k を体, $\tau \in S_5$ を元, $x, y \in \mathcal{M}_{0,4}(k)$ を相異なる元とする．このとき:

(i) $\tau = \tau_{\mathrm{rf}} \Longleftrightarrow M_4 \circ \tau = M_3,\ M_3 \circ \tau = M_4,\ M_i \circ \tau = M_i\ (i \in \{1,2,5\})$.

(ii) $\tau = \tau_{\mathrm{ra}} \Longleftrightarrow M_2 \circ \tau = M_4,\ M_4 \circ \tau = M_2,\ M_j \circ \tau = M_j\ (j \in \{1,3,5\})$.

(iii) $\tau = \tau_{\mathrm{cr}} \Longleftrightarrow M_4 \circ \tau = M_1,\ M_5 \circ \tau = M_2,\ M_1 \circ \tau = M_3, M_2 \circ \tau = M_4,\ M_3 \circ \tau = M_5$.

(iv) $p_5^{\mathrm{tpd}}(\tau_{\mathrm{rf}}(x,y)) = 1 - x$.

(v) $p_5^{\mathrm{tpd}}(\tau_{\mathrm{ra}}(x,y)) = \frac{1}{x}$.

(vi) $p_4^{\mathrm{tpd}}(\tau_{\mathrm{ra}}(x,y)) = \frac{y}{x}$.

(vii) $p_5^{\mathrm{tpd}}(\tau_{\mathrm{cr}}(x,y)) = \frac{y-x}{y}$.

命題 2.9. k を体とし, $x, y \in \mathcal{M}_{0,4}(k)$ を相異なる元とする．このとき:

(i) $\frac{1}{x} = p_5^{\mathrm{tpd}}(\tau_{\mathrm{ra}}(x,y))$.

(ii) $y \neq \frac{1}{x}$ ならば, $x \cdot y = p_4^{\mathrm{tpd}}(\tau_{\mathrm{ra}}(\frac{1}{x}, y))$.

命題 2.10. k を標数が 3 ではない体とする．このとき,

$$k \text{ が標数 } 2 \text{ ではない} \Longleftrightarrow \text{ある } x \in \mathcal{M}_{0,4}(k) \text{ が存在して, } \tfrac{1}{x} = x.$$

命題 2.11. k を標数 2 の体, $x, y \in \mathcal{M}_{0,4}(k)$ を相異なる元とする．このとき:

(i) $x + 1 = p_5^{\mathrm{tpd}}(\tau_{\mathrm{rf}}(x,y))$.

(ii) $x + y = y(x \cdot \frac{1}{y} + 1)$.

命題 2.12. k を標数が 2 ではない体, $x, y \in \mathcal{M}_{0,4}(k)$ を相異なる元とする．このとき:

(i) $x = -1 \Longleftrightarrow \frac{1}{x} = x$.

(ii) $x \neq -1$ ならば, $1 + 1 = p_5^{\mathrm{tpd}}(\tau_{\mathrm{rf}}(-1, x))$.

(iii) $x \neq -1$ ならば, $x + 1 = p_5^{\mathrm{tpd}}(\tau_{\mathrm{cr}}(x, -1))$.

(iv) $x + y = y(x \cdot \frac{1}{y} + 1)$.

いずれも定義から直ちに従う．

3　CFS-組から体を復元

§3 では, 定理 1.2 (i) で復元されたデータ (CFS-組) から体を復元する. §2 をまねて, CFS-組に体構造を定義する.

定義 3.1. $A, B, \partial B, H, M$ を集合とする. ある体 k が存在して, $A = \overline{\mathcal{M}}_{0,5}(k)$; $B = \overline{\mathcal{M}}_{0,4}(k)$; $\partial B = \{0, 1, \infty\} \subseteq B$; $H = \mathrm{Aut}_k(S_5)$; $M = \{\mathcal{M}_{0,5} \to \mathcal{M}_{0,4}\}$ は 30 個の自然な射の集合となるとき, $\mathscr{A} = (A, B, \partial B, H, M)$ を **CFS-組**という.

定義 3.2. $(A, B, \partial B, H, M)$ を CFS-組とする. M 上の同値関係を以下のようにして与える: ${}^{\dagger}\lambda, {}^{\ddagger}\lambda \in M$ に対して,

$$ {}^{\dagger}\lambda \sim {}^{\ddagger}\lambda \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \{{}^{\dagger}\lambda^{-1}(b)\}_{b \in \partial B} = \{{}^{\ddagger}\lambda^{-1}(b)\}_{b \in \partial B} $$

とする. 同値類全体の集合の濃度は 5 である.

定義 3.3. $(A, B, \partial B, H, M)$ を CFS-組, $\phi \colon H \overset{\sim}{\to} S_5$ を群の同型射とする. H は M に自然に作用することに注意する. $a \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ をとる. $a \notin \{b, c\}$ となる任意の互換 $(b, c) \in S_5$ に対して, $N = N \circ (\phi^{-1}(b, c))$ となるようなただ一つの同値類 N を $M_a[\phi]$ とかく. したがって, $M = M_1[\phi] \sqcup \cdots \sqcup M_5[\phi]$ となる. $\lambda \in M_1[\phi]$ をとる. $p_1[\phi, \lambda] \overset{\mathrm{def}}{=} \lambda$, $p_i[\phi, \lambda] \overset{\mathrm{def}}{=} p_{i-1}[\phi, \lambda] \circ (\phi^{-1}(i-1, i))$ と定義する, ここで, $i \in \{2, 3, 4, 5\}$, $(i-1, i) \in S_5$.

定義 3.4. $(A, B, \partial B, H, M)$ を CFS-組, $\phi \colon H \overset{\sim}{\to} S_5$ を同型射とする. $\lambda \in M_1[\phi]$ をとる. $x, y \in B$ を相異なる元とする. このとき, あるただ一つの $z \in A$ が存在して, $p_5[\phi, \lambda](z) = x$, $p_4[\phi, \lambda](z) = y$ となる. $(x, y)[\phi, \lambda] \overset{\mathrm{def}}{=} z$ とかく.

定義 3.5. $(A, B, \partial B, H, M)$ を CFS-組, $\phi \colon H \overset{\sim}{\to} S_5$ を同型射とする. $\lambda \in M_1[\phi]$ をとる. このとき:

- ただ一つの元 $x \in \partial B$ が存在して, 任意の $y \in B \setminus \{x\}$ に対して,

  $$ x = p_5[\phi, \lambda]((\phi^{-1}(2, 3))(x, y)[\phi, \lambda]) $$

  となるとき, x を $0[\phi, \lambda]$ とかく.

- ただ一つの元 $x \in \partial B$ が存在して, 任意の $y \in B \setminus \{x\}$ に対して,

  $$ x = p_5[\phi, \lambda]((\phi^{-1}(1, 3))(x, y)[\phi, \lambda]) $$

  となるとき, x を $1[\phi, \lambda]$ とかく.

- ただ一つの元 $x \in \partial B$ が存在して, 任意の $y \in B \setminus \{x\}$ に対して,

  $$ x = p_5[\phi, \lambda]((\phi^{-1}(1, 2))(x, y)[\phi, \lambda]) $$

  となるとき, x を $\infty[\phi, \lambda]$ とかく.

従って, $\{0[\phi, \lambda], 1[\phi, \lambda], \infty[\phi, \lambda]\} = \partial B$.

定義 3.6. $(A, B, \partial B, H, M)$ を CFS-組, $\phi\colon H \xrightarrow{\sim} S_5$ を同型射とする. $\tau_{\mathrm{rf}}[\phi], \tau_{\mathrm{ra}}[\phi], \tau_{\mathrm{cr}}[\phi] \in H$ を以下を満たすただ一つの元とする:

$$M_4[\phi] \circ \tau_{\mathrm{rf}}[\phi] = M_3[\phi],\ M_3[\phi] \circ \tau_{\mathrm{rf}}[\phi] = M_4[\phi],\ M_i[\phi] \circ \tau_{\mathrm{rf}}[\phi] = M_i[\phi],$$
$$M_2[\phi] \circ \tau_{\mathrm{ra}}[\phi] = M_4[\phi],\ M_4[\phi] \circ \tau_{\mathrm{ra}}[\phi] = M_2[\phi],\ M_j[\phi] \circ \tau_{\mathrm{ra}}[\phi] = M_j[\phi],$$
$$M_4[\phi] \circ \tau_{\mathrm{cr}}[\phi] = M_1[\phi],\ M_5[\phi] \circ \tau_{\mathrm{cr}}[\phi] = M_2[\phi],\ M_1[\phi] \circ \tau_{\mathrm{cr}}[\phi] = M_3[\phi],$$
$$M_2[\phi] \circ \tau_{\mathrm{cr}}[\phi] = M_4[\phi],\ M_3[\phi] \circ \tau_{\mathrm{cr}}[\phi] = M_5[\phi],$$

ここで, $i \in \{1, 2, 5\}$, $j \in \{1, 3, 5\}$.

定義 3.7. $\mathscr{A} = (A, B, \partial B, H, M)$ を CFS-組, $\phi\colon H \xrightarrow{\sim} S_5$ を同型射とする. $\lambda \in M_1[\phi]$ をとる. 写像

$$\boxplus, \boxtimes\colon (B \setminus \{\infty[\phi,\lambda]\}) \times (B \setminus \{\infty[\phi,\lambda]\}) \to (B \setminus \{\infty[\phi,\lambda]\}),$$
$$\boxminus\colon (B \setminus \{\infty[\phi,\lambda]\}) \to (B \setminus \{\infty[\phi,\lambda]\}),$$
$$\boxslash\colon (B \setminus \{0[\phi,\lambda], \infty[\phi,\lambda]\}) \to (B \setminus \{0[\phi,\lambda], \infty[\phi,\lambda]\})$$

を以下のように定義する:

(1) 一般の場合:

(a) $\boxminus(0[\phi,\lambda]) = 0[\phi,\lambda]$, $\boxslash(1[\phi,\lambda]) = 1[\phi,\lambda]$.

(b) $x, y \in B \setminus \{\infty[\phi,\lambda]\}$ に対して, $\boxplus(x,y) = \boxplus(y,x)$, $\boxtimes(x,y) = \boxtimes(y,x)$.

(c) $x \in B \setminus \{\infty[\phi,\lambda]\}$ に対して, $\boxplus(0[\phi,\lambda], x) = x$, $\boxtimes(0[\phi,\lambda], x) = 0[\phi,\lambda]$, $\boxplus(x, \boxminus(x)) = 0[\phi,\lambda]$.

(d) $x \in B \setminus \{0[\phi,\lambda], \infty[\phi,\lambda]\}$ に対して, $\boxtimes(1[\phi,\lambda], x) = x$, $\boxtimes(x, \boxslash(x)) = 1[\phi,\lambda]$.

(e) $x, y \in B \setminus \partial B$ を $x \neq y$ を満たすものとする. このとき,

$$\boxslash(x) = p_5[\phi,\lambda](\tau_{\mathrm{ra}}[\phi,\lambda](x,y)).$$

(f) $x, y \in B \setminus \partial B$ を $y \neq \boxslash(x)$ を満たすものとする. このとき,

$$\boxtimes(x,y) = p_4[\phi,\lambda](\tau_{\mathrm{ra}}[\phi,\lambda](\boxslash(x), y)).$$

(2) $\sharp B = 4$ と仮定する. このとき, $B \setminus \{\infty[\phi,\lambda]\}$ に対する写像 $\boxplus, \boxtimes, \boxminus, \boxslash$ を以下のように定める: $\{a\} = B \setminus \{0[\phi,\lambda], 1[\phi,\lambda], \infty[\phi,\lambda]\}$ としたとき,

$\boxplus$	$0[\phi,\lambda]$	$1[\phi,\lambda]$	a
$0[\phi,\lambda]$	$0[\phi,\lambda]$	$1[\phi,\lambda]$	a
$1[\phi,\lambda]$	$1[\phi,\lambda]$	a	$0[\phi,\lambda]$
a	a	$0[\phi,\lambda]$	$1[\phi,\lambda]$

$\boxtimes$	$0[\phi,\lambda]$	$1[\phi,\lambda]$	a
$0[\phi,\lambda]$	$0[\phi,\lambda]$	$0[\phi,\lambda]$	$0[\phi,\lambda]$
$1[\phi,\lambda]$	$0[\phi,\lambda]$	$1[\phi,\lambda]$	a
a	$0[\phi,\lambda]$	a	$1[\phi,\lambda]$

$$\boxminus(0[\phi,\lambda]) = 0[\phi,\lambda], \quad \boxminus(1[\phi,\lambda]) = a, \quad \boxminus(a) = 1[\phi,\lambda],$$
$$\boxslash(1[\phi,\lambda]) = 1[\phi,\lambda], \quad \boxslash(a) = a.$$

(3)

$$\boxslash(x) = x$$

を満たす $x \in B \setminus \partial B$ が存在しないと仮定する, このとき:

(a) $x \in B \setminus \{\infty[\phi,\lambda]\}$ をとる. このとき, $\boxminus(x) = x$, $\boxplus(x,x) = 0[\phi,\lambda]$.

(b) $x, y \in B \setminus \partial B$ を $x \neq y$ を満たすものとする. このとき,

$$\boxplus(x, 1[\phi,\lambda]) = p_5[\phi,\lambda](\tau_{\mathrm{rf}}[\phi,\lambda](x,y)).$$

(c) $x, y \in B \setminus \{\infty[\phi,\lambda]\}$ を $y \neq 0[\phi,\lambda]$ を満たすものとする. このとき,

$$\boxplus(x,y) = \boxtimes(y, \boxplus(\boxtimes(x, \boxslash(y)), 1[\phi,\lambda])).$$

(4) $\sharp B \neq 4$ と仮定し, さらにある $x \in B \setminus \partial B$ が存在して,

$$\boxslash(x) = x$$

を満たすと仮定する. このとき:

(a) $x, y \in B \setminus \partial B$ を $\boxslash(x) = x$ を満たすものとする. このとき, $\boxminus(1[\phi,\lambda]) = x \in B$, $\boxminus(y) = \boxtimes(x,y)$.

(b) $x \in B \setminus (\partial B \sqcup \{\boxminus(1[\phi,\lambda])\})$ をとる. このとき,

$$\boxplus(1[\phi,\lambda], 1[\phi,\lambda]) = p_5[\phi,\lambda](\tau_{\mathrm{rf}}[\phi,\lambda](\boxminus(1[\phi,\lambda]), x)).$$

(c) $x \in B \setminus (\partial B \sqcup \{\boxminus(1[\phi,\lambda])\})$ をとる. このとき,

$$\boxplus(x, 1[\phi,\lambda]) = p_5[\phi,\lambda](\tau_{\mathrm{cr}}[\phi,\lambda](x, \boxminus(1[\phi,\lambda]))).$$

(d) $x, y \in B \setminus \{\infty[\phi,\lambda]\}$ を $y \neq 0[\phi,\lambda]$ を満たすものとする. このとき,

$$\boxplus(x,y) = \boxtimes(y, \boxplus(\boxtimes(x, \boxslash(y)), 1[\phi,\lambda])).$$

これにより, 体 $F[\mathscr{A}, \phi, \lambda] \stackrel{\mathrm{def}}{=} (B \setminus \{\infty[\phi,\lambda]\}, \boxplus, \boxtimes)$ が得られる.

定理 3.8. $\mathscr{A} = (A, B, \partial B, H, M)$ を CFS-組, k を定義 3.1 のものとする. $\phi\colon H \xrightarrow{\sim} S_5$ を同型射とする. $\lambda \in M_1[\phi]$ をとる. このとき, 全単射

$$t_{0[\phi,\lambda],1[\phi,\lambda],\infty[\phi,\lambda]}\colon B = \overline{M}_{0,4}(k) \xrightarrow{\sim} k \cup \{\infty\}$$

(命題 2.4 を参照.) は体同型

$$F[\mathscr{A}, \phi, \lambda] \xrightarrow{\sim} k$$

を誘導する. とくに, (定理 1.2 (i) が成り立つとき,) 定理 1.2 (ii) が成り立つ.

証明. §2, §3 の議論から従う. □

参考文献

[1] K. Higashiyama, The semi-absolute anabelian geometry of geometrically pro-p arithmetic fundamental groups of associated low-dimensional configuration spaces, in preparation.

[2] K. Higashiyama, 2 次配置空間の副 p 基本群を用いた関数体の復元, 研究報告, 投稿中.

[3] S. Mochizuki, The local pro-p anabelian geometry of curves, Invent Math. **138** (1999), 319–423.

[4] S. Mochizuki, Topics in absolute anabelian geometry I: generalities, J. Math. Sci. Univ. Tokyo. **19** (2012), 139–242.

[5] S. Mochizuki, Topics in absolute anabelian geometry II: decomposition groups and endomorphisms, J. Math. Sci. Univ. Tokyo. **20** (2013), 171–269.

[6] S. Mochizuki, Topics in absolute anabelian geometry III: global reconstruction algorithms, J. Math. Sci. Univ. Tokyo. **22** (2015), 939–1156.

[7] H. Nakamura, Galois rigidity of pure sphere braid groups and profinite calculus, J. Math. Sci. Univ. Tokyo. **1** (1994), 71–136.

[8] H. Nakamura and N. Takao, Galois rigidity of pro-l pure braid groups of algebraic curves, Trans. Amer. Math. Soc. **350** (1998), 1079–1102.