絶対版 Grothendieck 予想への p 進解析的アプローチ

室谷 岳寛 (京都大学)

概 要

本稿の目的は, 第 12 回福岡数論研究集会での筆者の講演内容をまとめるとともに, 講演では扱えなかった内容を紹介することにある. 今回の研究集会において, 講演の機会を与えてくださったオーガナイザーの方々に心より深く感謝申し上げる. なお, 講演内容及び本稿の内容は [5] に基づくものである.

1 Introduction

「遠アーベル幾何学」とは, 以下に述べる Grothendieck 予想と, それに関連する諸問題を扱う分野である:

Conjecture 1.1. 素体上有限生成な体 K 上の「遠アーベル」多様体 V の幾何は, 数論的基本群 $\pi_1(V, \xi)$ と, 全射 $\pi_1(V, \xi) \twoheadrightarrow \pi_1(\operatorname{Spec} K, \xi)(\simeq \operatorname{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K))$ により完全に決定されるであろう (ここで ξ は V の幾何的点, K^{sep} は K の分離閉包である).

Grothendieck は「遠アーベル」多様体の定義を与えず, 今日に至るまで適切な定義は見つかっていないが, 彼は V が連結かつ非特異な 1 次元スキームの場合, V が「遠アーベル」であることと, その Euler-Poincaré 標数 $\chi = 2 - 2g - n$ が負であることが同値であろうと述べている (ここで, g は V の滑らかなコンパクト化 Y の種数, n は $Y \setminus V$ の幾何的点の個数である). この条件を満たす曲線を双曲的曲線と呼ぶ. K の標数が 0 のとき, これは V の幾何的基本群 (すなわち, $\overline{K}$ を K の代数閉包としたときの $V \times_{\operatorname{Spec} K} \operatorname{Spec} \overline{K}$ の étale 基本群) が可換でないことと同値である.

K の標数が 0 の場合, 双曲的曲線に対する Conjecture 1.1 は, 中村博昭氏 ([6], [7]) により K が $\mathbb{Q}$ 上有限生成かつ $g = 0$ の場合, 玉川安騎男氏 ([11]) により K が $\mathbb{Q}$ 上有限生成かつ $n \neq 0$ の場合に肯定的に解決された後, 望月新一氏 ([2]) により, Grothendieck 自身の予想を超える次のような形で解決された:

Theorem 1.2 (cf. [2, Theorem A], [3, Theorem 1.3.4])**.** p を素数, K を劣 p 進体 ($\mathbb{Q}_p$ 上有限生成な体の部分体に同型な体), G_K を K の絶対 Galois 群とする. X, Y を K 上の双曲的曲線, $\pi_1(X)$, $\pi_1(Y)$ をその数論的基本群, Δ_X, Δ_Y を幾何的基本群とする. $\operatorname{Isom}_K(X, Y)$ を K 同型 $X \xrightarrow{\sim} Y$ の集合, $\operatorname{Isom}^{\mathrm{Out}}_{G_K}(\pi_1(X), \pi_1(Y))$ を, G_K への全射と compatible な同型 $\pi_1(X) \xrightarrow{\sim} \pi_1(Y)$ の Δ_Y 共役類の集合とする. このとき, 自然な写像

$$\operatorname{Isom}_K(X, Y) \to \operatorname{Isom}^{\mathrm{Out}}_{G_K}(\pi_1(X), \pi_1(Y))$$

は全単射である.

以上は, 基礎体 K を固定し, その絶対 Galois 群 G_K 上の同型を考えているという意味で「相対的」な問題であったが, 望月氏は [3] において, K 及び G_K を固定しない「絶対的」な状況で同様の問題を考えることを提唱し, 同じ論文 [3] において, 基礎体が代数体である場合には, 次のような「絶対版」Grothendieck 予想が成立することを示した:

Theorem 1.3 (cf. [3, Corollary 1.3.5])**.** *X (resp. Y) を代数体 K (resp. L) 上の双曲的曲線, $\pi_1(X)$ (resp. $\pi_1(Y)$) をその数論的基本群とする. $\mathrm{Isom}(X, Y)$ をスキームの同型 $X \xrightarrow{\sim} Y$ の集合, $\mathrm{Isom}^{\mathrm{out}}(\pi_1(X), \pi_1(Y))$ を副有限群の同型 $\pi_1(X) \xrightarrow{\sim} \pi_1(Y)$ の $\pi_1(Y)$ 共役類の集合とする. このとき, 自然な写像*

$$\mathrm{Isom}(X, Y) \to \mathrm{Isom}^{\mathrm{Out}}(\pi_1(X), \pi_1(Y))$$

は全単射である.

この定理の証明の鍵となるのが Neukirch-内田の定理 ([8, Theorem 12.2.1]) である. ところが, p 進局所体 ($\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体) に対しては, Neukirch-内田の定理の類似が成り立たないことが反例をもって知られており (cf. [8, Chapter VII, §5]), 同様の手法は使えない. その後も, 望月氏により双曲的曲線に特殊な仮定を置いた場合に一部肯定的な結果が知られているものの, 一般に Theorem 1.3 の「p 進局所体版」が成立するか否かは未だ知られていない.

一方で, この「絶対 p 進版 Grothendieck 予想」は望月氏の結果 (cf. Theorem 4.4) により分解群の群論的復元の問題に帰着され, さらに分解群の群論的復元の問題は, 玉川氏の結果 (cf. Theorem 4.5) により有理点の有無の群論的判定の問題に帰着される. ここで, $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体 K 上の固有かつ滑らかな双曲的曲線 X の K 有理点の集合 $X(K)$ が自然に K 上の analytic manifold の構造を持つことに注目し, Serre により定義された「i 不変量」(cf. 2 節) を考える. K の剰余体の元の数を q とするとき, K 上のコンパクトな analytic manifold は有限個の (閉) 球の非交和に書け, さらにその球の個数は $\mathrm{mod}\,(q-1)$ で一定となるという事実により, その「球の個数 $\mod (q-1)$」を analytic manifold の (K 上の) i 不変量と呼ぶのである. すぐにわかるように, $X(K)$ の K 上の i 不変量 $i_K(X(K))$ が 0 でなければ $X(K)$ が空でないことが言えるが, 逆は成り立たない. この意味で, i 不変量は「有理点の有無」という情報よりある意味で「弱い」情報であり, 群論的に「復元しやすい」可能性があるというメリットがある.

i 不変量を (必ずしも固有とは限らない一般の双曲的曲線に対する)「絶対 p 進版 Grothendieck 予想」に応用する上で, 大きく分けて 2 つの問題がある:

(A) 双曲的曲線およびその被覆の有理点集合の i 不変量の情報から分解群が復元できるか？

(B) 双曲的曲線の有理点集合の i 不変量そのものは群論的か？

次の定理は本稿の 1 つ目の主定理で, (A) の問に完全に肯定的な解答を与える:

Theorem 1.4. *K, X, q を上と同様に定める. $q \neq 2$ とし, m を $q-1$ の 1 でない正の約数とする. このとき, 次の 5 条件は同値である:*

(i) $X(K) \neq \emptyset$.

(ii) ある X の有限 étale 被覆 X' が存在して, $X'(K) \neq \emptyset$.

(iii) ある X の有限 étale 被覆 X' が存在して, $i_K(X'(K)) \not\equiv 0 \mod (q-1)$.

(iv) ある X の有限 étale 被覆 X' が存在して, $i_K(X'(K)) \not\equiv 0 \mod m$.

(v) ある X の有限 étale 被覆 X' が存在して, $i_K(X'(K)) \equiv (p\text{ の冪}) \mod (q-1)$.

また, Theorem 4.8 及び Corollary 4.9 はこの定理の遠アーベル幾何的な帰結である.
さらに, 次の定理は本稿の 2 つ目の主定理で, (B) の問に部分的に肯定的な解答を与える:

Theorem 1.5. $i = 1, 2$ に対し, p_i を素数, K_i を $\mathbb{Q}_{p_i}$ の有限次拡大体, U_i を K_i 上の双曲的曲線, X_i をその滑らかなコンパクト化, g_i をその種数とし, 副有限群の同型 $\alpha : \pi_1(U_1) \xrightarrow{\sim} \pi_1(U_2)$ が与えられているとする (このとき, 4 節で述べるように, $p_1 = p_2 =: p$, $g_1 = g_2 =: g$ である). p が奇素数で, かつ $g \geq 2$ で, X_i が log smooth reduction を持つとき,

$$i_{K_1}(X_1(K_1)) \equiv i_{K_2}(X_2(K_2)) \mod 2.$$

なお, log smooth reduction の定義については 3 節を参照されたい.

Remark 1.6. X_i が log smooth reduction を持つことを仮定せずに Theorem 1.5 を証明できれば, p が奇素数の場合に上の問 (B) に肯定的な解答を与えたことになり, 問 (A) を肯定する Theorem 1.4 (あるいは Corollary 4.9) と合わせて, 「絶対 p 進版 Grothendieck 予想」が肯定的に解決する.

以下に, 本稿の流れを述べる. 2 節では, 概ね問 (A) の内容を扱い, i 不変量を定義した後, Theorem 1.4 を導く. 3 節では, 概ね問 (B) の内容を扱い, Theorem 1.5 の証明の根幹をなす部分の議論を行う. 4 節では, 前節までの内容を総合し, それらの遠アーベル幾何的帰結を述べ, Theorem 1.5 を証明する.

2 i 不変量と有理点

この節では, 「i 不変量」を定義した後, $J(K)$ (J は X の Jacobian, $J(K)$ はその K 有理点の集合) の部分集合としての $X(K)$ の性質に注目して, 主定理の一つである Theorem 1.4 を導く. analytic manifold の定義等に関しては, [10, Part II, Chapter III] を参照されたい.
「i 不変量」が定義できることは次の定理により保証される:

Theorem 2.1 (cf. [10, Part II, Chapter III, Appendix 2, Theorem 2]). K を剰余体が有限であるような完備離散付値体とし, q をその剰余体の元の個数とする. X を至る所 n 次元 ($n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) である空でないコンパクトな K 上の analytic manifold とするとき, 以下が成り立つ:

(1) X は有限個の球の非交和となる.

(2) X を有限個の球の非交和に書いたとき, その球の個数は $\mathrm{mod}\,(q-1)$ で一定となる.

Definition 2.2. Theorem 2.1 の状況で, (2) の主張により定まる球の個数 $i_K(X) \in \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$ を X の K 上の i 不変量と呼ぶ. また, 空集合に対しては, $i_K(\emptyset) \equiv 0 \mod (q-1)$ と約束する.

以下, この節では p を素数, K を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体, $\mathcal{O}_K$ をその整数環, q を K の剰余体の元の個数とする. また, X を K 上の固有かつ滑らかで幾何的に連結な種数 $g\,(\geq 2)$ の双曲的曲線とする. このとき, X の K 有理点の集合 $X(K)$ は自然に (至る所) 1 次元のコンパクトな K 上の analytic manifold の構造を持つ.

X の Jacobian を J とする．$X(K) \neq \emptyset$ なら，$P_0 \in X(K)$ を取って固定することで，$P \mapsto [\mathscr{L}(P - P_0)]$ により閉埋め込み $j : X \to J$ が定まる．$m \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し，J の m 倍写像を $m_J : J \to J$ とする．$X_m := X \times_{j,\,J,\,m_J} J$ と定めると，X_m は X の étale 被覆である．

J の K 有理点の集合 $J(K)$ は Abel 群の構造と，(至る所) g 次元のコンパクトな K 上の analytic manifold の構造を持ち，次の完全列が存在する [10, Part II, Chapter V, 7, Corollary 4]:

$$0 \to \mathcal{O}_K^{\oplus g} \to \ J(K) \to G \to 0.$$

ただし，G は有限 Abel 群である．位数が p 冪の有限 Abel 群 G_p と，位数が p と互いに素な有限 Abel 群 $G_{p'}$ が存在して $G \simeq G_p \times G_{p'}$ と書ける．上の完全列の p-part と prime-to-p-part をとって

$$0 \to \mathcal{O}_K^{\oplus g} \to J(K)^p \to G_p \to 0,$$
$$0 \to 0 \to J(K)^{p'} \to G_{p'} \to 0$$

を得る．これにより $J(K) \simeq J(K)^p \times J(K)^{p'} \simeq J(K)^p \times G_{p'}$ となる．

Theorem 1.4 を導くために，命題を 3 つ用意する (証明については [5] を参照されたい)．最初の命題は，「Abel 群 $J(K)$ の部分集合 $X(K)$ は部分群ではないが，$J(K)$ の単位元の十分小さな近傍ではあたかも部分群であるかのような含まれ方をしている」ことを示す:

Proposition 2.3 (cf. [5, Proposition 2.2.2])**.** K 上の analytic manifold $X(K) \subset J(K) \simeq J(K)^p \times G_{p'}$ に対し，n を十分大きく取ると，任意の $a \in G_{p'}$ に対して $X(K) \cap (p^n(J(K)^p) \times \{a\})$ は空または K 上の 1 次元の球の p 冪個の非交和に同型である．

2 つ目の命題は，m 倍写像による $J(K)$ の像と $X(K)$ の共通部分の i 不変量から $X_m(K)$ の i 不変量が計算できることを示す:

Proposition 2.4 (cf. [5, Proposition 2.2.3])**.** $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して

$$i_K(X_m(K)) \equiv i_K(X(K) \cap m(J(K))) \times \sharp J(K)[m] \mod (q-1).$$

3 つ目の命題は，X の J への「都合の良い」埋め込み方があることを保証する:

Proposition 2.5 (cf. [5, Proposition 2.3.1])**.** $X(K) \neq \emptyset$ とする．$J(K) = B$，$X(K) = S$，$M = \{0\} \times G_{p'} \subset J(K)^p \times G_{p'} \simeq J(K)$ とおく．このとき，ある $P \in X(K)$ が存在して，$S - P := \{Q - P \in B \,|\, Q \in S\}$ と定めると，

$$(S - P) \cap M = \{(0, 0)\}.$$

これらを用いて，Theorem 1.4 を示す:

Proof of Theorem 1.4. (v) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (i) は自明である．(i) $\Longrightarrow$ (v) を示す．

Proposition 2.5 により，ある $P_0 \in X(K)$ が存在して，$P \mapsto [\mathscr{L}(P - P_0)]$ から定まる閉埋め込み $j : X \to J$ に関して，

$$J(K) \simeq J(K)^p \times G_{p'} \supset X(K) \cap (\{0\} \times G_{p'}) = \{O\}$$

となる (ここで，O は Abel 群 $J(K)$ の単位元に対応する点である)．

このとき, n を十分大きくとると, $X(K)\cap p^n(J(K)) = X(K)\cap(p^n(J(K)^p)\times\{0\})$ となり, Proposition 2.3 により, これは K 上の 1 次元の球の p 冪個の非交和に同型となる. つまり $i_K(X(K)\cap p^n(J(K)))\equiv(p\text{ の冪}) \mod (q-1)$ である. ところが, Proposition 2.4 により

$$i_K(X_{p^n}(K))\equiv i_K(X(K)\cap p^n(J(K)))\times \sharp J(K)[p^n] \mod (q-1)$$

であるので, $\sharp J(K)[p^n]$ が p 冪であることに注意すると, (v) が従う. $\square$

3 有理点への Galois 作用と i 不変量

この節では, $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体 K 上の固有かつ滑らかで幾何的に連結な双曲的曲線 X の K 有理点の集合 $X(K)$ の i 不変量を, stable model の special fiber の情報から復元することを目指した議論を展開する. 望月氏の結果 (cf. Theorem 4.10) により, stable model の special fiber は群論的であるため, これができれば曲線の有理点集合の i 不変量が群論的であることが言える. Deligne-Mumford の定理 (Theorem 3.1) により, K の有限次 Galois 拡大体 L があり, $X_L := X\times_{\operatorname{Spec}K}\operatorname{Spec}L$ には stable model が一意に存在する. ここでは, p が奇素数で, L/K が馴分岐拡大にとれる場合に, $i_K(X(K)) \mod 2$ が stable model の special fiber から復元できることを示す.

Theorem 3.1 (Deligne-Mumford (cf. [1, §10, Theorem 4.3]))**.** S を 1 次元 Dedekind スキーム, $K(S)$ をその関数体とする. C を $K(S)$ 上の滑らかで射影的, かつ幾何的に連結な種数 $g\geq 2$ の曲線とする. このとき, S 上有限かつ平坦な Dedekind スキーム S' (関数体は $K(S')$) が存在して, $C_{K(S')} := C\times_{\operatorname{Spec}K(S)}\operatorname{Spec}K(S')$ は S' 上で stable model をもつ. また, このとき $C_{K(S')}$ の S' 上の stable model は同型を除いて一意的である. さらに $K(S')$ は $K(S)$ 上分離的であるようにとれる.

次に述べる log smooth reduction の定義は通常のものとは異なるが, [9, Theorem 4.2] により, それらは同値となる.

Definition 3.2. p を素数とし, K を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体とする. X を K 上の固有かつ滑らかで幾何的に連結な双曲的曲線 (したがってその種数 g は 2 以上) とする. Theorem 3.1 より, ある K の有限次拡大体 L が存在して, $X_L := X\times_{\operatorname{Spec}K}\operatorname{Spec}L$ は $\mathcal{O}_L$ 上 stable model を持つ ($\mathcal{O}_L$ は L の整数環). L として K 上馴分岐であるものが取れるとき, X は log smooth reduction を持つという.

以下, この節では p を素数, K を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体, X を K 上固有かつ滑らかで幾何的に連結な双曲的曲線とする. Theorem 3.1 より, K の有限次 Galois 拡大体 L があり, $X_L := X\times_{\operatorname{Spec}K}\operatorname{Spec}L$ は stable model $\mathfrak{X}$ をもつ. $\mathcal{O}_K, \mathcal{O}_L$ をそれぞれ K, L の整数環, $\mathfrak{M}_K, \mathfrak{M}_L$ をその極大イデアル, $k=\mathcal{O}_K/\mathfrak{M}_K$, $k_L=\mathcal{O}_L/\mathfrak{M}_L$ を剰余体とする. 必要ならば L を適当な不分岐拡大体に取りかえて, $\mathfrak{X}_{k_L}(k_L)$ (ここで, $\mathfrak{X}_{k_L}=\mathfrak{X}\times_{\operatorname{Spec}\mathcal{O}_L}\operatorname{Spec}k_L$ であり, $\mathfrak{X}_{k_L}(k_L)$ はその k_L 有理点の集合) のすべての特異点が split であると仮定する. $q=\sharp k$ とする. また, $\mathcal{O}_L$ の uniformizer π をとる. $G=\operatorname{Gal}(L/K)$ とし, $I\subset G$ を惰性群とする.

$X(K)$ (resp. $X(L)$) を X の K (resp. L) 有理点の集合, $\mathfrak{X}(\mathcal{O}_L)$ を $\mathfrak{X}$ の $\mathcal{O}_L$ 有理点の集合とする. また, $\mathfrak{X}_{k_L}(k_L)$ の点のうち, k_L 上滑らかなものの集合を $\mathfrak{X}^{\mathrm{sm}}_{k_L}(k_L)$, 滑らかでないものの集合を $\mathfrak{X}^{\mathrm{node}}_{k_L}(k_L)$ とする. 特に, $\mathfrak{X}_{k_L}(k_L)=\mathfrak{X}^{\mathrm{sm}}_{k_L}(k_L)\cup\mathfrak{X}^{\mathrm{node}}_{k_L}(k_L)$ となる.

stable model の一意性 (Theorem 3.1) により, これらの集合には G が作用するが, その不変部分を $X(L)^G$ のように表す. 自然な射 $\mathfrak{X}(\mathcal{O}_L) \to X(L)$, $\rho : \mathfrak{X}(\mathcal{O}_L) \to \mathfrak{X}_{k_L}(k_L)$ が存在するが, $\mathfrak{X}$ は $\mathcal{O}_L$ 上固有なので, 固有性の付値判定法から, 前者は全単射である. また, これらの射は G 同変である. $X(K) = X(L)^G$ であることに注意すると, 次の可換図式を得る:

$$\begin{tikzcd}
X(L) & \mathfrak{X}(\mathcal{O}_L) \arrow[l, "\sim"'] \arrow[r, "\rho"] & \mathfrak{X}_{k_L}(k_L) \\
X(K) \arrow[u, hook] & \mathfrak{X}(\mathcal{O}_L)^G \arrow[l, "\sim"'] \arrow[r, "\rho'"] \arrow[u, hook] & \mathfrak{X}_{k_L}(k_L)^G \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

任意の $P \in \mathfrak{X}_{k_L}(k_L)^G$ に対して, $\rho^{-1}(P)$ への G の作用を具体的に書き下す.

$\mathrm{pr} : X_L := X \times_{\operatorname{Spec} K} \operatorname{Spec} L \to X$ を射影とする.

$$\begin{tikzcd}
X_L \arrow[r, "\mathrm{pr}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d] \\
\operatorname{Spec} L \arrow[r] & \operatorname{Spec} K
\end{tikzcd}$$

$\operatorname{Hom}_{\operatorname{Spec} L}(\operatorname{Spec} L,\, X_L) \to \operatorname{Hom}_{\operatorname{Spec} K}(\operatorname{Spec} L,\, X)$, $\phi_L \mapsto \mathrm{pr} \circ \phi_L = \phi$ は全単射である. $\gamma \in G$ に対して, γ が誘導する $\operatorname{Spec} L$ の $\operatorname{Spec} K$ 上の自己同型を $\widetilde{\gamma}$ とする. このとき, $\phi \in \operatorname{Hom}_{\operatorname{Spec} K}(\operatorname{Spec} L,\, X)$ に対する $\gamma \in G$ の作用を $\gamma \cdot \phi = \phi \circ \widetilde{\gamma}$ で定める. 全単射 $\operatorname{Hom}_{\operatorname{Spec} L}(\operatorname{Spec} L, X_L) \to \operatorname{Hom}_{\operatorname{Spec} K}(\operatorname{Spec} L,\, X)$ が G 同変になるように $\operatorname{Hom}_{\operatorname{Spec} L}(\operatorname{Spec} L,$ $X_L)$ にも G を作用させるとすると, $\gamma \cdot \phi_L = (\gamma \cdot \phi)_L$ であるから, $\gamma \cdot \phi_L$ は次の図式を可換にするものである:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} L \arrow[r, "\gamma\cdot\phi_L"] \arrow[rr, bend left, "\gamma\cdot\phi"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & X_L \arrow[r, "\mathrm{pr}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d] \\
 & \operatorname{Spec} L \arrow[r] & \operatorname{Spec} K
\end{tikzcd}$$

つまり, $\gamma \cdot \phi_L = (\mathrm{id}_X \times \widetilde{\gamma}^{-1}) \circ \phi_L \circ \widetilde{\gamma}$ である.

$k(P)(\simeq k_L)$ を P における剰余体とすると, 次のような可換図式がある:

$$\begin{tikzcd}
 & \operatorname{Spec}(\hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{X},P} \otimes_{\mathcal{O}_L} L) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \operatorname{Spec} \hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{X},P} \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \operatorname{Spec} k(P) \arrow[l] \arrow[d] \\
X \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X_L \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathfrak{X} \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathfrak{X}_{k_L} \arrow[l] \arrow[d] \\
\operatorname{Spec} K & \operatorname{Spec} L \arrow[l] \arrow[r] & \operatorname{Spec} \mathcal{O}_L & \operatorname{Spec} k_L \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Case 1: $P \in \mathfrak{X}^{\mathrm{sm}}_{k_L}(k_L)^G$ の場合. このとき, $\hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{X},P} \simeq \mathcal{O}_L[[T]]$ であり,

$$\begin{aligned}
\rho^{-1}(P) &\simeq \operatorname{Hom}_{\operatorname{Spec} \mathcal{O}_L}(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_L,\, \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{\mathfrak{X},P}) \\
&\simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_L}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},P},\, \mathcal{O}_L) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_L}(\hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{X},P}, \mathcal{O}_L) \simeq \mathfrak{M}_L.
\end{aligned}$$

ただし, 最後の全単射は $x \in \mathfrak{M}_L$ に対して, $f_x(T) = x$ なる $f_x : \hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{X},P} \simeq \mathcal{O}_L[[T]] \to \mathcal{O}_L$ を対応させる.

$x \in \mathfrak{M}_L \simeq \rho^{-1}(P)$ に対応する $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_L}(\hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{X},P}, \mathcal{O}_L)$ の元を f_x とし，この f_x から得られる $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Spec}\,L}(\mathrm{Spec}\,L, X_L)$ の元を ϕ_x とする．$\gamma \in G$ に対し，$\gamma \cdot \phi_x = (\mathrm{id}_X \times \widetilde{\gamma}^{-1}) \circ \phi_x \circ \widetilde{\gamma}$ であったから，$(\gamma \cdot f_x)(T) = \gamma(f_x(\gamma^{-1} \cdot T))$ である．

一方で，$\hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{X},P} \simeq \mathcal{O}_L[[T]]$ には G が次のように作用する:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, phantom, "\curvearrowright"] \arrow[d, equal] & \hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{X},P} \\ G \arrow[r, phantom, "\curvearrowright"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathcal{O}_L \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

つまり，$\gamma' \in G$ と $a \in \mathcal{O}_L \subset \hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{X},P}$ に対しては $\gamma' \cdot a = \gamma'(a)$($\mathcal{O}_L \subset L$ の元としての作用) である．また，$T \in \mathcal{O}_L[[T]] \simeq \hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{X},P}$ に対しては，$a_i \in \mathcal{O}_L$ を用いて $\gamma' \cdot T = \sum_{i=0}^{\infty} a_i T^i$ と書ける．以下では $\gamma' \cdot T$ を単に $\gamma'(T)$ とも書く．

この係数 a_i について，次が成り立つ:

Lemma 3.3 (cf. [5, Lemma 3.3.2])**.** 上の $a_i \in \mathcal{O}_L$ に関して，$a_0 \in \mathfrak{M}_L$ かつ $a_1 \in \mathcal{O}_L^{\times}$ である．

上の議論で $\gamma' = \gamma^{-1}$ とすると，$(\gamma \cdot f_x)(T) = \gamma(f_x(\gamma^{-1}(T))) = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma(a_i x^i)$ となる．以上により，$\rho^{-1}(P)$ を $\mathfrak{M}_L$ と同一視したとき，$x \in \mathfrak{M}_L$ の $\gamma \in G$ の作用による像を $[\gamma](x)$ と書くと，$[\gamma](x) = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma(a_i x^i)$ となる．

Case 2: $P \in \mathfrak{X}_{k_L}^{\mathrm{node}}(k_L)^G$ の場合．このとき，ある $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ が存在して，$\hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{X},P} \simeq \mathcal{O}_L[[S, T]]/(ST - \pi^r)$ である．以下では，$S, T \in \mathcal{O}_L[[S, T]]$ の $\mathcal{O}_L[[S, T]]/(ST - \pi^r)$ における像も単に S, T と書く．

Remark 3.4. $\mathcal{O}_L[[S, T]]/(ST - \pi^r)$ の元に対し，「定数項」や「S^i (resp. T^i) の係数 $(i \geq 1)$」は well-defined でないが，$\mathrm{mod}\, \mathfrak{M}_L^r$ では well-defined である．また，$\mathcal{O}_L[[S, T]]/(ST - \pi^r)$ においては $ST = \pi^r$ という関係式があるから，任意の $F \in \mathcal{O}_L[[S, T]]/(ST - \pi^r)$ は

$$F = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty}(a_{i,1}S^i + a_{i,2}T^i) \ (a_0,\, a_{i,j} \in \mathcal{O}_L,\, i \geq 1,\, j = 1, 2)$$

の形に一意的に書ける．

Case 1 と同様に，$\gamma' \in G$ と $a \in \mathcal{O}_L \subset \hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{X},P}$ に対しては $\gamma' \cdot a = \gamma'(a)$ のように $\mathcal{O}_L \subset L$ の元として作用する．また，$S, T \in \mathcal{O}_L[[S, T]]/(ST - \pi^r) \simeq \hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{X},P}$ に対しては，

$$\gamma' \cdot \begin{pmatrix} S \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{\infty} \begin{pmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} \\ b_{i,1} & b_{i,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S^i \\ T^i \end{pmatrix}$$

の形に一意的に書ける．ここで，$a_0, b_0, a_{i,j}, b_{i,j} \in \mathcal{O}_L$ $(i \geq 1,\, j = 1, 2)$ である．以下では，$\gamma' \cdot S, \gamma' \cdot T$ を単に $\gamma'(S), \gamma'(T)$ とも書く．

この係数について，次が成り立つ:

Lemma 3.5 (cf. [5, Lemma 3.3.4])**.** 上の $a_0, b_0, a_{i,j}, b_{i,j} \in \mathcal{O}_L$ $(i \geq 1,\, j = 1, 2)$ に関して，$a_0, b_0 \in \mathfrak{M}_L^r$ であり，さらに次のいずれか一方が成り立つ:

(i) $a_{1,1},\, b_{1,2} \in \mathcal{O}_L^\times$ かつ $a_{i,2},\, b_{i,1} \in \mathfrak{M}_L^r$ $(i \geq 1)$.

(ii) $a_{1,2},\, b_{1,1} \in \mathcal{O}_L^\times$ かつ $a_{i,1},\, b_{i,2} \in \mathfrak{M}_L^r$ $(i \geq 1)$.

Definition 3.6. $P \in \mathfrak{X}_{k_L}^{\mathrm{node}}(k_L)^G$ に対し, 同型 $\hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{X},P} \simeq \mathcal{O}_L[[S,T]]/(ST-\pi^r)$ を固定する. $\gamma' \in G$ に対し,

$$\gamma' \begin{pmatrix} S \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{\infty} \begin{pmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} \\ b_{i,1} & b_{i,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S^i \\ T^i \end{pmatrix}$$

と書く. この $a_0,\, b_0,\, a_{i,j},\, b_{i,j} \in \mathcal{O}_L$ $(i \geq 1,\, j = 1,\, 2)$ が, Lemma 3.5 の (i) を満たすとき γ' はこの (上で固定した) 同型に関して P 上で (I) 型であるといい, (ii) を満たすとき (II) 型であるという.

Remark 3.7. Definition 3.6 の $P \in \mathfrak{X}_{k_L}^{\mathrm{node}}(k_L)^G$ と同型 $\hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{X},P} \simeq \mathcal{O}_L[[S,T]]/(ST-\pi^r)$ に関する $\gamma' \in G$ の型は, 同型の取り方に依らない (詳細については [5, Remark 3.3.6] を参照されたい).

以上の議論では, X が log smooth reduction を持つことを仮定していない. ここで, 改めて X が log smooth reduction を持つことを仮定し, L/K を馴分岐 Galois 拡大であるようにとる. K の L における最大不分岐拡大体を K^{ur}, K^{ur} の整数環を $\mathcal{O}_{K^{\mathrm{ur}}}$ とし, $[L : K^{\mathrm{ur}}] = e$, $[K^{\mathrm{ur}} : K] = f$ とおく (e と p は互いに素である). このとき, K^{ur} は 1 の原始 e 乗根を含む. また, $\mathcal{O}_L$ の uniformizer π として, $L = K^{\mathrm{ur}}(\pi)$ かつ $\pi_{K^{\mathrm{ur}}} := \pi^e$ が $\mathcal{O}_{K^{\mathrm{ur}}}$ の uniformizer となるものを取れる. さらに, $I = \mathrm{Gal}(L/K^{\mathrm{ur}})$ は有限巡回群であり, その生成元を σ とする. 自然な全射 $G \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ur}}/K) \simeq \mathrm{Gal}(k_L/k)$ において, ある $\tau \in G$ が存在して, τ により生成される G の部分群 $\langle\tau\rangle$ の像が $\mathrm{Gal}(k_L/k)$ 全体となる. τ の位数は f の倍数で, $e_0 f$ とおく (e_0 は e の約数で, 特に p と互いに素である).

各 $P \in \mathfrak{X}_{k_L}(k_L)^G$ に対し, $\rho^{-1}(P)$ の G 不変部分の i 不変量を計算することを目指す. 計算を容易にするために, $\hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{X},P}$ への G の作用が単純な形になるように同型 $\hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{X},P} \simeq \mathcal{O}_L[[T]]$(または $\mathcal{O}_L[[S,T]]/(ST-\pi^r)$) を取る. 以下にその概要を示すが, 証明の詳細については [5] を参照されたい.

まずは $P \in \mathfrak{X}_{k_L}^{\mathrm{sm}}(k_L)^G$ について考える:

Theorem 3.8 (cf. [5, Theorem 3.4.2]). $P \in \mathfrak{X}_{k_L}^{\mathrm{sm}}(k_L)^G$ に対し, ある $T \in \hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{X},P}$ が存在して, $\hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{X},P} \simeq \mathcal{O}_L[[T]]$ かつ

$$\begin{cases} \sigma^{-1}(T) = \omega T, \\ \tau^{-1}(T) = \dfrac{1}{u} T \end{cases}$$

となる. ここで, $\omega \in \mathcal{O}_L^\times$ は 1 の (原始的とは限らない) e 乗根であり, $u \in \mathcal{O}_L^\times$ である.

Sketch of Proof. $P \in \mathfrak{X}_{k_L}^{\mathrm{sm}}(k_L)^G$ と同型 $\hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{X},P} \simeq \mathcal{O}_L[[T]]$ を任意に取って固定する. T の冪級数 T' であって, 定数項が $\mathfrak{M}_L$ の元で, T の (1 次の) 係数が $\mathcal{O}_L^\times$ の元であるような $T' \in \mathcal{O}_L[[T]]$ を取れば, $\mathcal{O}_L$ 上の準同型 $\mathcal{O}_L[[T]] \to \mathcal{O}_L[[T]]$, $T \mapsto T'$ は $\mathcal{O}_L[[T]]$ の自己同型を定める. $\hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{X},P} \simeq \mathcal{O}_L[[T']]$ と思い直すことで, G の元の T への作用が簡単になるように T を取りかえることを考える.

Step 1: $a_i \in \mathcal{O}_L$ を用いて $\sigma^{-1}(T) = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} a_i T^i$ と書くと, Lemma 3.3 より $a_0 \in \mathfrak{M}_L$, $a_1 \in \mathcal{O}_L^\times$ である. ここで, 一般の $\gamma \in G$ と $\nu \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して, ($\gamma^{-\nu}(T)$ の T の係数) $\equiv \displaystyle\prod_{j=1}^{\nu} \gamma^{-(j-1)}(a_1)$

mod $\mathfrak{M}_L$ が成り立つ (cf. [5, Lemma 3.4.1]) ので, $\sigma^{-e}(T) = T$ に注意すると, $\displaystyle\prod_{j=1}^{e} \sigma^{-(j-1)}(a_1) \equiv 1 \mod \mathfrak{M}_L$ を得る．σ は惰性群の元であるから, $a_1^e \equiv 1 \mod \mathfrak{M}_L$ となる．したがって, 原始的とは限らない 1 の e 乗根 $\omega \in K^{\mathrm{ur}}$ が存在して $a_1 \equiv \omega \mod \mathfrak{M}_L$ となる．ここで, $T' = \displaystyle\sum_{j=1}^{e} \omega^{e-j}\sigma^{-(j-1)}(T)$ と定めると, $T \mapsto T'$ は $\mathcal{O}_L[[T]]$ の自己同型を定め, $\sigma(T') = \omega T'$ となる．

Step 2: Step 1 により, $\sigma^{-1}(T) = \omega T$ であるとしてよい．$I = \langle\sigma\rangle$ は G の正規部分群であるから, e と互いに素な整数 $m \in \{0, 1, \cdots, e-1\}$ が存在して $\sigma^{-1}\tau^{-1} = \tau^{-1}\sigma^{-m}$ となる．また, $\tau^{-f} \in \mathrm{Ker}(G \to \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ur}}/K)) = \langle\sigma\rangle$ であるから, ある整数 $n \in \{0, 1, \cdots, e-1\}$ が存在して $\tau^{-f} = \sigma^{-n}$ となる．

今, $\mathcal{O}_L$ の uniformizer π を, $\mathcal{O}_{K^{\mathrm{ur}}}$ のある uniformizer $\pi_{K^{\mathrm{ur}}}$ の e 乗根の 1 つであるように取っているので, 1 の原始 e 乗根 $\zeta \in K^{\mathrm{ur}}$ が存在して $\sigma^{-1}(\pi) = \zeta\pi$ となる．また, ω^{-1} も 1 の e 乗根であるから, ある $\mu \in \{0, 1, \cdots, e-1\}$ が存在して $\zeta^{\mu} = \omega^{-1}$ となり, $c = \pi^{\mu}$ とすると $\sigma^{-1}(c) = \omega^{-1}c$ となる．$\tau^{-1}(c) = uc$ ($u \in \mathcal{O}_L^{\times}$) とおく．

このとき, $d \in \mathcal{O}_{K^{\mathrm{ur}}}^{\times}$ をうまくとって, $T' = \displaystyle\sum_{j=0}^{e_0 f-1} \frac{\tau^{-j}(c)}{c}\tau^{-j}(dT)$ に対し, $T \mapsto T'$ が $\mathcal{O}_L[[T]]$ の自己同型を定めるようにできる．さらに, この T' に対し, $\sigma^{-1}(T') = \omega T'$, $\tau^{-1}(T') = \dfrac{1}{u}T'$ である． □

これを用いて $P \in \mathfrak{X}_{k_L}^{\mathrm{sm}}(k_L)^G$ に対して $\rho^{-1}(P)^G = \rho'^{-1}(P)$ の i 不変量が計算できる:

Corollary 3.9 (cf. [5, Corollary 3.4.3])**.** $\rho' : \mathfrak{X}(\mathcal{O}_L)^G \to \mathfrak{X}_{k_L}(k_L)^G$ に対し, $\mathfrak{X}_{k_L}^{\mathrm{sm}}(k_L)^G \subset \rho'(\mathfrak{X}(\mathcal{O}_L)^G)$ である．さらに, 各 $P \in \mathfrak{X}_{k_L}^{\mathrm{sm}}(k_L)^G$ に対して $\rho'^{-1}(P)$ は K 上の 1 次元の球に同型である．特に, $i_K(\rho'^{-1}(P)) \equiv 1 \mod (q-1)$ である．

Sketch of Proof. $P \in \mathfrak{X}_{k_L}^{\mathrm{sm}}(k_L)^G$ を任意にとる．Theorem 3.8 より, 同型 $\hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{X},P} \simeq \mathcal{O}_L[[T]]$ を, $\sigma^{-1}(T) = \omega T$, $\tau^{-1}(T) = \dfrac{1}{u}T$ となるように取れる．$\rho^{-1}(P) \simeq \mathfrak{M}_L$ の G 不変な元として, $x_0 = \dfrac{\pi_K}{c}$ (ただし, c は Theorem 3.8 の証明の Step 2 でとったもの, π_K は K の uniformizer) が取れ, $\rho'^{-1}(P) = \rho^{-1}(P)^G \simeq \mathcal{O}_K x_0$ であることが示される． □

次の定理は $P \in \mathfrak{X}_{k_L}^{\mathrm{node}}(k_L)^G$ に対する Theorem 3.8 の類似である:

Theorem 3.10 (cf. [5, Theorem 3.5.2])**.** $P \in \mathfrak{X}_{k_L}^{\mathrm{node}}(k_L)^G$ を任意に取って固定する．この P に関して,

(i) σ^{-1}, τ^{-1} がともに (I) 型のとき, ある $S, T \in \hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{X},P}$ と $u_1, u_2 \in \mathcal{O}_L^{\times}$ が存在して, $\hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{X},P} \simeq \mathcal{O}_L[[S, T]]/(ST - \pi^r)$ かつ

$$\begin{cases} \sigma^{-1}(S) = u_1 S, \\ \sigma^{-1}(T) = \dfrac{\sigma^{-1}(\pi^r)}{\pi^r}u_1^{-1}T, \end{cases} \qquad \begin{cases} \tau^{-1}(S) = u_2 S, \\ \tau^{-1}(T) = \dfrac{\tau^{-1}(\pi^r)}{\pi^r}u_2^{-1}T. \end{cases}$$

(ii) σ^{-1} が (I) 型, τ^{-1} が (II) 型のとき, p が奇素数であれば, ある $S, T \in \hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{X},P}$ と $u_3, u_4 \in \mathcal{O}_L^\times$ が存在して, $\hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{X},P} \simeq \mathcal{O}_L[[S, T]]/(ST - \pi^r)$ かつ

$$\begin{cases} \sigma^{-1}(S) = u_3 S, \\ \sigma^{-1}(T) = \dfrac{\sigma^{-1}(\pi^r)}{\pi^r} u_3^{-1} T, \end{cases} \qquad \begin{cases} \tau^{-1}(S) = u_4 T, \\ \tau^{-1}(T) = \dfrac{\tau^{-1}(\pi^r)}{\pi^r} u_4^{-1} S. \end{cases}$$

(iii) σ^{-1} が (II) 型のとき, ある $S, T \in \hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{X},P}$ と $u_5, u_6 \in \mathcal{O}_L^\times$ が存在して, $\hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{X},P} \simeq \mathcal{O}_L[[S, T]]/(ST - \pi^r)$ かつ

$$\begin{cases} \sigma^{-1}(S) = u_5 T, \\ \sigma^{-1}(T) = \dfrac{\sigma^{-1}(\pi^r)}{\pi^r} u_5^{-1} S, \end{cases} \qquad \begin{cases} \tau'^{-1}(S) = u_6 S, \\ \tau'^{-1}(T) = \dfrac{\tau'^{-1}(\pi^r)}{\pi^r} u_6^{-1} T. \end{cases}$$

ここで, τ^{-1} が (I) 型のときは $\tau' = \tau$, τ^{-1} が (II) 型のときは $\tau' = \tau\sigma$ とする.

これにより, $P \in \mathfrak{X}_{k_L}^{\mathrm{node}}(k_L)^G$ に対しても $\rho^{-1}(P)^G = \rho'^{-1}(P)$ の i 不変量がある程度計算できる:

Corollary 3.11 (cf. [5, Corollary 3.5.4])**.** p が奇素数であれば, 任意の $P \in \mathfrak{X}_{k_L}^{\mathrm{node}}(k_L)^G$ に対し, $i_K(\rho'^{-1}(P)) \equiv 0$ または $2 \mod (q-1)$ である. 特にこのとき, $2 \mid (q-1)$ であり, $i_K(\rho'^{-1}(P)) \equiv 0 \mod 2$ である.

Corollary 3.9 と Corollary 3.11 から, 次がただちに従う:

Corollary 3.12. p が奇素数のとき,

$$i_K(X(K)) \equiv \sharp \mathfrak{X}_{k_L}^{\mathrm{sm}}(k_L)^G \mod 2.$$

4 遠アーベル幾何的帰結

この節では, 数論的基本群に関する準備を行った後, Theorem 1.4 の遠アーベル幾何的帰結を述べ, さらに Theorem 1.5 を示す.

p を素数, K を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体, $\overline{K}$ をその代数閉包, G_K を K の絶対 Galois 群とする. U を K 上の滑らかで幾何的に連結な双曲的曲線, X をその滑らかなコンパクト化とする. $S = X \setminus U$ と定め, $n := \sharp S(\overline{K})$, g を X の種数とすると, $2g + n - 2 > 0$ である. また, K_U を U の関数体, $\overline{K_U}$ をその代数閉包とする.

$U_{\overline{K}} := U \times_{\operatorname{Spec} K} \operatorname{Spec} \overline{K}$ の幾何的点 $\overline{\xi}$ を任意に取り, その U における像も $\overline{\xi}$ とする. このとき, 以下のような副有限群の自然な完全列がある:

$$1 \to \pi_1(U_{\overline{K}}, \overline{\xi}) \to \pi_1(U, \overline{\xi}) \to G_K \to 1. \tag{4.1}$$

$\pi_1(U, \overline{\xi})$ を U の数論的基本群, $\pi_1(U_{\overline{K}}, \overline{\xi})$ を U の幾何的基本群と呼ぶ. これらの位相群としての同型類は幾何的点 $\overline{\xi}$ の取り方に依らないので, 以下では基点を任意に 1 つ取って固定し, それを明示せずに $\pi_1(U)$, $\pi_1(U_{\overline{K}})$ のように書くこともある.

K_U の代数拡大で U 上不分岐なもののうち, 最大のものを $\widetilde{K_U}$ とする. (4.1) (において幾何的点として $\operatorname{Spec} \overline{K_U} \to U$ をとったもの) は以下の完全列と自然に同一視できる:

$$1 \to \operatorname{Gal}(\widetilde{K_U}/K_U \cdot \overline{K}) \to \operatorname{Gal}(\widetilde{K_U}/K_U) \to \operatorname{Gal}(K_U \cdot \overline{K}/K_U)\,(\simeq G_K) \to 1.$$

$\widetilde{K_U}$ における U, X の整閉包をそれぞれ $\widetilde{U}$, $\widetilde{X}$ とする. さらに, $\widetilde{X}$ の閉点の集合を $\widetilde{X}^{\mathrm{cl}}$ とおく.

Definition 4.1 (cf. [11, §2])**.** $\widetilde{x} \in \widetilde{X}^{\mathrm{cl}}$ に対し, $\widetilde{x}$ の分解群 $D_{\widetilde{x}}$ を $D_{\widetilde{x}} = \{\gamma \in \pi_1(U) \mid \gamma(\widetilde{x}) = \widetilde{x}\}$ で定める.

以下では, 開部分群 $\mathcal{H} \subset \pi_1(U)$ に対し, $\mathcal{H}$ に対応する U の被覆を $U_{\mathcal{H}}$, K の $U_{\mathcal{H}}$ における整閉包を $K_{\mathcal{H}}$ と書く. このとき, $U_{\mathcal{H}}$ は $K_{\mathcal{H}}$ 上の滑らかで幾何的に連結な双曲的曲線である. さらに, $K_{\mathcal{H}}$ の剰余体を $k_{\mathcal{H}}$ とし, $q_{\mathcal{H}} := \sharp k_{\mathcal{H}}$ とする. $U_{\mathcal{H}}$ の滑らかなコンパクト化を $X_{\mathcal{H}}$ と書き, $S_{\mathcal{H}} = X_{\mathcal{H}} \setminus U_{\mathcal{H}}$ と定め, $n_{\mathcal{H}} := \sharp S_{\mathcal{H}}(\overline{K})$, $g_{\mathcal{H}}$ を $X_{\mathcal{H}}$ の種数とする.

Definition 4.2 (cf. [11, Definition 2.3])**.** $G \subset G_K$ を開部分群, $\iota : G \to G_K$ を自然な包含写像, $\mathrm{pr} : \pi_1(U) \twoheadrightarrow G_K$ を自然な全射とする. また, $\mathcal{H} \subset \pi_1(U)$ を開部分群とする.

(i)

$$\mathcal{S}(G) := \{s \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(G, \pi_1(U)) \mid \mathrm{pr} \circ s = \iota\},$$
$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}}(G) := \{s \in \mathcal{S}(G) \mid s(G) \subset \mathcal{H}\}.$$

これらの元を section と呼ぶ.

(ii) $s \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}(G)$ が幾何的であるとは, ある $\widetilde{x} \in \widetilde{X}^{\mathrm{cl}}$ が存在して, $s(G) \subset D_{\widetilde{x}}$ となることをいう. $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}(G)$ の section のうち, 幾何的であるものの集合を $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}(G)^{\mathrm{geom}}$ と書き, $\mathcal{S}_{\pi_1(U)}(G)^{\mathrm{geom}}$ を単に $\mathcal{S}(G)^{\mathrm{geom}}$ と書く.

以下では, $i = 1, 2$ に対し, p_i を素数, K_i を $\mathbb{Q}_{p_i}$ の有限次拡大体, $\overline{K_i}$ をその代数閉包とする. さらに, $\mathcal{O}_{K_i}$ を K_i の整数環, k_i を K_i の剰余体とし, $q_i := \sharp k_i$ とする. U_i を K_i 上の滑らかで幾何的に連結な双曲的曲線, X_i をその滑らかなコンパクト化とする. $S_i = X_i \setminus U_i$ と定め, $n_i := \sharp S_i(\overline{K_i})$, g_i を X_i の種数とする.

さらに, 以下では副有限群の同型 $\alpha : \pi_1(U_1) \xrightarrow{\sim} \pi_1(U_2)$ が与えられているとする. このとき, [3, Lemma 1.3.9] より $g_1 = g_2$ であり, [3, Lemma 1.3.8] より, 副有限群の同型 $\alpha_K : G_{K_1} \xrightarrow{\sim} G_{K_2}$ が存在して, 次は可換である:

$$\begin{tikzcd} \pi_1(U_1) \arrow[r, "\sim", "\alpha"'] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & \pi_1(U_2) \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"] \\ G_{K_1} \arrow[r, "\sim", "\alpha_K"'] & G_{K_2} \end{tikzcd} \tag{4.2}$$

Proposition 4.3 (cf. [3, Proposition 1.2.1])**.** 副有限群の同型 $\alpha_K : G_{K_1} \xrightarrow{\sim} G_{K_2}$ が与えられているとき, 以下が成り立つ:

(i) $p_1 = p_2$ である. 以下では $p = p_1 = p_2$ と書く.

(ii) α_K は G_{K_1}, G_{K_2} の惰性群の間の同型 $I_{K_1} \xrightarrow{\sim} I_{K_2}$ を誘導する.

(iii) $[K_1 : \mathbb{Q}_p] = [K_2 : \mathbb{Q}_p]$, $[k_1 : \mathbb{F}_p] = [k_2 : \mathbb{F}_p]$ である. 特に, K_1, K_2 の $\mathbb{Q}_p$ 上の分岐指数は一致する.

この命題により, $p_1 = p_2$, $q_1 = q_2$ であり, 以下ではこれらをそれぞれ単に p, q とも書く.

次の定理により, 絶対版 Grothendieck 予想は, 分解群の群論的復元の問題に帰着される:

Theorem 4.4 (cf. [4, Corollary 2.9])**.** 副有限群の同型 $\alpha : \pi_1(U_1) \xrightarrow{\sim} \pi_1(U_2)$ について, $\pi_1(U_1)$ の閉部分群が $\widetilde{X_1}^{\mathrm{cl}}$ の点の分解群であることと, その α による像が $\widetilde{X_2}^{\mathrm{cl}}$ の点の分解群であることが同値になっているとする. このとき, α は幾何的である. つまり, 一意的なスキームの同型 $U_1 \xrightarrow{\sim} U_2$ から (より正確には $\widetilde{U_1} \xrightarrow{\sim} \widetilde{U_2}$ から) 引き起こされる.

さらに, 次の定理により分解群の群論的復元の問題は, 有理点の有無の群論的判定の問題に帰着される:

Theorem 4.5 (cf. [11, Corollary 2.10])**.** $\widetilde{x_i} \in \widetilde{X_i}^{\mathrm{cl}}$ から, その分解群への対応 $\widetilde{x_i} \mapsto D_{\widetilde{x_i}}$ は単射である. また, 各開部分群 $G_i \subset G_{K_i}$ に対し, $\mathcal{S}(G_i)^{\mathrm{geom}} \subset \mathcal{S}(G_i)$ は次のように特徴づけられる:

$$s_i \in \mathcal{S}(G_i)^{\mathrm{geom}} \Longleftrightarrow s_i(G_i) \text{ を含む} \pi_1(U_i) \text{ の任意の開部分群 } \mathcal{H}_i \text{に対して}, (X_i)_{\mathcal{H}_i}(L_i) \neq \emptyset.$$

ここで, $L_i = \overline{K_i}^{G_i}$ である.

さらに, 可換図式 (4.2) が次を満たしているとする:

任意の開部分群 $G_1 \subset G_{K_1}$ と任意の $s_1 \in \mathcal{S}(G_1)$ に対して,

$$s_1 \in \mathcal{S}(G_1)^{\mathrm{geom}} \Longleftrightarrow \alpha \circ s_1 \circ \alpha_K^{-1} \in \mathcal{S}(\alpha_K(G_1))^{\mathrm{geom}}.$$

このとき, $\pi_1(U_1)$ の閉部分群が $\widetilde{X_1}^{\mathrm{cl}}$ の点の分解群であることと, その α による像が $\widetilde{X_2}^{\mathrm{cl}}$ の点の分解群であることは同値である.

曲線及びその被覆の有理点集合の i 不変量から分解群 (したがって曲線の同型類) が復元できること (Theorem 4.8, Corollary 4.9) を示すために, 補題を 2 つ用意する:

Lemma 4.6 (cf. [11, Theorem 2.8, Remark 2.11])**.** $G'_i \subset G_i \subset G_{K_i}$ を開部分群とする. このとき, $s_i \in \mathcal{S}(G_i)$ に対し,

$$s_i|_{G'_i} \in \mathcal{S}(G'_i)^{\mathrm{geom}} \Longleftrightarrow s_i \in \mathcal{S}(G_i)^{\mathrm{geom}}.$$

Lemma 4.7 (cf. [5, Lemma 4.2.7])**.** ある開部分群 $\mathcal{H}_i \subset \pi_1(U_i)$ が存在して, $g_{\mathcal{H}_i} \geq 2$ となる.

以上で Theorem 1.4 の遠アーベル幾何的帰結であるところの次の定理 (及びその系) を示す準備ができた:

Theorem 4.8. ある開部分群 $\mathcal{H}_0 \subset \pi_1(U_1)$ と $q_{\mathcal{H}_0} - 1$ の 1 でない正の約数 m が存在して, $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}_0$ なる $\pi_1(U_1)$ の任意の開部分群 $\mathcal{H}$ に対し,

$$i_{(K_1)_{\mathcal{H}}}((X_1)_{\mathcal{H}}((K_1)_{\mathcal{H}})) \equiv i_{(K_2)_{\alpha(\mathcal{H})}}((X_2)_{\alpha(\mathcal{H})}((K_2)_{\alpha(\mathcal{H})})) \mod m$$

が成り立つとする. このとき, 任意の開部分群 $G_1 \subset G_{K_1}$ と任意の $s_1 \in \mathcal{S}(G_1)$ に対して,

$$s_1 \in \mathcal{S}(G_1)^{\mathrm{geom}} \Longleftrightarrow \alpha \circ s_1 \circ \alpha_K^{-1} \in \mathcal{S}(\alpha_K(G_1))^{\mathrm{geom}}.$$

Proof. 開部分群 $G_1 \subset G_{K_1}$ と $s_1 \in \mathcal{S}(G_1)$ を任意に取る.

Lemma 4.7 より, $\pi_1(U_1)$ の開部分群 $\mathcal{H}'_0 \subset \mathcal{H}_0$ で, $g_{\mathcal{H}'_0} \geq 2$ なるものが存在する (このとき, [3, Lemma 1.3.9] より, $g_{\alpha(\mathcal{H}'_0)} = g_{\mathcal{H}'_0} \geq 2$ である). $G'_1 := \mathrm{pr}_1(s_1(G_1) \cap \mathcal{H}'_0)$ は G_{K_1} の開部分

群で, $s_1(G_1') \subset \mathcal{H}_0'$ である．$L_1 := \overline{K_1}^{G_1'}$, $L_2 := \overline{K_2}^{\alpha_K(G_1')}$ とする．仮定より, $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}_0'$ なる $\pi_1(U_1)$ の任意の開部分群 $\mathcal{H}$ に対し,

$$i_{(K_1)_{\mathcal{H}}}((X_1)_{\mathcal{H}}((K_1)_{\mathcal{H}})) \equiv i_{(K_2)_{\alpha(\mathcal{H})}}((X_2)_{\alpha(\mathcal{H})}((K_2)_{\alpha(\mathcal{H})})) \mod m$$

であるから, Theorem 1.4 より, $s_1(G_1') \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{H}_0'$ なる $\pi_1(U_1)$ の任意の開部分群 $\mathcal{H}$ に対し,

$$(X_1)_{\mathcal{H}}(L_1) \neq \emptyset \Longleftrightarrow (X_2)_{\alpha(\mathcal{H})}(L_2) \neq \emptyset.$$

よって, $s_2 := \alpha \circ s_1 \circ \alpha_K^{-1} \in \mathcal{S}(\alpha_K(G_1))$ とすると, Theorem 4.5 より,

$$s_1|_{G_1'} \in \mathcal{S}(G_1')^{\mathrm{geom}} \Longleftrightarrow s_2|_{\alpha_K(G_1')} \in \mathcal{S}(\alpha_K(G_1'))^{\mathrm{geom}}.$$

したがって, Lemma 4.6 より,

$$s_1 \in \mathcal{S}(G_1)^{\mathrm{geom}} \Longleftrightarrow s_2 \in \mathcal{S}(\alpha_K(G_1))^{\mathrm{geom}}.$$

□

Corollary 4.9. ある開部分群 $\mathcal{H}_0 \subset \pi_1(U_1)$ と $q_{\mathcal{H}_0} - 1$ の 1 でない約数 m が存在して, $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}_0$ なる $\pi_1(U_1)$ の任意の開部分群 $\mathcal{H}$ に対し,

$$i_{(K_1)_{\mathcal{H}}}((X_1)_{\mathcal{H}}((K_1)_{\mathcal{H}})) \equiv i_{(K_2)_{\alpha(\mathcal{H})}}((X_2)_{\alpha(\mathcal{H})}((K_2)_{\alpha(\mathcal{H})})) \mod m$$

が成り立つとする．このとき, α は一意的なスキームの同型 $U_1 \xrightarrow{\sim} U_2$ から (より正確には $\widetilde{U_1} \xrightarrow{\sim} \widetilde{U_2}$ から) 引き起こされる．

Proof. Theorem 4.4, 4.5, 4.8 より自明である． □

次に, 3 節の議論を用いて, Theorem 1.5 を示す．次の定理により, stable model の special fiber は群論的である:

Theorem 4.10 (cf. [3, Theorem 2.7])**.** $g_i \geq 2$ なる X_i が, $\mathcal{O}_{K_i}$ 上の stable model $\mathfrak{X}_i$ を持つとする．$(\mathfrak{X}_i)_{k_i} := \mathfrak{X}_i \times_{\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{K_i}} \operatorname{Spec} k_i$ と定める．このとき, 副有限群の同型 $\pi_1(X_1) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X_2)$ は次の副有限群の可換図式 (4.3) とスキームの可換図式 (4.4) を誘導する:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X_1) & \xrightarrow{\sim} & \pi_1(X_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ G_{K_1} & \xrightarrow{\sim} & G_{K_2} \end{array} \tag{4.3}$$

$$\begin{array}{ccc} (\mathfrak{X}_1)_{k_1} & \xrightarrow{\sim} & (\mathfrak{X}_2)_{k_2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Spec} k_1 & \xrightarrow{\sim} & \operatorname{Spec} k_2 \end{array} \tag{4.4}$$

この対応は次の意味で関手的である:

$i = 3$ に対しても X_i, K_i などを同様に定め, X_3 も $\mathcal{O}_{K_3}$ 上の stable model $\mathfrak{X}_3$ を持つとする．また, $1 \leq i < j \leq 3$ に対し, 副有限群の同型 $\alpha_{ij} : \pi_1(X_i) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X_j)$ があるとする．これらは上のようにスキームの同型 $f_{ij} : (\mathfrak{X}_i)_{k_i} \xrightarrow{\sim} (\mathfrak{X}_j)_{k_j}$ を誘導する．このとき, $\alpha_{13} = \alpha_{23} \circ \alpha_{12}$ ならば $f_{13} = f_{23} \circ f_{12}$ である．

これと Corollary 3.12 を用いて Theorem 1.5 を示す:

Proof of Theorem 1.5. [3, Lemma 1.3.9] より, 同型 $\alpha : \pi_1(U_1) \xrightarrow{\sim} \pi_1(U_2)$ から次の可換図式が得られることに注意する:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(U_1) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \pi_1(U_2) \arrow[d] \\
\pi_1(X_1) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \pi_1(X_2) \arrow[d] \\
G_{K_1} \arrow[r, "\sim"] & G_{K_2}
\end{tikzcd}$$

仮定より, 有限次馴分岐拡大 L_1/K_1 が存在して, $(X_1)_{L_1} := X_1 \times_{\operatorname{Spec} K_1} \operatorname{Spec} L_1$ は L_1 の整数環 $\mathcal{O}_{L_1}$ 上の stable model $\mathfrak{X}_1$ を持つ. このとき, $L_2 := \overline{K_2}^{\alpha_K(G_{L_1})}$ は K_2 の有限次馴分岐拡大体で, $(X_2)_{L_2} := X_2 \times_{\operatorname{Spec} K_2} \operatorname{Spec} L_2$ は L_2 の整数環 $\mathcal{O}_{L_2}$ 上の stable model $\mathfrak{X}_2$ を持つ (cf. [5, Remark 4.3.4]). L_1, L_2 の剰余体をそれぞれ k_{L_1}, k_{L_2} とする.

Theorem 4.10 より, 副有限群の同型 $\pi_1(X_1) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X_2)$ は次の可換図式を誘導する:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1((X_1)_{L_1}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \pi_1((X_2)_{L_2}) \arrow[d] \\
\pi_1(X_1) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \pi_1(X_2) \arrow[d] \\
G_{K_1} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & G_{K_2} \arrow[d] \\
\mathrm{Gal}(L_1/K_1) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Gal}(L_2/K_2)
\end{tikzcd}$$

さらに再び Theorem 4.10 より, 誘導される fiber の同型と, そこへの Galois 群の作用が次のように可換図式をなす:

$$\begin{tikzcd}
(\mathfrak{X}_1)_{k_{L_1}} \arrow[r, "\sim"] & (\mathfrak{X}_2)_{k_{L_2}} \\
\mathrm{Gal}\,(L_1/K_1) \arrow[u, phantom, "\circlearrowright"] \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Gal}(L_2/K_2) \arrow[u, phantom, "\circlearrowright"]
\end{tikzcd}$$

よって, Corollary 3.12 より主張が従う. □

参考文献

[1] Q. Liu, Algebraic geometry and arithmetic curves, Oxford Graduate Texts in Mathematics, 6, Oxford Science Publications, Oxford University Press, Oxford, 2002.

[2] S. Mochizuki, The local pro-p anabelian geometry of curves, Invent. Math. **138** (1999), no. 2, 319–423.

[3] S. Mochizuki, The absolute anabelian geometry of hyperbolic curves, In: Galois theory and modular forms, 77–122, Dev. Math., 11, Kluwer Acad. Publ., Boston, MA, 2004.

[4] S. Mochizuki, Topics in absolute anabelian geometry II: Decomposition groups and endomorphisms, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **20** (2013), no. 2, 171–269.

[5] T. Murotani, A p-adic analytic approach to the absolute Grothendieck conjecture, RIMS preprint, 1892, Research Institute for Mathematical Sciences, 2018.

[6] H. Nakamura, Rigidity of the arithmetic fundamental group of a punctured projective line, J. Reine Angew. Math. **405** (1990), 117–130.

[7] H. Nakamura, Galois rigidity of the étale fundamental groups of punctured projective lines, J. Reine Angew. Math. **411** (1990), 205–216.

[8] J. Neukirch, A. Schmidt and K. Wingberg, Cohomology of number fields, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 323, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[9] T. Saito, Log smooth extension of a family of curves and semi-stable reduction, J. Algebraic Geom. **13** (2004), no. 2, 287–321.

[10] J.-P. Serre, Lie algebras and Lie groups, 1964 lectures given at Harvard University, second edition, Lecture Notes in Mathematics, 1500, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[11] A. Tamagawa, The Grothendieck conjecture for affine curves, Compositio Math. **109** (1997), no. 2, 135–194.