代数トーラスのポリログの de Rham 実現

坂内 健一 (慶應義塾大学／理化学研究所)　萩原 啓 (理化学研究所／慶應義塾大学)
山田 一紀 (慶應義塾大学)　山本 修司 (慶應義塾大学／理化学研究所)

概 要

本稿では, ある種の微分形式を用いて, 総実代数体に付随するある種の代数トーラスの de Rham ポリログを新しく定義する. 乗法群の場合, de Rham ポリログを与える代数関数は Dirichlet L 関数の負の整数点での値の母関数を与える. 代数トーラスの場合にも, 総実代数体の Hecke L 関数の特殊値に対して, 新谷 [Shi76] の理論より同様の母関数が与えられる.

はじめに

アフィンスキーム $U := \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\} = \mathbb{G}_m \setminus \{1\} = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[t, t^{-1}, (t-1)^{-1}]$ 上の有理関数

$$\mathcal{G}(t) := \frac{t}{1-t}$$

を考える. 整数 $k \geq 1$ に対して古典的なポリログ関数 $\mathrm{Li}_k(t)$ は, 反復積分

$$\mathrm{Li}_1(t) := \int_0^\infty \mathcal{G}(s)\frac{ds}{s}, \qquad \mathrm{Li}_{k+1}(t) := \int_0^\infty \mathrm{Li}_k(s)\frac{ds}{s} \quad (k > 1) \tag{1}$$

で定義される $U(\mathbb{C})$ 上の多価正則関数である. これらポリログ関数は Deligne により, ポリログ層と呼ばれる $\mathbb{G}_m \setminus \{1\}$ 上の混合実 Hodge 構造の変形 (variation of mixed $\mathbb{R}$-Hodge structures) の周期関数として解釈が与えられた. ポリログ層は, Beilinson と Deligne により, $\mathbb{G}_m \setminus \{1\}$ 上のモチビックな混合層の Hodge 実現であることが示され, 対応する「ポリログ」と呼ばれるモチビックコホモロジーの元は, $t = 1$ での留数が 1 という極めて簡単なコホモロジー論的特徴付けを持つことが示された. 以上の事実が, 有理数体の Dirichlet L 関数の Beilinson 予想 [Bei84][Neu88][HW98] や Bloch-Beilinson 加藤予想 [BK90] の証明の背景にある.

乗法群 $\mathbb{G}_m$ に対するポリログの構成は, Beilinson-Levin [BL94], Wildeshaus [Wil97], Kings [Kin09] などにより, 楕円曲線やより一般のアーベル多様体の場合にも拡張された. 最近では Huber-Kings [HK18] により, 一般の代数群の場合にポリログの構成が与えられた. 筆者は, 総実代数体の Hecke 指標の特殊値と関係の深い, ある種の代数トーラス $\mathbb{T}_{\mathfrak{a}}$ に注目し, この代数群に対するポリログを具体的に記述することを目指して研究して来た. 本稿では, ある種の微分形式を用いて, 代数トーラス $\mathbb{T}_{\mathfrak{a}}$ の de Rham ポリログを具体的に定義する.

本稿で扱っている内容は, 2014 年度–2018 年度の慶應義塾基礎科学・基盤工学インスティテュート (KiPAS), および科研費 (課題番号：26247004, 16J01911, 16K13742, 18H05233) の研究の一環として, 坂内健一, 山本修司, 萩原啓, 山田一紀が共同で研究を行なっているものである. 本研究は, 日本学術振興会拠点形成事業「数論と幾何学を核とする数理科学国際連携研究拠点形成」(代表：栗原将人先生) からも, 支援をいただいた. この研究を進めるにあたり, 慶應義塾大学理工学部で開催したプレクティックセミナーにおいて, 小林真一さん, 安田正大

さんに助言をいただいた. また, 慶應義塾大学理工学研究科の平川義之輔さん, 松村英樹さん, 金村佳範さん, 冨田拓希さんには, 研究室の p 進 L 関数セミナーにおいて, 助言をいただいた. 第 12 回福岡数論研究集会において講演の機会を下さった世話人の金子昌信先生, 権寧魯さん, 岸康弘さん, 高妻倫太郎さんに, 深く感謝する.

1 乗法群の de Rham ポリログと Lerch ゼータ関数

乗法群 $\mathbb{G}_m$ のポリログ関数のコホモロジー論的特徴付けで最初の鍵となるのが, ポリログ関数の反復積分の最初に現れる $\mathcal{G}(t) = t/(1-t)$ という有理関数である. この関数を用いて定義される

$$\eta := -\mathcal{G}(t)\frac{dt}{t} = \frac{dt}{t-1}$$

という代数的微分形式は, U の de Rham コホモロジーの類を定義する. すなわち, U は $\mathbb{Q}$ 上滑らかなアフィンスキームであることから, $\Omega^\bullet_U$ を U 上の代数的微分形式からなる de Rham 複体とすると, U の de Rham コホモロジー $H^m_{\mathrm{dR}}(U)$ は, $H^m_{\mathrm{dR}}(U) = H^m(\Gamma(U, \Omega^\bullet_U))$ と表される. この表示を通して, η は $H^1_{\mathrm{dR}}(U)$ の類を定める.

定義 1.1. 上記 $\eta \in \Gamma(U, \Omega^1_U)$ が定める $H^1_{\mathrm{dR}}(U)$ の類

$$\boldsymbol{\eta} := [\eta] \in H^1_{\mathrm{dR}}(U)$$

を, 乗法群 $\mathbb{G}_m$ の de Rham ポリログと呼ぶ.

包含 $U \subset \mathbb{G}_m$ と $Z := \{1\} \hookrightarrow \mathbb{G}_m$ に対応する Gyzin 完全系列は

$$0 \longrightarrow H^1_{\mathrm{dR}}(\mathbb{G}_m) \longrightarrow H^1_{\mathrm{dR}}(U) \xrightarrow{\mathrm{Res}_Z} H^0_{\mathrm{dR}}(Z) \longrightarrow 0 \tag{2}$$

で与えられる. 留数写像 Res_Z の定義より, 下記が直ちに従う.

補題 1.2. 乗法群 $\mathbb{G}_m$ の de Rham ポリログ $\boldsymbol{\eta}$ は, 標準的な同型 $H^0_{\mathrm{dR}}(Z) = \mathbb{Q}$ を通して,

$$\mathrm{Res}_Z(\boldsymbol{\eta}) = 1$$

をみたす.

上記完全系列 (2) は標準的に分裂し, de Rham ポリログ $\boldsymbol{\eta}$ は, $\mathrm{Res}_Z(\boldsymbol{\eta}) = 1$ をみたす類として自然に特徴付けられる.

$\boldsymbol{\eta}$ とポリログ関数 $\mathrm{Li}_k(t)$ の関係は下記の通りである. $\mathbb{G}_m$ 上には対数層と呼ばれる混合実 Hodge 構造の変形 $\mathbb{L}\mathrm{og}$ が定義される. ポリログの Hodge 実現 pol は, Deligne-Beilinson コホモロジー $H^1_{\mathscr{D}}(U, \mathbb{L}\mathrm{og})$ の類

$$\mathrm{pol} \in H^1_{\mathscr{D}}(U, \mathbb{L}\mathrm{og})$$

で, Z での留数が 1 として一意的に特徴付けられる類として定義される. Deligne-Beilinson コホモロジーの留数写像の定義を紐解くと, U の Beilnson-Deligne コホモロジーと通常の特異コホモロジー間のスペクトル系列

$$E_2^{p,q} = H^p_{\mathscr{D}}(\mathrm{Spec}\,\mathbb{R}, H^q(U, \mathbb{L}\mathrm{og})) \Rightarrow H^{p+q}_{\mathscr{D}}(U, \mathbb{L}\mathrm{og}) \tag{3}$$

から導かれる退化写像

$$H^1_{\mathscr{D}}(U, \mathbb{L}\mathrm{og}) \xrightarrow{\cong} H^0_{\mathscr{D}}(\mathrm{Spec}\,\mathbb{R}, H^1(U, \mathbb{L}\mathrm{og})) \xrightarrow{\cong} H^1(U, \mathbb{R}) \hookrightarrow H^1_{\mathrm{dR}}(U) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$$

を通して, $\boldsymbol{\eta} \otimes 1$ は pol の像と一致することが示される. ただしここで, 左から 2 番目の同型は $\mathbb{L}\mathrm{og}$ 係数のコホモロジーの計算から従い, 左から 3 番目の単射は de Rham の定理より与えられる. このとこから, de Rham ポリログは, ポリログの de Rham 実現として解釈できる.

pol が $\boldsymbol{\eta} \otimes 1$ に移るという事実を用いて pol を代表するコサイクルを具体的に記述する過程で, 反復積分 (1) が現れる. 以上が, 整数 $k > 0$ に対するポリログ関数 $\mathrm{Li}_k(t)$ と, 代数的微分形式 η の関係である.

上記ポリログ pol が円分体の整数論と関係する 1 つの大きな理由は, 代数的微分形式 η と, Lerch ゼータ関数の特殊値との関係による. Lerch ゼータ関数は, 次の様に定義される.

定義 1.3. 有理数 $u \in \mathbb{Q}$ と $\mathrm{Re}(s) > 1$ をみたす複素数 s に対して, Lerch ゼータ関数を $\mathcal{L}(u, s)$ を, 絶対収束する級数

$$\mathcal{L}(u, s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i u n}}{n^s}$$

で定義する. この関数は, 全複素平面 $s \in \mathbb{C}$ に有理型関数として解析接続される.

いま複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対して $t = e^{2\pi i z} \in \mathbb{G}_m(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times$ を対応させると, 乗法群 $\mathbb{G}_m$ の複素一意化

$$\mathbb{C}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \mathbb{G}_m(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times \tag{4}$$

が与えられる. この一意化を通して, 代数的微分形式 η を与える有理関数 $\mathcal{G}(t)$ に対応する $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ 上の有理型関数を

$$\mathcal{G}(z) := \mathcal{G}(e^{2\pi i z}) = \frac{e^{2\pi i z}}{1 - e^{2\pi i z}}$$

と記す. 特に z の虚部が正の場合には,

$$\mathcal{G}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{2\pi i n z}$$

が成り立つ. この関数は次の通り, Lerch ゼータ関数の特殊値の母関数となっていることが知られている (例えば, [Kato93, Lemma 1.3.15] 参照).

定理 1.4. $\partial_z := (2\pi i)^{-1} d/dz$ とおくと, 任意の $u \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ と整数 $k \geq 0$ に対して,

$$\partial_z^k \mathcal{G}(u) = \mathcal{L}(u, -k)$$

が成り立つ.

$u \in \mathbb{Z}$ に対しても, $\mathcal{G}^0(z) := \mathcal{G}(z) - z^{-1}$ が同様の式を満たす. 定理 1.4 は, 様々な $u \in \mathbb{Q}$ や整数 $k \geq 0$ に対する Lerch ゼータ関数の特殊値が全て, $\mathcal{G}(z)$ という $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ 上の 1 つの関数で統制されていることを主張している. 乗法群 $\mathbb{G}_m$ は, $\mathbb{Z}$ 上の加法的指標の成す代数群

$$\mathbb{G}_m = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{G}_m) \tag{5}$$

と解釈できる. すなわち, 任意の $\mathbb{Z}$ 代数 R に対して

$$\mathbb{G}_m(R) = R^\times = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, R^\times) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{G}_m(R))$$

が成り立つ．$x \in \mathbb{G}_m(R)$ に対して対応する $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, R^\times)$ の元は, $n \mapsto x^n$ により与えられる加法的指標である．特に複素一意化 (4) を通して, 点 $z = u \in \mathbb{C}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{G}_m(\mathbb{C})$ に対して, 指標 $n \mapsto e^{2\pi iun}$ が対応する．以上の理由から, $\mathcal{G}(z)$ が点 $z = u \in \mathbb{Q}$ で $n \mapsto e^{2\pi iun}$ という指標に対する Lerch ゼータ関数 $\mathcal{L}(u, s)$ の特殊値の母関数となっているという事実は, $\mathbb{G}_m$ の $\mathbb{Z}$ 上の加法的指標の成す代数群としての解釈と, 綺麗に対応している．

母関数　　　　　　　　加法的指標の群

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}(z) = \dfrac{t}{1-t} \arrow[dd, dotted, "u\text{での微分係数}"'] & \mathbb{C}/\mathbb{Z} \arrow[r, "\cong"] & \mathbb{G}_m(\mathbb{C}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^\times) \\
 & u \arrow[phantom, u, "\Cup" description] \arrow[r, mapsto] & n \mapsto e^{2\pi iun} \arrow[phantom, u, "\Cup" description] \arrow[dll, dotted, <->, "\text{指標が対応}"] \\
\mathcal{L}(u, s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi iun}}{n^s} & &
\end{tikzcd}$$

Lerch ゼータ関数

良く知られている通り, Dirichlet L 関数は, Lerch ゼータ関数の線型和で与えられる．$N > 1$ を整数として, $\chi\colon (\mathbb{Z}/N)^\times \to \mathbb{C}^\times$ を Dirichlet 指標とする．この指標を 0 で伸ばすことで, $\mathbb{Z}/N$ や $\mathbb{Z}$ 上の関数とみなすことができる．χ の Dirichlet L 関数は $\mathrm{Re}(s) > 1$ の範囲で

$$L(\chi, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

という無限級数で定義され, 全複素平面に解析接続されることが知られている．

$\mathbb{Z}/N$ 上の関数の Fourier 展開の理論より, 任意の $u \in N^{-1}\mathbb{Z}$ に対して

$$c_\chi(u) := \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{N} \chi(m) e^{-2\pi ium}$$

とおくと, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\chi(n) = \sum_{u \in \frac{1}{N}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}} c_\chi(u) e^{2\pi iun}$$

が成り立つ．このことから, $\mathrm{Re}(s) > 1$ のときに

$$L(\chi, s) = \sum_{u \in \frac{1}{N}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}} c_\chi(u) \mathcal{L}(u, s)$$

となり, この等式は一致の定理より, 全複素平面で成り立つ．特に χ が導手 N の原始的な指標である場合には, $d = (Nu, N) > 1$ となる u に対して, $c_\chi(u) = 0$ となる．定理 1.4 より, 以下の系が導かれる．

系 1.5. $\chi : (\mathbb{Z}/N)^\times \to \mathbb{C}^\times$ を導手 N の原始的な指標とする．この時, 任意の整数 $k \geq 0$ に対して

$$L(\chi, -k) = \sum_{u \in \frac{1}{N}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}} c_\chi(u) \partial_z^k \mathcal{G}(u) \tag{6}$$

が成り立つ．

χ が原始的という仮定より, (6) の和で $u = 0 \in \frac{1}{N}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ に対して $c_\chi(u) = 0$ であることに注意する．χ が原始的とは限らない場合には, $u \in \mathbb{Z}$ に対して $\mathcal{G}(z)$ を $\mathcal{G}^0(z) = \mathcal{G}(z) - z^{-1}$ で置き換えると, (6) と同様の公式が成り立つ.

2　代数トーラスの de Rham ポリログ

F を総実代数体として, $\mathcal{O}_F$ を F の整数環とする．また, $g = [F : \mathbb{Q}]$ と置く．以下, 埋め込み $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ を 1 つ固定する．また, $X := \mathrm{Hom}(F, \overline{\mathbb{Q}})$ とする．$\alpha \in F$ と $\tau \in X$ に対して, α^τ を α の τ による像と定義する．F は総実であることから, 任意の $\tau \in X$ に対して $\alpha^\tau \in \mathbb{R}$ となり, $\alpha \otimes 1$ に $(\alpha^\tau)_\tau \in \mathbb{R}^X := \prod_{\tau \in X} \mathbb{R}$ を対応させると, 標準的な同型

$$F \otimes \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^X$$

が得られる．以下, $\mathbb{R}^X = \prod_{\tau \in X} \mathbb{R}$ や $\mathbb{C}^X = \prod_{\tau \in X} \mathbb{C}$ の元 $\boldsymbol{z}$ の τ 成分を下付き添字 z_τ で記す. 従って, 任意の $\alpha \in F$ に対して $(\alpha \otimes 1)_\tau = \alpha^\tau$ が成り立つ.

以下, $\mathbb{R}^X_+ := \{\boldsymbol{z} = (z_\tau) \in \mathbb{R}^X \mid \forall\tau \in X, z_\tau > 0\}$ とおく．$\alpha \in F$ に対して $\alpha \otimes 1 \in \mathbb{R}^X_+$ となるとき, α は総正であると言い, $\alpha \gg 0$ と記す．$A \subset F$ に対して $A_+ := \{\alpha \in A \mid \alpha \gg 0\}$ を, A の総正な元全体の成す集合とする.

総実代数体 F の場合に $\mathbb{G}_m$ の役割を果たす代数群は, Katz [Katz81, §1] によって定義されたアフィン代数トーラス

$$\mathbb{T}_\mathfrak{a} := \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\mathfrak{a}, \mathbb{G}_m)$$

である．ただし, $\mathfrak{a}$ は F の整イデアルであるとする．Barsky [Bar78] や Cassou-Noguès [CN79] は, 新谷の方法を用いて総実代数体の p 進 Hecke L 関数を構成した．Katz は代数トーラス $\mathbb{T}_\mathfrak{a}$ を用いて, この p 進 Hecke L 関数を構成する p 進測度に解釈を与えた．(5) より, $F = \mathbb{Q}$, $\mathfrak{a} = \mathbb{Z}$ のとき, $\mathbb{T}_\mathfrak{a}$ は乗法群 $\mathbb{G}_m$ と一致する.

定義より, $\mathbb{T}_\mathfrak{a}$ は任意の $\mathbb{Z}$ 代数 R に対して

$$\mathbb{T}_\mathfrak{a}(R) = \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\mathfrak{a}, R^\times)$$

をみたす．$\alpha \in \mathfrak{a}$ に対して, 写像 $\mathbb{T}_\mathfrak{a}(R) \ni x \mapsto x(\alpha) \in R^\times$ が定義する代数群の射 $\mathbb{T}_\mathfrak{a} \to \mathbb{G}_m$ を, $t \mapsto t^\alpha$ の様に表す．このとき, t^α は $\mathbb{T}_\mathfrak{a}$ の関数環の元を与える．Hom の加法性より, 任意の $\alpha, \alpha' \in \mathfrak{a}$ に対して $t^\alpha t^{\alpha'} = t^{\alpha+\alpha'}$ となり,

$$\mathbb{T}_\mathfrak{a} = \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[t^\alpha \mid \alpha \in \mathfrak{a}]$$

となる．特に $\alpha_1, \ldots, \alpha_g$ を $\mathfrak{a}$ の基底とすると,

$$\mathbb{T}_\mathfrak{a} = \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[t^{\pm\alpha_1}, \ldots, t^{\pm\alpha_g}]$$

と表される．従って, $\mathfrak{a}$ の基底を固定すると, 非標準な同型

$$\mathbb{T}_\mathfrak{a} \cong \mathbb{G}_m^g$$

が導かれる．また, 任意の $\beta \in \mathcal{O}_F$ に対して t^α を $t^{\alpha\beta}$ に写すことで, $\mathbb{Z}$ 上のアフィンスキームの射

$$[\beta] \colon \mathbb{T}_\mathfrak{a} \to \mathbb{T}_\mathfrak{a}$$

が誘導される. 特に F の総正単数全体の成す群 $\Delta := (\mathcal{O}_F^\times)_+$ は, $\mathbb{T}_\mathfrak{a}$ に作用する.

代数トーラス $\mathbb{T}_\mathfrak{a}$ の単位元を $\mathbf{1}$ と記し, $U := \mathbb{T}_\mathfrak{a} \setminus \{\mathbf{1}\}$ と置く. Δ は, U にも作用する. 以下, 代数トーラス $\mathbb{T}_\mathfrak{a}$ の場合に,

$$H^{2g-1}_{\mathrm{dR}}(\Delta\backslash U)$$

の類として, 定義 1.1 の類似物として $\mathbb{T}_\mathfrak{a}$ の de Rham ポリログを定義する. ここで, $\Delta\backslash U$ は U の Δ による作用の商スタックを表し, $H^m_{\mathrm{dR}}(\Delta\backslash U)$ は U の Δ の作用による同変 de Rham コホモロジー (equivariant de Rham cohomology) として定義する. このコホモロジーは, 次の様に記述される.

$\mathbb{T}_\mathfrak{a}$ はアフィンスキームであるが, $g > 1$ のとき, U はアフィンでは無い. まずは $\mathbb{T}_\mathfrak{a}$ の de Rham コホモロジーを Čech 複体で計算するために, U のアフィン開被覆を定義する.

定義 2.1. $\alpha \in \mathfrak{a}_+$ に対して, $\mathbb{T}_\mathfrak{a}$ のアフィン開集合 U_α を,

$$U_\alpha := \mathbb{T}_\mathfrak{a} \setminus \{t^\alpha = 1\}$$

と定義する. このとき $U_\alpha \subset U$ であり, $\mathfrak{U} := \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{a}_+}$ は U のアフィン開被覆を与える.

Čech 複体を定義するために便宜上, $\mathfrak{U}$ の添字集合 $\mathfrak{a}_+$ に全順序を入れる. このとき, 有限集合 $I \subset \mathfrak{a}_+$ に対して $I = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ と記すとき, $\alpha_1 < \ldots < \alpha_m$ が成り立つものとする. $I \subset \mathfrak{a}_+$ に対して, $U_I := \bigcap_{\alpha\in I} U_\alpha$ と定義する. このとき, U_I もアフィン開集合となる.

定義 2.2. U の Čech-de Rham 複体 $C^\bullet(\mathfrak{U}, \Omega^\bullet_U)$ を, 2 重複体

$$\prod_{|I|=1} \Gamma(U_I, \Omega^\bullet_U) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} \prod_{|I|=m} \Gamma(U_I, \Omega^\bullet_U) \to \cdots$$

を単純化した複体として定義する. ただし, この複体の 0 次の項を $\prod_{|I|=1} \Gamma(U_I, \mathcal{O}_U)$ となる様に取り, 水平の微分 ∂ は, 標準的な交代和 $(\partial u)_{\alpha_1\cdots\alpha_m} := \sum_{\mu=1}^m (-1)^\mu u_{\alpha_1\cdots\check{\alpha}_\mu\cdots\alpha_m}$ として定義する.

Čech 複体の理論より, 任意の整数 m に対して標準的な同型

$$H^m(C^\bullet(\mathfrak{U}, \Omega^\bullet_U)) \cong H^m_{\mathrm{dR}}(U)$$

が存在する. すなわち U の de Rham コホモロジーは, Čech-de Rham 複体で表される.

次に, U の同変 de Rham コホモロジーを記述する同変 Čech-de Rham 複体を構成する. 任意の $\varepsilon \in \Delta$ に対して, $[\varepsilon]^* U_\alpha = U_{\varepsilon\alpha}$ となることから, 被覆 $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{a}_+}$ は Δ の作用で保たれる. 従って, 写像

$$[\varepsilon]^* \colon C^\bullet(\mathfrak{U}, \Omega^\bullet_U) \to C^\bullet(\mathfrak{U}, \Omega^\bullet_U)$$

が誘導され, $C^\bullet(\mathfrak{U}, \Omega^\bullet_U)$ は $\mathbb{Z}[\Delta]$ 加群としての構造を持つ.

Dirichlet の単数定理より $\Delta \cong \mathbb{Z}^{g-1}$ となる. $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{g-1}$ を Δ のアーベル群としての生成元とする. 任意の $\mu = 1, \ldots, g-1$ に対して $A^\mu_\bullet$ を, 1 次と 0 次に項のある $\mathbb{Z}$ 代数の複体

$$\mathbb{Z}[\langle\varepsilon_\mu\rangle] \xrightarrow{[\varepsilon_\mu]-1} \mathbb{Z}[\langle\varepsilon_\mu\rangle]$$

と定義する. この時,

$$P_\bullet := A^1_\bullet \otimes_\mathbb{Z} \cdots \otimes_\mathbb{Z} A^{g-1}_\bullet$$

とおくと $P_\bullet$ の各項は自由 $\mathbb{Z}[\Delta]$ 加群となり, $P_0 = \mathbb{Z}[\Delta] \to \mathbb{Z}$ を $[\varepsilon] \mapsto 1$ で定義される自然な写像とすると, $P_\bullet \to \mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}$ の $\mathbb{Z}[\Delta]$ 加群としての自由分解を与える. 特に $\mathbb{Z}$ 加群 M が Δ の作用を持つとき, M は $\mathbb{Z}[\Delta]$ 加群となり, 任意の整数 m に対して M の群コホモロジー $H^m(\Delta, M)$ は

$$H^m(\Delta, M) = H^m(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[\Delta]}(P_\bullet, M))$$

と表される.

定義 2.3. U の同変 Čech-de Rham 複体 $C^\bullet(\Delta\backslash\mathfrak{U}, \Omega^\bullet_U)$ を, 2 重複体

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[\Delta]}(P_\bullet, C^\bullet(\mathfrak{U}, \Omega^\bullet_U))$$

を単純化した複体として定義する.

同変 de Rham コホモロジーに対して, 任意の整数 m に対して標準的な同型

$$H^m(C^\bullet(\Delta\backslash\mathfrak{U}, \Omega^\bullet_U)) \cong H^m_{\mathrm{dR}}(\Delta\backslash U) \tag{7}$$

が存在する. 本稿では, (7) を同変 de Rham コホモロジー $H^m_{\mathrm{dR}}(\Delta\backslash U)$ の定義とみなす. de Rham コホモロジーと同変 de Rham コホモロジーの関係は, スペクトル系列

$$E_2^{p,q} = H^p(\Delta, H^q_{\mathrm{dR}}(U)) \Rightarrow H^{p+q}_{\mathrm{dR}}(\Delta \setminus U)$$

で与えられる.

以下, 表示 (7) を用いて, $H^{2g-1}_{\mathrm{dR}}(\Delta\backslash U)$ に de Rham ポリログを具体的に構成する. まずは錐 (cone) の言葉を用意する.

定義 2.4. $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \subset \mathfrak{a}_+$ に対して,

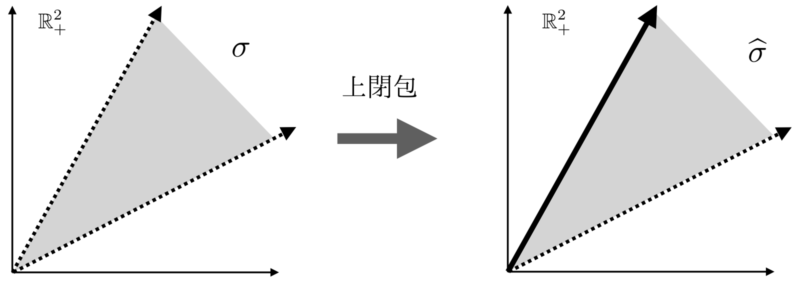
$$\sigma = \{x_1\alpha_1 + \cdots + x_m\alpha_m \mid x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}_+\}$$

と表される $\mathbb{R}^g_+$ の部分集合 σ を ($\mathbb{R}^g_+$ 内の) 有理開錐 (open rational cone), あるいは簡単に錐と呼ぶ. 特に $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ が $\mathbb{Q}$ 上 1 次独立なとき, σ は単体錐 (simplicial cone) であると言う.

錐 σ に対して, σ の次元 $\dim\sigma$ を, σ の生成する $\mathbb{R}$ 線型空間 $\langle\sigma\rangle$ の次元 $\dim_{\mathbb{R}}\langle\sigma\rangle$ と定義する. 山本 [Yam10] に従って, 錐 σ の上閉包 $\widehat{\sigma}$ を,

$$\widehat{\sigma} := \{x \in \mathbb{R}^g \mid \exists\delta > 0, 0 < \forall\delta' < \delta, x - (0, \dots, 0, \delta') \in \sigma\}$$

と定義する. 特に $\dim\sigma < g$ のとき, $\widehat{\sigma} = \emptyset$ となる.



錐 σ に対して次の $\mathcal{G}_\sigma(t)$ が, 乗法群の場合の $\mathcal{G}(t) = t/(1-t)$ に対応する.

定義 2.5. σ を $\mathbb{R}_+^g$ 内の錐とする. このとき,

$$\mathcal{G}_\sigma(t) := \sum_{\alpha \in \widehat{\sigma} \cap \mathfrak{a}} t^\alpha$$

と定義する.

定義より $\dim \sigma < g$ のとき, $\mathcal{G}_\sigma(t) = 0$ となる. 以下, $I \subset \mathfrak{a}_+$ に対して I が生成する錐を σ_I と記す. $I = \{\alpha_1, \dots, \alpha_g\} \subset \mathfrak{a}_+$ に対して $\dim \sigma_I = g$ となるとき,

$$\mathcal{G}_{\sigma_I}(t) = \frac{\sum_{\alpha \in R \cap \mathfrak{a}} t^\alpha}{(1-t^{\alpha_1}) \cdots (1-t^{\alpha_m})} \in \Gamma(U_I, \mathcal{O}_U)$$

が成り立つ. ただしここで R は, $\alpha_1, \dots, \alpha_g$ で張られる平行多面体の上閉包とする. 特に $\mathcal{G}_{\sigma_I}(t)$ は, $\mathbb{T}_\mathfrak{a}$ 上の有理関数である. この関数を用いて, 以下の結果を得た.

定理 2.6. $I = \{\alpha_1, \dots, \alpha_g\} \subset \mathfrak{a}_+$ に対して,

$$\eta_I := \frac{(-1)^g}{|R \cap \mathfrak{a}|} \mathcal{G}_{\sigma_I}(t) \frac{dt^{\alpha_1}}{t^{\alpha_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{dt^{\alpha_g}}{t^{\alpha_g}} \in \Gamma(U_I, \Omega_U^g)$$

と定義する. 特に $\dim \sigma_I < g$ のとき, $\eta_I = 0$ と定義する. このとき,

$$(\eta_I) \in \prod_{|I|=g} \Gamma(U_I, \Omega_U^g) \subset \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[\Delta]}(P_0, C^{2g-1}(\mathfrak{U}, \Omega^\bullet)) \subset C^{2g-1}(\Delta \backslash \mathfrak{U}, \Omega^\bullet)$$

は, $H_{\mathrm{dR}}^{2g-1}(\Delta \backslash U)$ の類 $\boldsymbol{\eta}_\mathfrak{a} := [(\eta_I)]$ を定義する. この類を, 代数トーラス $\mathbb{T}_\mathfrak{a}$ の de Rham ポリログと呼ぶ.

上記の $\boldsymbol{\eta}_\mathfrak{a}$ を de Rham ポリログとみなす理由は, 以下の留数の計算による. 同変 de Rham コホモロジーに対して, 完全系列

$$0 \longrightarrow H_{\mathrm{dR}}^{2g-1}(\Delta \backslash \mathbb{T}_\mathfrak{a}) \longrightarrow H_{\mathrm{dR}}^{2g-1}(\Delta \backslash U) \xrightarrow{\mathrm{Res}_{\Delta \backslash Z}} H_{\mathrm{dR}}^0(\Delta \backslash Z) \longrightarrow 0$$

が与えられる. 留数写像 $\mathrm{Res}_{\Delta \backslash Z}$ の定義より, 以下が従う.

定理 2.7. 代数トーラス $\mathbb{T}_\mathfrak{a}$ の de Rham ポリログ $\boldsymbol{\eta}_\mathfrak{a}$ は, 標準的な同型

$$H_{\mathrm{dR}}^0(\Delta \backslash Z) = H^0(\Delta, H_{\mathrm{dR}}^0(Z)) = \mathbb{Q}$$

を通して, $\mathrm{Res}_{\Delta \backslash Z}(\boldsymbol{\eta}_\mathfrak{a}) = 1$ をみたす.

3 de Rham ポリログと Lerch 型新谷ゼータ関数

この章では, σ をイデアル $\mathfrak{a}$ に対する $\mathbb{R}_+^g$ 内の有理開錐とする. 新谷によって定義された新谷ゼータ関数の特別な場合として, Lerch 型新谷ゼータ関数 $\mathcal{L}_\sigma(u, s)$ が, 次の様に定義される.

定義 3.1 (Lerch 型新谷ゼータ関数)**.** $u \in F$ と, 各 $\tau \in X$ に対して $\mathrm{Re}(s_\tau) > 1$ をみたす複素数 $\boldsymbol{s} = (s_\tau) \in \mathbb{C}^g$ に対して, Lerch 型新谷ゼータ関数 $\mathcal{L}_\sigma(u, \boldsymbol{s})$ を, 絶対収束する級数

$$\mathcal{L}_\sigma(u, \boldsymbol{s}) := \sum_{\alpha \in \widehat{\sigma} \cap \mathfrak{a}} \frac{e^{2\pi i \mathrm{Tr}(u\alpha)}}{\alpha^{\boldsymbol{s}}}$$

と定義する. ただしここで, $\alpha^{\boldsymbol{s}} := \prod_{\tau \in X} (\alpha^\tau)^{s_\tau}$ とする. 新谷 [Shi76, Proposition 1] は, この関数は $\boldsymbol{s} = (s_\tau) \in \mathbb{C}^X$ に有理型関数として解析接続されることを示した.

以下, 定理 1.4 と同様に, Lerch 型新谷ゼータ関数の特殊値と代数トーラス $\mathbb{T}_{\mathfrak{a}}$ の de Rham ポリログを与える微分形式の関係を考察する. $\mathfrak{d}_F$ を F の差分イデアル

$$\mathfrak{d}_F^{-1} := \{\alpha \in F \mid \mathrm{Tr}(\alpha \mathcal{O}_F) \subset \mathbb{Z}\}$$

として, $\mathfrak{a}^* := \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{d}_F^{-1}$ とする. いま, $\boldsymbol{z} \in F \otimes \mathbb{C}$ に対して加法的指標 $\alpha \mapsto e^{2\pi i \mathrm{Tr}(\alpha z)}$ を対応させると, 代数トーラス $\mathbb{T}_{\mathfrak{a}}$ に対して (4) の一般化となる, 複素一意化

$$(F \otimes \mathbb{C})/\mathfrak{a}^* \xrightarrow{\cong} \mathbb{T}_{\mathfrak{a}}(\mathbb{C}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{a}, \mathbb{C}^\times)$$

が得られる. ただし, $z = (z_\tau) \in F \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{C}^X$ に対して, $\mathrm{Tr}(\alpha z) = \sum_{\tau \in X} \alpha^\tau z_\tau$ と定義する.

この一意化を通して $\mathcal{G}_\sigma(t)$ に対応する $(F \otimes \mathbb{C})/\mathfrak{a}^*$ 上の関数を

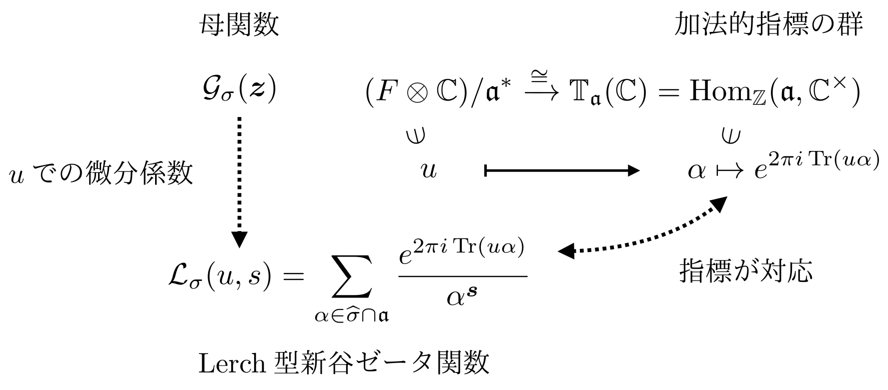
$$\mathcal{G}_\sigma(\boldsymbol{z}) := \mathcal{G}_\sigma(e^{2\pi i \mathrm{Tr}(\boldsymbol{z})})$$

と記す. この場合, 次の定理が新谷により証明されている.

定理 3.2 ([Shi76, Proposition 1])**.** いま, $\tau \in X$ に対して $\partial_{z_\tau} := (2\pi i)^{-1} d/dz_\tau$ として, $\partial_{\boldsymbol{z}}^{\boldsymbol{k}} := \prod_{\tau \in X} \partial_{z_\tau}^{k_\tau}$ とおく. 任意の $u \in F \setminus \mathfrak{a}^*$ と整数の組 $\boldsymbol{k} = (k_\tau) \in \mathbb{N}_{\geq 0}^X$ に対して,

$$\partial_{\boldsymbol{z}}^{\boldsymbol{k}} \mathcal{G}_\sigma(u) = \mathcal{L}_\sigma(u, -\boldsymbol{k})$$

が成り立つ.



4 総実代数体の Hecke L 関数

$\mathfrak{f} \neq (0)$ を $\mathcal{O}_F$ の整イデアルとして, $I(\mathfrak{f})$ を $\mathfrak{f}$ と互いに素な F の分数イデアル全体のなす群とする. また,

$$P(\mathfrak{f}\infty) := \{(\alpha) \mid \alpha \in F, \alpha \equiv 1 \, (\mathrm{mod}^\times \mathfrak{f}), \alpha \gg 0\}$$

とする．ここで (α) は $\alpha \in F$ で生成される F の単項分数イデアルであり, $\alpha \equiv 1\,(\mathrm{mod}^{\times}\,\mathfrak{f})$ とは, 任意の $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{f}$ となる $\mathcal{O}_F$ の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して $v_{\mathfrak{p}}(\alpha-1) \geq v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{f})$ が成り立つことである．このとき, F の導手 $\mathfrak{f}\infty$ のイデアル類群 (＝導手 $\mathfrak{f}$ の狭義イデアル類群) を

$$\mathrm{Cl}_F(\mathfrak{f}\infty) := I(\mathfrak{f})/P(\mathfrak{f}\infty)$$

と定義する．この群は有限であり, 類体論より Galois 群 $\mathrm{Gal}(F(\mathfrak{f}\infty)/F)$ と同型であることが知られている．ここで, $F(\mathfrak{f}\infty)$ は F 上の導手 $\mathfrak{f}\infty$ の射類体である．

F の有限 Hecke 指標は, 次の様に定義される．

定義 4.1. 任意の指標

$$\chi_{\mathrm{Hecke}} : \mathrm{Cl}_F(\mathfrak{f}\infty) \to \mathbb{C}^{\times}$$

を, F の法 $\mathfrak{f}\infty$ の有限 Hecke 指標 (＝ Dirichlet 指標) と呼ぶ.

特に χ_{Hecke} がより大きいイデアル $\mathfrak{f}' \mid \mathfrak{f}$ に対して $\mathrm{Cl}_F(\mathfrak{f}'\infty)$ を経由しないとき, χ_{Hecke} は原始的であると言う．以下, $\mathfrak{f}$ と互いに素でない分数イデアル $\mathfrak{a}$ に対して $\chi(\mathfrak{a}) = 0$ と定義することで, χ_{Hecke} を F の (0) でない分数イデアル全体のなす群 I_F 上の指標とみなす．Hecke 指標 χ_{Hecke} に対する Hecke L 関数は, 無限級数

$$L(\chi_{\mathrm{Hecke}}, s) := \sum_{\mathfrak{a} \in I_F, \mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K} \frac{\chi_{\mathrm{Hecke}}(\mathfrak{a})}{\boldsymbol{N}\mathfrak{a}^s}$$

として定義される．この級数は, $\mathrm{Re}(s) > 1$ で絶対収束する．有限 Hecke 指標について, 以下の結果が知られている ([Neu99, (6.9) Proposition] 参照.)

命題 4.2. いま, $\chi_{\mathrm{Hecke}} \colon \mathrm{Cl}_F(\mathfrak{f}\infty) \to \mathbb{C}^{\times}$ を有限 Hecke 指標とする．このとき, ある指標の組

$$\chi \colon (\mathcal{O}_F/\mathfrak{f})^{\times} \to \mathbb{C}^{\times}, \qquad \chi_{\infty} \colon (F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})^{\times} \to \{\pm 1\}$$

が一意的に存在して, $\mathfrak{f}$ と互いに素な任意の $\alpha \in \mathcal{O}_F$ に対して,

$$\chi_{\mathrm{Hecke}}((\alpha)) = \chi(\alpha)\chi_{\infty}(\alpha)$$

が成り立つ．ここで χ_{∞} は,

$$\chi_{\infty}(\alpha) = \prod_{\tau \in X} \bigl(\alpha^{\tau}/|\alpha^{\tau}|\bigr)^{q_{\tau}}, \qquad q_{\tau} \in \{0, 1\} \tag{8}$$

という形で与えられる指標とする．

注意 4.3. 任意の連続準同型 $\psi \colon (F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})^{\times} \to \{\pm 1\}$ は, (8) の形で与えられる．

χ_{Hecke} が原始的であることと χ が原始的であること, すなわち, より小さなイデアル $\mathfrak{f}' \mid \mathfrak{f}$ に対して χ は $(\mathcal{O}_F/\mathfrak{f}')^{\times}$ を経由しないことは, 同値である．χ_{∞} の形から, 特に $\alpha \in \mathcal{O}_F$ が $\mathfrak{f}$ と互いに素で $\alpha \gg 0$ であれば,

$$\chi_{\mathrm{Hecke}}((\alpha)) = \chi(\alpha)$$

が成り立つ.

以下, $\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{f}$ と互いに素な F の整イデアルとする．包含 $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_F$ は自然な全単射

$$\mathfrak{a}/\mathfrak{f}\mathfrak{a} \cong \mathcal{O}_F/\mathfrak{f}$$

を導く．この同型を通して, χ を $\mathfrak{a}/\mathfrak{f}\mathfrak{a}$ 上の関数とみなすこともできる．いま, 任意の $u \in \mathfrak{f}^{-1}\mathfrak{a}^*/\mathfrak{a}^*$ に対して

$$c_\chi(u) := \frac{1}{N(\mathfrak{f})} \sum_{\beta \in \mathfrak{a}/\mathfrak{f}\mathfrak{a}} \chi(\beta) e^{-2\pi i \mathrm{Tr}(u\beta)}$$

とおくと, 任意の $\alpha \in \mathfrak{a}$ に対して

$$\chi(\alpha) = \sum_{u \in \mathfrak{f}^{-1}\mathfrak{a}^*/\mathfrak{a}^*} c_\chi(u) e^{2\pi i \mathrm{Tr}(u\alpha)} \tag{9}$$

が成り立つ．$c_\chi(u)$ は一見 $\mathfrak{a}$ の取り方に依存している様にも見えるが, 自然な包含による全単射 $\mathfrak{a}/\mathfrak{f}\mathfrak{a} \cong \mathcal{O}_F/\mathfrak{f}$ と $\mathfrak{f}^{-1}\mathfrak{d}_F^{-1}/\mathfrak{d}_F^{-1} \cong \mathfrak{f}^{-1}\mathfrak{a}^*/\mathfrak{a}^*$ を同一視すると, $\mathfrak{a}$ に依存しないことが分かる．χ_{Hecke} が原始的な指標の場合には, $u \in \mathfrak{a}^*$ に対して $c_\chi(u) = 0$ となることが知られている．

いま $\mathrm{Cl}_F(\infty)$ の代表系を与える, $\mathfrak{f}$ と互いに素な F の整イデアル $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_h$ を固定する．$\mathrm{Cl}_F(\infty)$ 内で $\mathfrak{a}_i^{-1}$ と同じ類となる整イデアルは, $\alpha \in \mathfrak{a}_i$ により $\mathfrak{a}_i^{-1}\alpha$ と言う形で表される．このとき,

$$\begin{aligned} L(\chi_{\mathrm{Hecke}}, s) &= \sum_{\substack{\mathfrak{a} \in I(\mathfrak{f}) \\ \mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_F}} \frac{\chi_{\mathrm{Hecke}}(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s} = \sum_{i=1}^{h} \sum_{\substack{[\mathfrak{a}] \equiv [\mathfrak{a}_i^{-1}] \\ \mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_F}} \frac{\chi_{\mathrm{Hecke}}(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s} \\ &= \sum_{i=1}^{h} \sum_{\alpha \in (\mathfrak{a}_i)_+/(\mathcal{O}_F^\times)_+} \frac{\chi_{\mathrm{Hecke}}(\mathfrak{a}_i^{-1}\alpha)}{N(\mathfrak{a}_i^{-1}\alpha)^s} = \sum_{i=1}^{h} \chi_{\mathrm{Hecke}}^{-1}(\mathfrak{a}_i) N(\mathfrak{a}_i)^s \sum_{\alpha \in (\mathfrak{a}_i)_+/(\mathcal{O}_F^\times)_+} \frac{\chi(\alpha)}{N(\alpha)^s} \end{aligned}$$

が成り立つ．最後の和は (9) より,

$$\sum_{\alpha \in (\mathfrak{a}_i)_+/(\mathcal{O}_F^\times)_+} \frac{\chi(\alpha)}{N(\alpha)^s} = \sum_{\alpha \in (\mathfrak{a}_i)_+/(\mathcal{O}_F^\times)_+} \sum_{u \in \mathfrak{f}^{-1}\mathfrak{a}_i^*/\mathfrak{a}_i^*} c_\chi(u) \frac{e^{2\pi i \mathrm{Tr}(u\alpha)}}{N(\alpha)^s}$$

と表される．この和は $\alpha \in (\mathfrak{a}_i)_+/(\mathcal{O}_F^\times)_+$ の代表系の取り方に依存しないが, 固定した $u \in \mathfrak{f}^{-1}\mathfrak{a}_i^*/\mathfrak{a}_i^*$ に対する和

$$\sum_{\alpha \in (\mathfrak{a}_i)_+/(\mathcal{O}_F^\times)_+} \frac{e^{2\pi i \mathrm{Tr}(u\alpha)}}{N(\alpha)^s}$$

は α の代表系の取り方に依存し, well-defined では無い．$\alpha \in (\mathfrak{a}_i)_+$ の法 $(\mathcal{O}_F^\times)_+$ の代表系の取り方を 1 つ定めるために, 以下の新谷分割を利用する．

定理 4.4 ([Shi76, Proposition 4])**.** $\mathfrak{a}$ に対する単体錐からなる有限集合 $\Phi_\mathfrak{a}$ が存在して,

$$\mathbb{R}_+^X = \coprod_{\varepsilon \in \Delta} \coprod_{\sigma \in \Phi_\mathfrak{a}} \varepsilon\sigma$$

が成り立つ．

以上の系として, 山本 [Yam10] より下記が示されている．

命題 4.5. $\Phi_\mathfrak{a}$ を新谷分割として, $\Phi_\mathfrak{a}^g$ を $\Phi_\mathfrak{a}$ の g 次元錐からなる部分集合とする．この時,

$$\mathbb{R}_+^X = \coprod_{\varepsilon \in \Delta} \coprod_{\sigma \in \Phi_\mathfrak{a}^g} \varepsilon\widehat{\sigma}$$

が成り立つ．

新谷分割に対して

$$\mathcal{L}_{\Phi_{\mathfrak{a}}}(u,\boldsymbol{s}) := \sum_{\sigma\in\Phi_{\mathfrak{a}}^g} \mathcal{L}_\sigma(u,\boldsymbol{s})$$

とおくと, 定義より

$$L(\chi_{\mathrm{Hecke}},s) = \sum_{i=1}^h \chi_{\mathrm{Hecke}}^{-1}(\mathfrak{a}_i)N(\mathfrak{a}_i)^s \sum_{u\in\mathfrak{f}^{-1}\mathfrak{a}_i^*/\mathfrak{a}_i^*} c_\chi(u)\mathcal{L}_{\Phi_{\mathfrak{a}_i}}(u,(s,\dots,s))$$

が成り立つ. 特に

$$\mathcal{G}_{\Phi_{\mathfrak{a}}}(\boldsymbol{z}) := \sum_{\sigma\in\Phi_{\mathfrak{a}}^g} \mathcal{G}_\sigma(\boldsymbol{z})$$

と置くと, 定理 3.2 より以下の系を得る.

系 4.6. いま, $\mathfrak{f}\neq(0)$ を F の整イデアルとして, $\chi_{\mathrm{Hecke}}\colon \mathrm{Cl}_F(\mathfrak{f}\infty)\to\mathbb{C}^\times$ を導手 $\mathfrak{f}\infty$ の有限 Hecke 指標とする. このとき, 任意の整数 $k\geq 0$ に対して $\partial_{\boldsymbol{z}} := \prod_{\tau\in X}\partial_{z_\tau}$ とおくと,

$$L(\chi_{\mathrm{Hecke}},-k) = \sum_{i=1}^h \chi_{\mathrm{Hecke}}^{-1}(\mathfrak{a}_i)N(\mathfrak{a}_i)^{-k} \sum_{u\in\mathfrak{f}^{-1}\mathfrak{a}_i^*/\mathfrak{a}_i^*} c_\chi(u)\partial_{\boldsymbol{z}}^k\mathcal{G}_{\Phi_{\mathfrak{a}_i}}(u)$$

が成り立つ.

系 4.6 は, 系 1.5 の代数トーラスへの一般化であり, F の有限 Hecke 指標 χ_{Hecke} の非正整数点での特殊値が, 代数トーラスの de Rham ポリログを定義する関数で捉えられていることを意味している.

5 考察

本稿では, 代数トーラス $\mathbb{T}_{\mathfrak{a}}$ の de Rham ポリログ $\boldsymbol{\eta}_{\mathfrak{a}}$ を定義した. 今後の研究の方向性は, 乗法群の場合の一般化として, $\mathbb{T}_{\mathfrak{a}}$ 上にも対数層と呼ばれる, Δ の作用で同変な混合実 Hodge 構造の変形 $\mathbb{L}\mathrm{og}$ を定義し, $\mathbb{T}_{\mathfrak{a}}$ のポリログの Hodge 実現 $\mathrm{pol}_{\mathfrak{a}}$ を, 同変 Deligne-Beilinson コホモロジー $H_{\mathscr{D}}^{2g-1}(\Delta\backslash U,\mathbb{L}\mathrm{og})$ の類

$$\mathrm{pol}_{\mathfrak{a}} \in H_{\mathscr{D}}^{2g-1}(\Delta\backslash U,\mathbb{L}\mathrm{og})$$

で $\Delta\backslash Z$ での留数が 1 となるものとして定義することである. この場合にも, (3) から導かれる退化写像

$$\begin{aligned}&H_{\mathscr{D}}^{2g-1}(\Delta\backslash U,\mathbb{L}\mathrm{og})\\ &\qquad\xrightarrow{\cong} H_{\mathscr{D}}^0(\operatorname{Spec}\mathbb{R}, H^{2g-1}(\Delta\backslash U,\mathbb{L}\mathrm{og})) \xrightarrow{\cong} H^{2g-1}(\Delta\backslash U,\mathbb{R}) \hookrightarrow H_{\mathrm{dR}}^1(\Delta\backslash U)\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{C}\end{aligned}$$

を通して, $\boldsymbol{\eta}_{\mathfrak{a}}\otimes 1$ は $\mathrm{pol}_{\mathfrak{a}}$ の像と一致することが期待される. 現時点では, 反復積分 (1) の対応物は不明であるが, $\mathrm{pol}_{\mathfrak{a}}$ を表すコサイクルを具体的に記述する過程で, 正しい形が見えてくることを期待している.

また乗法群の場合, 系 1.5 より, Dirichlet L 関数の特殊値は, de Rham ポリログを定義する有理型関数 $\mathcal{G}(z)$ の等分点での微分係数の線型和で表されている. 総実代数体の場合, 系 4.6 から分かる通り, 総実代数体の Hecke L 関数の特殊値を表すためには単純な等分点での線型和だけでなく, 新谷分割を選ぶ必要がある. 現在, ポリログを等分点に制限する際に新谷分割が現れるコホモロジー論的理由は不明であり, ポリログから総実代数体の Hecke L 関数の特殊値を導くコホモロジー論的操作を定義できるかが, 今後の課題である.

参考文献

[Bar78] D. Barsky, Fonctions zeta p-adiques d'une classe de rayon des corps de nombres totalement réels, Groupe d'Etude d'Analyse Ultramétrique (5e année: 1977/78), Exp. No. 16, Secrétariat Math., Paris, 1978.

[Bei84] A. A. Beĭlinson, Higher regulators and values of L-functions, In: Current problems in mathematics, Vol. 24, 181–238, Itogi Nauki i Tekhniki, Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1984.

[BL94] A. Beĭlinson and A. Levin, The elliptic polylogarithm, In: Motives (Seattle, WA, 1991), 123–190, Proc. Sympos. Pure Math., 55, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[BK90] S. Bloch and K. Kato, L-functions and Tamagawa numbers of motives, In: The Grothendieck Festschrift, Vol. I, 333–400, Progr. Math., 86, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[CN79] P. Cassou-Noguès, Valeurs aux entiers négatifs des fonctions zêta et fonctions zêta p-adiques, Invent. Math. **51** (1979), no. 1, 29–59.

[HW98] A. Huber and J. Wildeshaus, Classical motivic polylogarithm according to Beilinson and Deligne, Doc. Math. **3** (1998), 27–133.

[HK18] A. Huber and G. Kings, Polylogarithm for families of commutative group schemes, J. Algebraic Geom. **27** (2018), 449–495.

[Kato93] K. Kato, Lectures on the approach to Iwasawa theory for Hasse-Weil L-functions via B_{dR}. I, In: Arithmetic algebraic geometry (Trento, 1991), 50–163, Lecture Notes in Math., 1553, Springer, Berlin, 1993.

[Katz81] N. M. Katz, Another look at p-adic L-functions for totally real fields, Math. Ann. **255** (1981), no. 1, 33–43.

[Kin09] G. Kings, A note on polylogarithms on curves and abelian schemes, Math. Z. **262** (2009), no. 3, 527–537.

[Neu88] J. Neukirch, The Beĭlinson conjecture for algebraic number fields, In: Beĭlinson's conjectures on special values of L-functions, 193–247, Perspect. Math., 4, Academic Press, Boston, MA, 1988.

[Neu99] J. Neukirch, Algebraic number theory, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 322, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[Shi76] T. Shintani, On evaluation of zeta functions of totally real algebraic number fields at non-positive integers, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **23**, (1976), no. 2, 393–417.

[Wil97] J. Wildeshaus, Realizations of polylogarithms, Lecture Notes in Mathematics, 1650, Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[Yam10] S. Yamamoto, On Shintani's ray class invariant for totally real number fields, Math. Ann. **346** (2010), no. 2, 449–476.