有限体上の概均質ベクトル空間における軌道指数和：3次の場合

石本 和基 (神戸大学)

1 導入

本稿は「第12回福岡数論研究集会」での講演「有限体上の概均質ベクトル空間における軌道指数和：3次の場合」についての報告である．K を体, V を K 上の有限次元ベクトル空間とする．K 上の簡約代数群 G が V に作用しているとする．V の G-軌道で Zariski 位相で稠密であるものが存在するとき, (G,V) を概均質ベクトル空間という．概均質ベクトル空間における Fourier 変換は, ゼータ関数の関数等式の決定や代数体に関する密度定理に深い関係があり, 整数論において重要な研究対象である．例えば, 谷口氏と Thorne 氏により次の密度定理が示されている．

定理 1 ([1])**.** 3次体 F の判別式を $\mathrm{Disc}(F)$ とし, $X \in \mathbb{R}$ に対して $N_3^{\pm}(X)$ を $0 < \pm\mathrm{Disc}(F) < X$ を満たす F の個数とする．$K^+ = 1, K^- = \sqrt{3}, C^+ = 1, C^- = 3$ とすると, 次が成り立つ:

$$N_3^{\pm}(X) = \frac{C^{\pm}}{12\zeta(3)}X + K^{\pm}\frac{4\zeta(1/3)}{5\Gamma(2/3)^3\zeta(5/3)}X^{5/6} + O(X^{7/9+\epsilon}).$$

この定理は概均質ベクトル空間 $\mathrm{Sym}^3(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$ (p は素数) における Fourier 変換の値を用いて証明される．概均質ベクトル空間が有限体上で定義されているとき, その Fourier 変換は指数和の形で表される．筆者は有限体上の概均質ベクトル空間における Fourier 変換の研究を行っている．谷口氏と Thorne 氏による先行研究 ([2]) では, $\mathbb{F}_q \otimes \mathrm{Sym}^2(\mathbb{F}_q^2)$, $\mathrm{Sym}^3(\mathbb{F}_q^2)$, $\mathbb{F}_q \otimes \mathrm{Sym}^2(\mathbb{F}_q^3)$, $\mathbb{F}_q^2 \otimes \mathrm{Sym}^2(\mathbb{F}_q^2)$, $\mathbb{F}_q^2 \otimes \mathrm{Sym}^2(\mathbb{F}_q^3)$ における Fourier 変換の明示公式が与えられた．筆者は他のいくつかの概均質ベクトル空間において, 軌道と部分空間の共通部分の元の個数を数えることにより, Fourier 変換の明示公式を求めた．本稿では明示公式の求め方と, 3次の場合と呼ばれるいくつかの概均質ベクトル空間における結果 (定理 4, 5, 6) について述べる．3次とは, その非特異軌道が3次分離代数に対応することを意味する．([3] を参照.)

1.1 Fourier 変換

p を奇素数, $\mathbb{F}_q$ を位数 $q = p^n$ の有限体とする．V を $\mathbb{F}_q$ 上の有限次元ベクトル空間とし, 有限群 G が V に線型に作用しているとする．そして (G,V) が以下の条件を満たしているとする．

条件 2. G の位数2の自己同型 $\iota : G \ni g \mapsto g^{\iota} \in G$ と V 上の双線型形式 $\beta : V \times V \mapsto \mathbb{F}_q$ で, 次を満たすものが存在する:

$$\beta(gx, g^{\iota}y) = \beta(x,y) \quad (x, y \in V, g \in G).$$

関数 $\phi : V \to \mathbb{C}$ に対して, その Fourier 変換 $\widehat{\phi} : V \to \mathbb{C}$ を以下で定義する:

$$\widehat{\phi}(y) := |V|^{-1} \sum_{x \in V} \phi(x) \exp\left(\frac{2\pi i \mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(\beta(x,y))}{p} \right). \tag{1}$$

ここで,

$$\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p} : \mathbb{F}_q \to \mathbb{F}_p$$

はトレース写像である. $\mathcal{F}_V^G$ を V 上の G-不変な $\mathbb{C}$ 値関数全体の集合, つまり

$$\mathcal{F}_V^G := \{\phi : V \to \mathbb{C} \mid \phi(gx) = \phi(x) \quad (g \in G, x \in V)\}$$

とする. $\mathcal{F}_V^G$ は $\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間になる. $\phi(x) \in \mathcal{F}_V^G$ に対して, $\widehat{\phi}$ もまた $\mathcal{F}_V^G$ の元になる. さらに, Fourier 変換写像 $\mathcal{F}_V^G \ni \phi \mapsto \widehat{\phi} \in \mathcal{F}_V^G$ は線型写像になる. この写像の明示公式を求めることが目的である.

計算には以下の命題を用いる.

命題 3 ([2])**.** $\mathcal{O}_i \, (1 \leq i \leq r)$ を V の G-軌道とし, $e_i \, (1 \leq i \leq r)$ を $\mathcal{O}_i$ の指示関数とする. W を V の部分空間とし, $W^\perp := \{y \in V \mid \forall x \in W, \beta(x,y) = 0\}$ とする. このとき次が成り立つ:

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{|\mathcal{O}_i \cap W|}{|\mathcal{O}_i|} \widehat{e_i} = \frac{|W|}{|V|} \sum_{i=1}^{r} \frac{|\mathcal{O}_i \cap W^\perp|}{|\mathcal{O}_i|} e_i.$$

$e_1, \ldots, e_r$ は $\mathcal{F}_V^G$ の $\mathbb{C}$-基底となる. したがって $\widehat{e_1}, \ldots, \widehat{e_r}$ の Fourier 変換が求められれば, 任意の $\phi \in \mathcal{F}_V^G$ の Fourier 変換が求められる. 命題 3 より, V の部分空間を一つ選ぶと, $\widehat{e_i}$ と e_i の線型結合の等式を一つ得る. したがって r の相異なる部分空間を選び, 得られる r 個の等式が線型独立ならば, 明示公式が導かれる.

2 主結果

筆者は以下の概均質ベクトル空間について指数和を計算し, 講演で紹介した.

(ア) $V = \mathbb{F}_q^2 \otimes \mathbb{F}_q^2 \otimes \mathbb{F}_q^2$ (2 次正方行列の対の空間), $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$

(イ) $V = \mathbb{F}_q^3 \otimes \mathbb{F}_q^2 \otimes \mathbb{F}_q^2$ (2 次正方行列の 3 つ組の空間), $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \times \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q)$

(ウ) $V = \mathbb{F}_q^4 \otimes \mathbb{F}_q^2 \otimes \mathbb{F}_q^2$ (2 次正方行列の 4 つ組の空間), $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \times \mathrm{GL}_4(\mathbb{F}_q)$

(エ) $V = \mathbb{F}_q^2 \otimes \mathbb{F}_q^3 \otimes \mathbb{F}_q^3$ (3 次正方行列の対の空間), $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \times \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q) \times \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q)$

(オ) $V = \mathbb{F}_q^2 \otimes \mathrm{H}_2(\mathbb{F}_{q^2})$ (2 次 Hermite 行列の対の空間), $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_{q^2})$

(カ) $V = \mathbb{F}_q^2 \otimes \mathrm{H}_3(\mathbb{F}_{q^2})$ (3 次 Hermite 行列の対の空間), $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \times \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_{q^2})$

(キ) $V = \mathbb{F}_q^2 \otimes \wedge^2(\mathbb{F}_q^4)$ (4 次交代行列の対の空間), $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \times \mathrm{GL}_4(\mathbb{F}_q)$

(ク) $V = \mathbb{F}_q^2 \otimes \wedge^2(\mathbb{F}_q^6)$ (6 次交代行列の対の空間), $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \times \mathrm{GL}_6(\mathbb{F}_q)$

この報告書では, 講演の主題である (エ), (カ), (ク) の空間における結果について述べる.

2.1 3 次正方行列の対の空間

$V=\mathbb{F}_q^2\otimes\mathbb{F}_q^3\otimes\mathbb{F}_q^3, G=\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)\times\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q)\times\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q)$ とする. V の元 x を 3 次正方行列の対

$$(A,B)=(\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{bmatrix})$$

と表すことにする. また, G の元 g を (g_1,g_2,g_3) と書く. G は V に

$$gx=(g_1A^tg_2,g_1B^tg_2)^tg_3$$

で作用している. この作用による軌道は 21 個になる. 以下の $x_1,...,x_{21}$ はその代表元である:

$$x_1=(0,0),x_2=(\begin{bmatrix}1&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix},0),x_3=(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix},0),x_4=(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix},0),$$

$$x_5=(\begin{bmatrix}1&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}&1&\\0&&\\&&0\end{bmatrix}),x_6=(\begin{bmatrix}1&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}&0&\\1&&\\&&0\end{bmatrix}),x_7=(\begin{bmatrix}1&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}&1&\\1&&\\&&0\end{bmatrix}),$$

$$x_8=(\begin{bmatrix}1&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix}),x_9=(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}&-1&\\\mu_0&\mu_1&\\&&0\end{bmatrix}),x_{10}=(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}&&1\\&0&\\0&&\end{bmatrix}),$$

$$x_{11}=(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}&&1\\1&&\\&0&\end{bmatrix}),x_{12}=(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}&&0\\&0&\\1&&\end{bmatrix}),x_{13}=(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}&1&\\&&0\\1&&\end{bmatrix}),$$

$$x_{14}=(\begin{bmatrix}&1&\\1&&\\&&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}&&1\\&0&\\1&&\end{bmatrix}),x_{15}=(\begin{bmatrix}&&1\\&1&\\1&&\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&&\\&0&\\&&1\end{bmatrix}),x_{16}=(\begin{bmatrix}&&1\\&1&\\1&&\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&&\\&&1\\&1&\end{bmatrix}),$$

$$x_{17}=(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&&\\&0&\\&&1\end{bmatrix}),x_{18}=(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&&\\&&1\\&1&\end{bmatrix}),x_{19}=(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}),$$

$$x_{20}=(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}&-1&\\\mu_0&\mu_1&\\&&1\end{bmatrix}),x_{21}=(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}&-1&\\&\nu_2&-1\\\nu_0&\nu_1&\end{bmatrix}).$$

ただし, $\mu_0,\mu_1,\nu_0,\nu_1,\nu_2\in\mathbb{F}_q$ は $X^2+\mu_1X+\mu_0, X^3+\nu_2X^2+\nu_1X+\nu_0\in\mathbb{F}_q[X]$ が既約になるようなものとする. また, 空白の部分は 0 を表す.

Fourier 変換の計算のために用いた部分空間は次のとおりである:

$$W_1=\{0\},W_2=(0,\begin{bmatrix}0&0&*\\0&0&*\\0&0&*\end{bmatrix}),W_3=(0,\begin{bmatrix}0&*&*\\0&*&*\\0&*&*\end{bmatrix}),W_4=(0,\begin{bmatrix}*&*&*\\*&*&*\\*&*&*\end{bmatrix}),$$

$$W_5=(\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\*&*&*\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\*&*&*\end{bmatrix}),W_6=(\begin{bmatrix}0&0&*\\0&0&*\\0&0&*\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&*\\0&0&*\\0&0&*\end{bmatrix}),W_7=(\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&*\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&*\\0&0&*\\*&*&*\end{bmatrix}),$$

$$W_8=(\begin{bmatrix}0&0&0\\*&*&*\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\*&*&*\end{bmatrix}),W_9=(\begin{bmatrix}0&0&0\\0&*&*\\0&*&*\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&*&*\\0&*&*\end{bmatrix}),W_{10}=(\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\*&*&*\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\*&*&*\\*&*&*\end{bmatrix}),$$

$$W_{11}=(\begin{bmatrix}0&0&0\\*&*&*\\*&*&*\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\*&*&*\\*&*&*\end{bmatrix}),W_{12}=(\begin{bmatrix}0&0&*\\0&0&*\\0&0&*\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&*&*\\0&*&*\\0&*&*\end{bmatrix}),W_{13}=(\begin{bmatrix}0&*&*\\0&*&*\\0&*&*\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&*&*\\0&*&*\\0&*&*\end{bmatrix}),$$

$$W_{14}=(\begin{bmatrix}0&0&*\\0&0&*\\*&*&*\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&*\\0&0&*\\*&*&*\end{bmatrix}),W_{15}=(\begin{bmatrix}0&0&*\\0&*&*\\*&*&*\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&*&*\end{bmatrix}),W_{16}=(\begin{bmatrix}0&0&*\\0&*&*\\*&*&*\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&*\\0&*&*\end{bmatrix}),$$

$$W_{17} = (\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ * & * & * \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}), W_{18} = (\begin{bmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * \\ * & * & * \end{bmatrix}), W_{19} = (\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ * & * & * \end{bmatrix}),$$

$$W_{20} = (\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}), W_{21} = (\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}).$$

ただし, 例えば

$$W_{20} = (\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix})$$

は

$$\left\{ (\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}) \in V \,\middle|\, a_{11} = a_{12} = a_{13} = 0 \right\}$$

を意味する.

定理 4. 各軌道と各部分空間の共通部分は22ページの表1のとおりである. ここで, $1 \leq i \leq 21$ に対して, $\mathcal{O}_i = Gx_i$ とする. また, $[a, b, c, d] = (q-1)^a q^b (q+1)^c (q^2+q+1)^d$ とし,

$$\begin{array}{llll}
a_1 = 2q+1 & b_1 = 2q^2+2q+1 & b_8 = q^2+4q+1 & c_1 = q^3+5q^2+3q+1 \\
a_2 = 3q+1 & b_2 = 4q^2+3q+1 & b_9 = 3q^2+2q+1 & c_2 = q^3+2q^2+3q+1 \\
a_3 = q+2 & b_3 = 5q^2+3q+1 & b_{10} = 5q^2+8q+1 & c_3 = 2q^3+4q^2+4q+1 \\
a_4 = 4q+1 & b_4 = 3q^2+3q+1 & b_{11} = 3q^2+5q+1 & \\
a_5 = 7q+1 & b_5 = q^2+3q+1 & b_{12} = 2q^2+4q+1 & \\
a_6 = 5q+1 & b_6 = 5q^2+5q+1 & b_{13} = q^2+6q+1 & \\
 & b_7 = q^2+8q+1 & &
\end{array}$$

とする.

この結果と命題3より Fourier 変換の明示公式が求められる. Fourier 変換写像の表現行列は次ページのようになる.

$$
q^{18}\left(\begin{array}{ccccccccccccccccccccc}
1 & [1,0,1,2] & [2,1,2,2] & [3,3,2,1] & [2,1,1,2] & [2,1,1,2] & [3,1,3,2] & \tfrac{1}{2}[2,3,3,2] & \tfrac{1}{2}[4,3,1,2] & [3,3,3,2] & [4,4,2,2] & [3,3,3,2] & [4,4,2,2] & [4,4,2,2] & [4,3,3,2] & [5,4,3,2] & [3,6,2,2] & [4,6,3,2] & \tfrac{1}{6}[4,7,3,2] & \tfrac{1}{2}[5,7,2,2] & \tfrac{1}{3}[6,7,3,1] \\
1 & e_1 & [1,1,2,0]d_1 & [2,3,1,0]c_1 & [1,1,1,0]d_1 & [1,1,1,0]d_1 & [2,1,2,0]d_2 & \tfrac{1}{2}[1,3,2,0]d_3 & \tfrac{1}{2}[3,3,1,0]c_2 & [2,3,2,0]d_2 & [3,4,2,0]c_2 & [2,3,2,0]d_2 & [3,4,2,0]c_2 & [3,4,2,0]c_2 & [3,3,3,0]c_2 & -[4,4,2,0]b_2 & [2,6,1,0]d_5 & [3,6,2,0]c_8 & \tfrac{1}{6}[3,7,2,0]c_{10} & -\tfrac{1}{2}[4,7,1,0]b_2 & -\tfrac{1}{3}[5,7,3,0] \\
1 & [0,0,1,0]d_1 & qg_1 & [1,3,0,0]e_2 & [1,1,1,0]c_2 & [1,1,1,0]c_2 & [1,1,1,0]e_3 & \tfrac{1}{2}[1,3,1,0]d_4 & -\tfrac{1}{2}[2,3,0,0]c_1 & [1,3,1,0]e_3 & -[2,4,1,0]c_1 & [1,3,1,0]e_3 & -[2,4,1,0]c_1 & -[2,4,1,0]c_1 & [2,3,1,0]e_9 & [3,4,3,0] & [1,6,0,0]b_1c_1 & -[2,6,2,0]b_1 & -\tfrac{1}{6}[3,7,2,0]a_1 & \tfrac{1}{2}[3,7,2,0] & \tfrac{1}{3}[4,7,2,0] \\
1 & [0,0,0,1]c_1 & [0,1,0,1]e_2 & q^3f_1 & -[1,1,1,1] & -[1,1,1,1] & -[1,1,1,1]b_1 & -\tfrac{1}{2}[1,3,1,1]a_1 & \tfrac{1}{2}[2,3,0,1] & -[1,3,1,1]b_1 & [2,4,1,1] & -[1,3,1,1]b_1 & [2,4,1,1] & [2,4,1,1] & -[1,3,1,1]c_5 & -[2,4,1,1] & -[2,6,1,1] & [2,6,1,1] & \tfrac{1}{6}[1,7,1,1]a_2 & -\tfrac{1}{2}[2,7,0,1] & -\tfrac{1}{3}[3,7,2,0] \\
1 & [0,0,1,0]d_1 & [1,1,2,0]c_2 & -[2,3,2,0] & qf_2 & [1,1,1,0]c_2 & [1,1,2,0]e_4 & \tfrac{1}{2}[1,3,2,0]d_5 & \tfrac{1}{2}[2,3,1,0]d_6 & [1,3,2,0]e_4 & [2,4,2,0]d_6 & -[2,3,2,0]b_2 & -[2,4,1,0]c_1 & -[2,4,1,0]c_1 & -[2,3,2,0]c_1 & [3,4,3,0] & -[2,6,3,0] & -[2,6,2,0]b_1 & -\tfrac{1}{6}[3,7,2,0]a_1 & \tfrac{1}{2}[3,7,2,0] & \tfrac{1}{3}[4,7,2,0] \\
1 & [1,0,0,0]d_1 & [1,1,2,0]c_2 & -[2,3,2,0] & [1,1,1,0]c_2 & qf_2 & [1,1,2,0]e_4 & \tfrac{1}{2}[1,3,2,0]d_5 & \tfrac{1}{2}[2,3,1,0]d_6 & -[2,3,2,0]b_2 & -[2,4,1,0]c_1 & [1,3,2,0]e_4 & [2,4,2,0]d_6 & -[2,4,1,0]c_1 & -[2,3,2,0]c_1 & [3,4,3,0] & -[2,6,3,0] & -[2,6,2,0]b_1 & -\tfrac{1}{6}[3,7,2,0]a_1 & \tfrac{1}{2}[3,7,2,0] & \tfrac{1}{3}[4,7,2,0] \\
1 & d_2 & qe_3 & -[1,3,0,0]b_1 & qe_3 & qe_3 & qg_2 & \tfrac{1}{2}[1,3,0,0]d_7 & -\tfrac{1}{2}[1,3,0,0]d_8 & [1,3,0,0]e_5 & -[1,4,0,0]d_9 & [1,3,0,0]e_5 & -[1,4,0,0]d_9 & [2,4,0,0]d_{10} & [1,3,0,0]f_4 & [2,4,0,0]b_1c_6 & -[1,6,0,0]c_7 & [1,6,0,0]e_{10} & -\tfrac{1}{6}[3,7,1,0]a_3 & -\tfrac{1}{2}[2,7,0,0]c_{12} & -\tfrac{1}{3}[3,7,1,0] \\
1 & d_3 & [1,1,0,0]d_4 & -[2,3,0,0]a_1 & [1,1,0,0]d_5 & [1,1,0,0]d_5 & [2,1,0,0]d_7 & \tfrac{1}{2}q^3e_6 & -\tfrac{1}{2}[3,3,2,0] & [1,3,0,0]e_7 & -[2,4,0,0]c_3 & [1,3,0,0]e_7 & -[2,4,0,0]c_3 & [2,4,0,0]d_{11} & -[2,3,1,0]c_3 & -[3,4,1,0]b_4 & -[1,6,0,0]b_5 & -[2,6,0,0]c_9 & \tfrac{1}{6}[2,7,0,0]c_{11} & -\tfrac{1}{2}[3,7,0,0]b_4 & \tfrac{1}{3}[4,7,1,0] \\
1 & [0,0,1,0]c_2 & -[0,1,1,0]c_1 & [1,3,1,0] & [0,1,1,0]d_6 & [0,1,1,0]d_6 & -[0,1,2,0]d_8 & -\tfrac{1}{2}[1,3,4,0] & \tfrac{1}{2}q^3e_8 & [1,3,3,0] & -[1,4,1,0] & [1,3,3,0] & -[1,4,1,0] & [2,4,2,0]b_3 & -[1,3,2,0] & -[2,4,2,0]b_3 & [1,6,1,0] & -[1,6,2,0]b_6 & -\tfrac{1}{6}[3,7,2,0] & \tfrac{1}{2}[1,7,1,0]c_{13} & -\tfrac{1}{3}[3,7,2,0] \\
1 & d_2 & qe_3 & -[1,3,0,0]b_1 & qe_4 & -[1,1,0,0]b_2 & [1,1,0,0]e_5 & \tfrac{1}{2}q^3e_7 & \tfrac{1}{2}[2,3,1,0] & q^3f_3 & -[1,4,0,0]d_9 & -[1,3,1,0]c_4 & [2,4,2,0] & -[1,4,0,0]d_9 & [1,3,0,0]c_3 & -[2,4,0,0]a_1 & -[1,6,0,0]b_4 & [1,6,0,0]b_7 & -\tfrac{1}{6}[2,7,0,0]b_8 & \tfrac{1}{2}[2,7,0,0]b_1 & -\tfrac{1}{3}[3,7,1,0] \\
1 & [0,0,1,0]c_2 & -[0,1,1,0]c_1 & [1,3,1,0] & [0,1,1,0]d_6 & -qc_1 & -[0,1,1,0]d_9 & -\tfrac{1}{2}[0,3,1,0]c_3 & -\tfrac{1}{2}[1,3,0,0] & -[0,3,1,0]d_9 & q^4d_8 & [1,3,3,0] & -[1,4,1,0] & -[1,4,1,0] & -[1,3,2,0] & [1,4,1,0] & [1,6,1,0] & -[1,6,1,0] & \tfrac{1}{6}[2,7,1,0] & -\tfrac{1}{2}[2,7,1,0] & \tfrac{1}{3}[2,7,1,0] \\
1 & d_2 & qe_3 & -[1,3,0,0]b_1 & -[1,1,0,0]b_2 & qe_4 & [1,1,0,0]e_5 & \tfrac{1}{2}q^3e_7 & \tfrac{1}{2}[2,3,1,0] & -[1,3,1,0]c_4 & [2,4,2,0] & q^3f_3 & -[1,4,0,0]d_9 & -[1,4,0,0]d_9 & [1,3,0,0]c_3 & -[2,4,0,0]a_1 & -[1,6,0,0]b_4 & [1,6,0,0]b_7 & -\tfrac{1}{6}[2,7,0,0]b_8 & \tfrac{1}{2}[2,7,0,0]b_1 & -\tfrac{1}{3}[3,7,1,0] \\
1 & [0,0,1,0]c_2 & -[0,1,1,0]c_1 & [1,3,1,0] & -qc_1 & [0,1,1,0]d_6 & -[0,1,1,0]d_9 & -\tfrac{1}{2}[0,3,1,0]c_3 & -\tfrac{1}{2}[1,3,0,0] & [1,3,3,0] & -[1,4,1,0] & -[0,3,1,0]d_9 & q^4d_8 & -[1,4,1,0] & -[1,3,2,0] & [1,4,1,0] & [1,6,1,0] & -[1,6,1,0] & \tfrac{1}{6}[2,7,1,0] & -\tfrac{1}{2}[2,7,1,0] & \tfrac{1}{3}[2,7,1,0] \\
1 & [0,0,1,0]c_2 & -[0,1,1,0]c_1 & [1,3,1,0] & -qc_1 & -qc_1 & [1,1,1,0]d_{10} & \tfrac{1}{2}0,3,1,0]d_{11} & \tfrac{1}{2}[2,3,1,0]b_3 & -[0,3,1,0]d_9 & -[1,4,1,0] & -[0,3,1,0]d_9 & -[1,4,1,0] & q^4d_8 & -[1,3,2,0] & [1,4,1,0] & [1,6,1,0] & -[1,6,1,0] & \tfrac{1}{6}[2,7,1,0] & -\tfrac{1}{2}[2,7,1,0] & \tfrac{1}{3}[2,7,1,0] \\
1 & [0,0,1,0]c_2 & qe_9 & -q^3c_5 & -qc_1 & -qc_1 & qf_4 & -\tfrac{1}{2}[0,3,1,0]c_3 & -\tfrac{1}{2}[1,3,0,0] & q^3c_3 & -[1,4,1,0] & q^3c_3 & -[1,4,1,0] & -[1,4,1,0] & q^3f_5 & -[1,4,0,0]b_1b_3 & -[1,6,0,0]b_1 & -[1,6,0,0]c_{12} & \tfrac{1}{6}[1,7,0,0]a_1a_2 & \tfrac{1}{2}[1,7,0,0] & \tfrac{1}{3}[2,7,1,0] \\
1 & -b_2 & [0,1,2,0] & -q^3 & [0,1,1,0] & [0,1,1,0] & qb_1c_6 & -\tfrac{1}{2}[0,3,1,0]b_4 & -\tfrac{1}{2}[1,3,0,0]b_3 & -q^3a_1 & q^4 & -q^3a_1 & q^4 & q^4 & -q^3b_1b_3 & q^4e_{11} & [1,6,0,0] & -[1,6,0,0]b_3 & \tfrac{1}{6}[1,7,0,0]a_2 & \tfrac{1}{2}[1,7,0,0] & -\tfrac{1}{3}[1,7,1,0] \\
1 & d_5 & qb_1c_1 & -[2,3,1,0] & -[1,1,2,0] & -[1,1,2,0] & -[1,1,1,0]c_7 & -\tfrac{1}{2}[0,3,1,0]b_5 & \tfrac{1}{2}[2,3,0,0] & -[1,3,1,0]b_4 & [2,4,1,0] & -[1,3,1,0]b_4 & [2,4,1,0] & [2,4,1,0] & -[2,3,1,0]b_1 & [3,4,1,0] & q^6b_9 & [1,6,1,0]a_4 & -\tfrac{1}{2}[1,7,1,0] & -\tfrac{1}{2}[2,7,0,0] & 0 \\
1 & c_8 & -[0,1,1,0]b_1 & [1,3,0,0] & -qb_1 & -qb_1 & qe_{10} & -\tfrac{1}{2}q^3c_9 & -\tfrac{1}{2}[1,3,0,0]b_6 & q^3b_7 & -[1,4,0,0] & q^3b_7 & -[1,4,0,0] & -[1,4,0,0] & -[1,3,0,0]c_{12} & -[2,4,0,0]b_3 & q^6a_4 & q^6b_{10} & -\tfrac{1}{2}[1,7,0,0] & \tfrac{1}{2}[1,7,0,0] & 0 \\
1 & c_{10} & -[1,1,1,0]a_1 & q^3a_2 & -[1,1,0,0]a_1 & -[1,1,0,0]a_1 & -[2,1,1,0]a_3 & \tfrac{1}{2}q^3c_{11} & -\tfrac{1}{2}[3,3,0,0] & -[1,3,0,0]b_8 & [2,4,0,0] & -[1,3,0,0]b_8 & [2,4,0,0] & [2,4,0,0] & [1,3,0,0]a_1a_2 & [2,4,0,0]a_2 & -3q^6 & -3[1,6,0,0] & q^7 & 0 & 0 \\
1 & -b_2 & [0,1,2,0] & -q^3 & [0,1,1,0] & [0,1,1,0] & -[0,1,1,0]c_{12} & -\tfrac{1}{2}[0,3,1,0]b_4 & \tfrac{1}{2}q^3c_{13} & [0,3,1,0]b_1 & -[1,4,1,0] & [0,3,1,0]b_1 & -[1,4,1,0] & -[1,4,1,0] & [0,3,1,0] & [1,4,1,0] & -q^6 & [0,6,1,0] & 0 & -q^7 & 0 \\
1 & -[0,0,1,1] & [0,1,1,1] & -[0,3,1,0] & [0,1,0,1] & [0,1,0,1] & -[0,1,1,1] & \tfrac{1}{2}[0,3,1,1] & -\tfrac{1}{2}[1,3,0,1] & -[0,3,1,1] & [0,4,0,1] & -[0,3,1,1] & [0,4,0,1] & [0,4,0,1] & [0,3,1,1] & -[0,4,1,1] & 0 & 0 & 0 & 0 & q^7
\end{array}\right)
$$

ただし, $[a,b,c,d]=(q-1)^a q^b (q+1)^c (q^2+q+1)^d$ とし,

$$
\begin{array}{lll}
a_1 = 2q+1 & c_1 = q^3-q-1 & e_1 = 2q^5+2q^4-2q^2-2q-1 \\
a_2 = 2q-1 & c_2 = q^3-q^2-q-1 & e_2 = q^5-q^3-q^2+q+1 \\
a_3 = 3q+1 & c_3 = 2q^3-2q-1 & e_3 = q^5-2q^4-2q^3+q^2+2q+1 \\
a_4 = q-2 & c_4 = 2q^3-q^2-2q-1 & e_4 = q^5-2q^3+q+1 \\
b_1 = q^2-q-1 & c_5 = q^3-q^2+1 & e_5 = q^5-2q^4-q^3+3q^2+3q+1 \\
b_2 = 2q^2+2q+1 & c_6 = q^3+q+1 & e_6 = 5q^5-7q^4-4q^3+4q^2+3q+1 \\
b_3 = q^2+1 & c_7 = q^3+q^2-2q-1 & e_7 = 2q^5-4q^4-3q^3+3q^2+3q+1 \\
b_4 = q^2-2q-1 & c_8 = q^3-2q^2-2q-1 & e_8 = q^5+q^4-q+1 \\
b_5 = 2q^2-3q-1 & c_9 = q^3-4q-1 & e_9 = q^5-q^4-q^3+q^2+2q+1 \\
b_6 = q^2-q+1 & c_{10} = 2q^3-2q^2-2q-1 & e_{10} = q^5-2q^4+q^3+2q^2-2q-1 \\
b_7 = 2q^2-2q-1 & c_{11} = q^3-q^2+5q+1 & e_{11} = q^5-q^4+q^3-q^2-1 \\
b_8 = q^2-3q-1 & c_{12} = q^3-q^2+q+1 & f_1 = q^6-q^5-q^4+q^2-1 \\
b_9 = q^2-2 & c_{13} = q^3+q^2-q+1 & f_2 = q^6+q^5-q^4-2q^3+q+1 \\
b_{10} = q^2-2q+2 & d_1 = q^4+q^3-q^2-q-1 & f_3 = q^6-3q^5+4q^3-2q-1 \\
 & d_2 = 2q^4-2q^2-2q-1 & f_4 = q^6-q^5+2q^3-2q-1 \\
 & d_3 = 3q^4-2q^2-2q-1 & f_5 = q^6-2q^5+q^4-q^2+q+1 \\
 & d_4 = 2q^4-q^3-4q^2-3q-1 & g_1 = q^7+q^6-3q^4-2q^3+q^2+2q+1 \\
 & d_5 = q^4+q^3-2q^2-2q-1 & g_2 = q^7-4q^5+q^4+4q^3-2q-1 \\
 & d_6 = q^4-q^3+1 & \\
 & d_7 = q^4-4q^3-7q^2-4q-1 & \\
 & d_8 = q^4-q^2+1 & \\
 & d_9 = q^4-q^3-q^2+q+1 & \\
 & d_{10} = q^4+q^2+2q+1 & \\
 & d_{11} = q^4-2q^3+2q+1 &
\end{array}
$$

とする.

2.2　3 次 Hermite 行列の対の空間

$V=\mathbb{F}_q^2\otimes \mathrm{H}_3(\mathbb{F}_{q^2}), G=\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)\times \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_{q^2})$ とする. V の元 x を 3 次 Hermite 行列の対

$$(A,B)=(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \overline{a_{12}} & a_{22} & a_{23} \\ \overline{a_{13}} & \overline{a_{23}} & a_{33}\end{bmatrix},\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ \overline{b_{12}} & b_{22} & b_{23} \\ \overline{b_{13}} & \overline{b_{23}} & b_{33}\end{bmatrix})$$

と表すことにする. また, G の元 g を (g_1,g_2) と書く. ここで $1\le i\le j\le 3$ に対し, $a_{ii},b_{ii}\in\mathbb{F}_q$, $a_{ij},b_{ij}\in\mathbb{F}_{q^2}\ (i\neq j)$ とする. また, $c\in\mathbb{F}_{q^2}$ に対し $\overline{c}\in\mathbb{F}_{q^2}$ は c の $\mathbb{F}_q$ 上の共役である. G は V に

$$gx=(g_2A{}^tg_2, g_2B{}^tg_2)^tg_1$$

で作用している. この作用による軌道は 15 個になる. 以下の $x_1,\dots,x_{15}$ はその代表元である:

$$x_1=(0,0), x_2=(\begin{bmatrix}1 & & \\ & 0 & \\ & & 0\end{bmatrix},0), x_3=(\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 0\end{bmatrix},0), x_4=(\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix},0),$$

$$x_5=(\begin{bmatrix}1&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}&1&\\1&&\\&&0\end{bmatrix}),x_6=(\begin{bmatrix}1&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix}),x_7=(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}&-1&\\\mu_0&\mu_1&\\&&0\end{bmatrix}),$$

$$x_8=(\begin{bmatrix}&1&\\1&&\\&&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}&&1\\&0&\\1&&\end{bmatrix}),x_9=(\begin{bmatrix}&&1\\&1&\\1&&\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&&\\&0&\\&&1\end{bmatrix}),x_{10}=(\begin{bmatrix}&&1\\&1&\\1&&\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&&\\&&1\\&1&\end{bmatrix}),$$

$$x_{11}=(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&&\\&0&\\&&1\end{bmatrix}),x_{12}=(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&&\\&&1\\&1&\end{bmatrix}),x_{13}=(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}),$$

$$x_{14}=(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}&-1&\\\mu_0&\mu_1&\\&&1\end{bmatrix}),x_{15}=(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}&-1&\\&\nu_2&-1\\\nu_0&\nu_1&\end{bmatrix}).$$

ただし, $\mu_0,\mu_1,\nu_0,\nu_1,\nu_2\in\mathbb{F}_q$ は $X^2+\mu_1X+\mu_0, X^3+\nu_2X^2+\nu_1X+\nu_0\in\mathbb{F}_q[X]$ が既約になるようなものとする.

選んだ部分空間は次のとおりである:

$$W_1=(0,0),W_2=(\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&\ast\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&\ast\end{bmatrix}),W_3=(0,\begin{bmatrix}0&0&\ast\\0&0&\ast\\\ast&\ast&\ast\end{bmatrix}),$$

$$W_4=(0,\begin{bmatrix}\ast&\ast&\ast\\\ast&\ast&\ast\\\ast&\ast&\ast\end{bmatrix}),W_5=(\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&\ast\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&\ast\\0&0&\ast\\\ast&\ast&\ast\end{bmatrix}),W_6=(\begin{bmatrix}0&0&0\\0&\ast&\ast\\0&\ast&\ast\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&\ast&\ast\\0&\ast&\ast\end{bmatrix})$$

$$W_7=(\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&\ast\\0&\ast&\ast\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&\ast\\0&\ast&\ast\end{bmatrix}),W_8=(\begin{bmatrix}0&0&\ast\\0&0&\ast\\\ast&\ast&\ast\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&\ast\\0&0&\ast\\\ast&\ast&\ast\end{bmatrix}),W_9=(\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&\ast\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&\ast\\0&\ast&\ast\\\ast&\ast&\ast\end{bmatrix}),$$

$$W_{10}=(\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&\ast\\0&\ast&\ast\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&\ast\\0&\ast&\ast\\\ast&\ast&\ast\end{bmatrix}),W_{11}=(\begin{bmatrix}\ast&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&\ast&\ast\\\ast&\ast&\ast\\\ast&\ast&\ast\end{bmatrix}),W_{12}=(\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&\ast\\0&\ast&\ast\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&\ast&\ast\\\ast&\ast&\ast\\\ast&\ast&\ast\end{bmatrix}),$$

$$W_{13}=(\begin{bmatrix}0&0&0\\0&\ast&\ast\\0&\ast&\ast\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\ast&\ast&\ast\\\ast&\ast&\ast\\\ast&\ast&\ast\end{bmatrix}),W_{14}=(\begin{bmatrix}0&0&\ast\\0&\ast&\ast\\\ast&\ast&\ast\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&\ast\\0&\ast&\ast\\\ast&\ast&\ast\end{bmatrix}),W_{15}=V.$$

定理 5. 各軌道と各部分空間の共通部分は 23 ページの表 2 のとおりである. ここで, $1\le i\le 15$ に対して, $\mathcal{O}_i=Gx_i$ とする. また, $[a,b,c,d,e,f]=(q-1)^aq^b(q+1)^c(q^2-q+1)^d(q^2+1)^e(q^2+q+1)^f$ とし,

$$\begin{array}{lll}
b_1=q^2+2 & c_1=q^3+2q^2+1 & d_1=q^4+q^3+q^2+q+1\\
b_2=2q^2+q+1 & c_2=q^3+3q^2+q+1 & d_2=q^4+q^2+q+1\\
b_3=2q^2+1 & c_3=q^3+q^2+1 & f_1=q^5+q^4+q^3+3q^2+q+1\\
b_4=3q^2+1 & &
\end{array}$$

とする.

この結果と命題 3 より Fourier 変換の明示公式が求められる. 結果は省略する.

2.3 6 次交代行列の対の空間

$V=\mathbb{F}_q^2\otimes\wedge^2(\mathbb{F}_q^6), G=\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)\times\mathrm{GL}_6(\mathbb{F}_q)$ とする. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ の $\mathbb{F}_q^n$ への標準的な作用を ρ_n とし, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ の $\wedge^2(\mathbb{F}_q^n)$ への作用 ρ'_n を $\rho'(g)(x\wedge y):=\rho(g)x\wedge\rho(g)y$ で与える. このとき, G の V への作用は $\rho_2\otimes\rho'_6$ となる. この作用による軌道は 18 個になる. 以下の $x_1,...,x_{18}$ はその

代表元である. $\mathbb{F}_q^2$ の基底を u_1, u_2 とし, $\mathbb{F}_q^6$ の基底を $v_1, ..., v_6$ とするとき, $u_l \otimes (v_m \wedge v_n)$ $(1 \le l \le 2, 1 \le n < m \le 6)$ は V の基底をなす. ここでは簡単に $u_l \otimes (v_m \wedge v_n) = lmn$ と書くことにする.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \{0\},\\
x_2 &= 112,\\
x_3 &= 112 + 134,\\
x_4 &= 112 + 134 + 156,\\
x_5 &= 112 + 213,\\
x_6 &= 112 + 214 + 223,\\
x_7 &= 112 + 234,\\
x_8 &= 112 + 134 + 214 + \mu_0 223 + \mu_1 234,\\
x_9 &= 112 + 215 + 234,\\
x_{10} &= 112 + 134 + 215 + 223,\\
x_{11} &= 114 + 123 + 216 + 225,\\
x_{12} &= 112 + 216 + 225 + 234,\\
x_{13} &= 114 + 123 + 216 + 225 + 234,\\
x_{14} &= 112 + 236 + 245,\\
x_{15} &= 112 + 134 + 236 + 245,\\
x_{16} &= 112 + 134 + 234 + 256,\\
x_{17} &= 112 + 134 + 214 + \mu_0 223 + \mu_1 234 + 256,\\
x_{18} &= 112 + 134 + 156 + \nu_2 212 + 216 + 223 + \nu_1 225 + \nu_0 245.
\end{aligned}
$$

ただし, $\mu_0, \mu_1, \nu_0, \nu_1, \nu_2 \in \mathbb{F}_q$ は $X^2 + \mu_1 X + \mu_0, X^3 + \nu_2 X^2 + \nu_1 X + \nu_0 \in \mathbb{F}_q[X]$ が既約になるようなものとする.

選んだ部分空間は次のとおりである. ここで, V 上の双線型形式 β を

$$
\beta(\sum_{l,m,n} a_{lmn} u_l \otimes (v_m \wedge v_n), \sum_{l,m,n} b_{lmn} u_l \otimes (v_m \wedge v_n)) = \sum_{l,m,n} a_{lmn} b_{lmn}
$$

で定める. V の任意の部分空間 W について, その β に関する直交補空間を $W^\perp$ と書く.

$$
\begin{aligned}
&W_1 = \{0\},\\
&W_2 = \langle 112, 113, 114, 115, 116\rangle_{\mathbb{F}_q},\\
&W_3 = \langle 123, 124, 125, 126, 134, 135, 136, 145, 146, 156\rangle_{\mathbb{F}_q},\\
&W_4 = \langle 112, 113, 114, 115, 116, 123, 124, 125, 126, 134, 135, 136, 145, 146, 156\rangle_{\mathbb{F}_q},\\
&W_5 = \langle 112, 113, 114, 115, 116, 212, 213, 214, 215, 216\rangle_{\mathbb{F}_q},\\
&W_6 = \langle 112, 113, 114, 115, 116, 123, 124, 125, 126, 212\rangle_{\mathbb{F}_q},\\
&W_7 = \langle 112, 113, 114, 115, 116, 212, 223, 224, 225, 226\rangle_{\mathbb{F}_q},\\
&W_8 = \langle 134, 135, 136, 145, 146, 156, 234, 235, 236, 245, 246, 256\rangle_{\mathbb{F}_q},\\
&W_9 = \langle 112, 113, 114, 115, 116, 212, 213, 214, 215, 216, 223, 224, 225, 226\rangle_{\mathbb{F}_q},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&W_{10} = W_5^{\perp},\\
&W_{11} = W_8^{\perp},\\
&W_{12} = \langle 114, 115, 116, 124, 125, 126, 134, 135, 136, 145, 146, 156, 245, 246, 256\rangle_{\mathbb{F}_q},\\
&W_{13} = \langle 112, 113, 114, 123, 124, 212, 213, 214, 215, 216, 223, 224, 225, 226, 234\rangle_{\mathbb{F}_q},\\
&W_{14} = W_3^{\perp},\\
&W_{15} = W_6^{\perp},\\
&W_{16} = W_7^{\perp},\\
&W_{17} = W_2^{\perp},\\
&W_{18} = V.
\end{aligned}
$$

定理 6. 各軌道と各部分空間の共通部分は 24 ページの表 3 のとおりである．ここで, $1 \leq i \leq 18$ に対して, $\mathcal{O}_i = Gx_i$ とする．また, $[a, b, c, d, e, f, g] = (q-1)^a q^b (q+1)^c (q^2+q+1)^d (q^2+1)^e (q^2+q+1)^f (q^2-q+1)^g$ とし,

$$
\begin{aligned}
&a_1 = q+2, && c_1 = 2q^3+2q+1, && d_1 = 2q^4+q^3+2q^2+q+1,\\
&a_2 = 2q+1, && c_2 = q^3+q^2+1, && d_2 = q^4+q^3+2q^2+2q+1,\\
&b_1 = 2q^2+2q+1, && c_3 = 2q^3+5q^2+3q+1, && d_3 = q^4+2q^3+3q^2+q+1,\\
&b_2 = 2q^2+4q+1, && c_4 = q^3+2q^2+q+1, && d_4 = 3q^4+8q^3+10q^2+4q+1,\\
&b_3 = 2q^2+3q+2, && c_5 = 2q^3+q^2+q+1, && d_5 = q^4+q^2+q+1,\\
&b_4 = 2q^2+q+1, && c_6 = q^3+q+1, && e_1 = q^5+4q^4+4q^3+3q^2+2q+1,\\
&b_5 = q^2+2, && && e_2 = 2q^5+4q^4+4q^3+5q^2+3q+1,\\
& && && e_3 = q^5+5q^4+6q^3+6q^2+3q+1,\\
& && && e_4 = q^5+2q^4+3q^3+4q^2+2q+1
\end{aligned}
$$

とする．

この結果と命題 3 より Fourier 変換の明示公式が求められる．結果は省略する．

参考文献

[1] T. Taniguchi and T. Frank, Secondary terms in counting functions for cubic fields, Duke Math. J. **162** (2013), no. 13, 2451–2508.

[2] T. Taniguchi and T. Frank, Orbital exponential sums for prehomogeneous vector spaces, preprint, 2016, arXiv:1607.07827.

[3] D. J. Wright and A. Yukie, Prehomogeneous vector spaces and field extensions, Invent. Math. **110** (1992), no. 2, 283–314.

表 1:

	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6	W_7	W_8	W_9	W_{10}	W_{11}	W_{12}
$\mathcal{O}_1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\mathcal{O}_2$	0	$[1,0,0,1]$	$[1,0,1,1]$	$[1,0,0,2]$	$[1,0,1,1]$	$[1,0,1,1]$	$[1,0,1,0]a_1$	$2[1,0,0,1]$	$[1,0,3,0]$	$[1,0,0,1]a_1$	$[1,0,2,1]$	$[1,0,0,1]a_1$
$\mathcal{O}_3$	0	0	$[2,1,1,1]$	$[2,1,1,2]$	0	0	$[2,1,2,0]$	0	$[2,1,2,0]$	$[2,1,1,1]$	$[2,1,2,1]$	$[2,1,1,1]$
$\mathcal{O}_4$	0	0	0	$[3,3,1,1]$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\mathcal{O}_5$	0	0	0	0	$[2,1,1,1]$	0	$[2,1,1,0]$	0	$[2,1,2,0]$	$[2,1,1,1]$	$[2,1,2,1]$	$[2,1,0,1]$
$\mathcal{O}_6$	0	0	0	0	0	$[2,1,1,1]$	$[2,1,1,0]$	$[2,0,0,1]$	$[2,1,2,0]$	$[2,1,0,1]$	$[2,1,1,1]$	$[2,1,1,1]$
$\mathcal{O}_7$	0	0	0	0	0	0	$[3,1,2,0]$	0	$[3,1,3,0]$	$[3,1,1,1]$	$[3,1,3,1]$	$[3,1,1,1]$
$\mathcal{O}_8$	0	0	0	0	0	0	0	$[2,1,1,1]$	$\frac{1}{2}[2,3,3,0]$	$[2,3,1,1]$	$\frac{1}{2}[2,3,3,1]$	$[2,3,1,1]$
$\mathcal{O}_9$	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}[4,3,1,0]$	0	$\frac{1}{2}[4,3,1,1]$	0
$\mathcal{O}_{10}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$[3,3,1,1]$	$[3,3,3,1]$	0
$\mathcal{O}_{11}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$[4,4,2,1]$	0
$\mathcal{O}_{12}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$[3,3,1,1]$
$\mathcal{O}_{13}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\mathcal{O}_{14}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\mathcal{O}_{15}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\mathcal{O}_{16}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\mathcal{O}_{17}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\mathcal{O}_{18}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\mathcal{O}_{19}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\mathcal{O}_{20}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\mathcal{O}_{21}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

W_{13}	W_{14}	W_{15}	W_{16}	W_{17}	W_{18}	W_{19}	W_{20}	W_{21}	$W_7^{\perp}$	$W_{15}^{\perp}$	$W_{18}^{\perp}$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$[1,0,2,1]$	$[1,0,1,0]b_1$	$[1,0,0,0]b_2$	$[1,0,0,0]b_3$	$[1,0,2,1]$	$[1,0,0,0]c_1$	$[1,0,0,1]a_2$	$[1,0,0,1]b_1$	$[1,0,1,2]$	$[1,0,1,0]b_9$	$[1,0,0,0]c_1$	$[1,0,0,0]b_2$
$[2,1,2,1]$	$[2,1,3,0]$	$[2,1,0,0]b_4$	$[2,1,1,0]a_2$	$[2,1,1,2]$	$[2,1,0,0]a_1^2$	$2[2,1,1,1]$	$[2,1,3,1]$	$[2,1,2,2]$	$[2,1,4,0]$	$[2,1,0,0]c_3$	$[2,1,0,0]b_5$
0	0	$[3,3,0,0]$	$[3,3,0,0]$	$[3,3,1,1]$	$[3,3,0,0]$	0	$[3,3,1,1]$	$[3,3,2,1]$	$[3,3,2,0]$	$[3,3,1,0]$	0
$[2,1,1,1]$	$[2,1,1,1]$	$[2,1,2,0]$	$[2,1,0,0]b_5$	$[2,1,1,1]$	$[2,1,0,0]c_2$	$[2,1,1,1]$	$[2,1,2,1]$	$[2,1,1,2]$	$[2,1,3,0]$	$[2,1,1,0]a_1$	$[2,1,0,0]b_5$
$[2,1,2,1]$	$[2,1,1,1]$	$[2,1,0,0]a_1$	$[2,1,0,0]b_5$	$[2,1,1,1]$	$[2,1,0,0]b_5$	$[2,1,0,1]a_3$	$[2,1,2,1]$	$[2,1,1,2]$	$[2,1,3,0]$	$[2,1,0,0]b_5$	$[2,1,0,0]a_1$
$[3,1,3,1]$	$[3,1,3,0]$	$[3,1,1,0]a_1$	$[3,1,1,0]a_4$	$[3,1,2,1]$	$[3,1,0,0]b_6$	$2[3,1,1,1]$	$[3,1,2,1]a_1$	$[3,1,3,2]$	$[3,1,2,0]b_5$	$[3,1,1,0]b_8$	$[3,1,0,0]b_{12}$
$\frac{1}{2}[2,3,3,1]$	$[2,3,3,0]$	$[2,3,0,0]a_1$	$\frac{1}{2}[2,3,0,0]b_7$	$[2,3,2,1]$	$\frac{1}{2}[2,3,1,0]a_5$	$3[2,3,1,1]$	$\frac{1}{2}[2,3,2,1]a_2$	$\frac{1}{2}[2,3,3,2]$	$\frac{1}{2}[2,3,2,0]a_6$	$\frac{1}{2}[2,3,0,0]b_{10}$	$\frac{1}{2}[2,3,0,0]b_{13}$
$\frac{1}{2}[4,3,1,1]$	0	0	$\frac{1}{2}[4,3,0,0]$	0	$\frac{1}{2}[4,3,0,0]$	0	$\frac{1}{2}[4,3,1,1]$	$\frac{1}{2}[4,3,1,2]$	$\frac{1}{2}[4,3,1,0]$	$\frac{1}{2}[4,3,0,0]$	$\frac{1}{2}[4,3,0,0]$
0	$[3,3,3,0]$	$[3,3,0,0]a_1$	$[3,3,0,0]a_4$	$[3,3,2,1]$	$[3,3,1,0]a_4$	$2[3,3,1,1]$	$[3,3,2,1]a_1$	$[3,3,3,2]$	$[3,3,2,0]a_2$	$[3,3,0,0]b_{11}$	$[3,3,0,0]a_2$
0	0	0	$[4,4,0,0]$	0	$[4,4,1,0]$	0	$[4,4,2,1]$	$[4,4,2,2]$	$[4,4,2,0]$	$[4,4,1,0]$	$[4,4,0,0]$
$[3,3,3,1]$	$[3,3,3,0]$	$[3,3,1,0]$	$[3,3,0,0]a_4$	$[3,3,2,1]$	$[3,3,0,0]b_8$	$[3,2,1,1]a_2$	$[3,3,2,1]a_1$	$[3,3,3,2]$	$[3,3,2,0]a_2$	$[3,3,0,0]b_8$	0
$[4,4,2,1]$	0	0	$[4,4,0,0]$	0	$[4,4,0,0]$	$[4,3,1,1]$	$[4,4,2,1]$	$[4,4,2,2]$	$[4,4,2,0]$	$[4,4,0,0]$	0
0	$[4,4,2,0]$	0	$[4,4,0,0]$	0	$[4,4,1,0]$	$[4,3,1,1]$	$[4,4,2,1]$	$[4,4,2,2]$	$[4,4,2,0]$	$[4,4,0,0]$	0
0	0	$[4,3,1,0]$	$[4,3,0,0]a_1$	$[4,3,2,1]$	$[4,3,0,0]a_1$	0	$[4,3,3,1]$	$[4,3,3,2]$	$[4,3,2,0]a_1$	$[4,3,0,0]b_5$	0
0	0	0	$[5,4,0,0]$	0	$[5,4,0,0]$	0	$[5,4,2,1]$	$[5,4,3,2]$	$[5,4,2,0]$	$[5,4,0,0]$	0
0	0	0	0	$[3,6,1,1]$	$[3,6,0,0]$	$2[3,4,1,1]$	$[3,6,1,1]a_3$	$[3,6,2,2]$	$[3,6,2,0]$	$[3,6,0,0]$	0
0	0	0	0	0	$[4,6,0,0]$	$2[4,4,1,1]$	$2[4,6,2,1]$	$[4,6,3,2]$	$[4,6,2,0]$	$[4,6,0,0]$	0
0	0	0	0	0	0	$[4,5,1,1]$	$\frac{1}{2}[4,7,2,1]$	$\frac{1}{6}[4,7,3,2]$	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}[5,7,1,1]$	$\frac{1}{2}[5,7,2,2]$	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{3}[6,7,3,1]$	0	0	0

表 2:

	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6	W_7	W_8	W_9
$\mathcal{O}_1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\mathcal{O}_2$	0	$[1,0,1,0,0,0]$	$[1,0,0,0,0,0]$	$[1,0,0,1,0,1]$	$[1,0,1,0,0,0]$	$[1,0,1,0,1,0]$	$[1,0,1,0,0,0]$	$[1,0,1,0,0,0]$	$[1,0,0,0,0,1]$
$\mathcal{O}_3$	0	0	$[1,1,1,0,1,0]$	$[1,1,0,1,1,1]$	$[1,1,1,0,1,0]$	$[1,1,1,0,1,0]$	$[1,1,2,0,0,0]$	$[1,1,2,0,1,0]$	$[1,1,0,0,0,0]c_1$
$\mathcal{O}_4$	0	0	0	$[2,3,0,0,1,1]$	0	0	0	0	$[2,3,1,0,0,0]$
$\mathcal{O}_5$	0	0	0	0	$[2,1,1,0,1,0]$	$[2,1,2,0,1,0]$	$[2,1,2,0,0,0]$	$[2,1,2,0,1,0]$	$[2,1,1,0,1,0]$
$\mathcal{O}_6$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}[2,3,1,0,1,0]$	0	0	$[2,3,0,0,0,0]$
$\mathcal{O}_7$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}[2,3,1,0,1,0]$	$[2,3,1,0,0,0]$	$[2,3,1,0,1,0]$	0
$\mathcal{O}_8$	0	0	0	0	0	0	0	$[2,4,2,0,1,0]$	0
$\mathcal{O}_9$	0	0	0	0	0	0	0	0	$[3,3,1,0,0,0]$
$\mathcal{O}_{10}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\mathcal{O}_{11}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\mathcal{O}_{12}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\mathcal{O}_{13}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\mathcal{O}_{14}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\mathcal{O}_{15}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0

W_{10}	W_{11}	W_{12}	W_{13}	W_{14}	W_{15}	$W_2^{\perp}$	$W_5^{\perp}$
1	1	1	1	1	1	1	1
$[1,0,0,0,0,1]$	$[1,0,0,0,0,0]b_1$	$[1,0,0,0,0,1]$	$[1,0,0,0,0,0]d_1$	$[1,0,1,0,1,0]$	$[1,0,1,1,0,1]$	$[1,0,1,0,1,0]$	$[1,0,1,0,1,0]$
$[1,1,0,0,0,0]c_2$	$[1,1,0,0,1,0]c_3$	$[1,1,0,0,0,0]f_1$	$[1,1,0,0,1,0]d_2$	$[1,1,1,0,0,0]c_1$	$[1,1,1,1,1,1]$	$[1,1,1,0,1,0]c_3$	$[1,1,1,0,2,0]$
$[2,3,1,0,0,0]$	$[2,3,1,0,1,0]$	$[2,3,1,0,1,0]$	$[2,3,0,0,1,1]$	$[2,3,2,0,0,0]$	$[2,3,1,0,1,1]$	$[2,3,2,0,1,0]$	$[2,3,1,0,1,0]$
$[2,1,1,0,0,0]b_2$	$[2,0,1,0,1,0]$	$[2,1,1,0,0,0]b_2$	$[2,1,1,0,1,1]$	$[2,1,2,0,0,0]b_3$	$[2,1,2,1,1,1]$	$[2,1,2,0,2,0]$	$[2,1,1,0,1,1]$
$\frac{1}{2}[2,3,0,0,1,0]$	$[2,2,0,0,1,0]$	$\frac{1}{2}[2,3,0,0,1,0]$	$\frac{1}{2}[2,3,0,0,1,0]b_2$	$\frac{1}{2}[2,3,1,0,1,0]$	$\frac{1}{2}[2,3,1,1,1,1]$	$\frac{1}{2}[2,3,1,0,1,0]$	$\frac{1}{2}[2,3,1,0,1,0]$
$\frac{1}{2}[2,3,2,0,0,0]$	0	$\frac{1}{2}[2,3,2,0,0,0]$	$\frac{1}{2}[2,3,1,0,1,0]$	$\frac{1}{2}[2,3,1,0,0,0]b_4$	$\frac{1}{2}[2,3,1,1,1,1]$	$\frac{1}{2}[2,3,1,0,1,0]b_3$	$\frac{1}{2}[2,3,1,0,1,0]$
$[2,4,2,0,0,0]$	0	$[2,4,3,0,0,0]$	$[2,4,2,0,1,0]$	$[2,4,2,0,1,0]$	$[2,4,2,1,1,1]$	$[2,4,2,0,1,0,]b_3$	$[2,4,2,0,1,0]$
$[3,3,1,0,0,0]$	$[3,2,1,0,1,0]$	$[3,3,1,0,0,0]$	$[3,3,1,0,2,0]$	$[3,3,2,0,0,0]$	$[3,3,2,1,1,1]$	$[3,3,2,0,1,0]$	$[3,3,1,0,1,0]$
$[3,4,2,0,0,0]$	0	$[3,4,3,0,0,0]$	$[3,4,2,0,1,0]$	$[3,4,3,0,0,0]$	$[3,4,3,1,1,1]$	$[3,4,3,0,2,0]$	$[3,4,2,0,1,0]$
0	$[2,5,0,0,1,0]$	$[2,6,1,0,0,0]$	$[2,6,0,0,1,0]b_1$	$[2,6,2,0,0,0]$	$[2,6,1,1,1,1]$	$[2,6,2,0,1,0]$	$[2,6,1,0,1,0]$
0	0	$[3,6,2,0,0,0]$	$2[3,6,1,0,1,0]$	$[3,6,2,0,0,0]$	$[3,6,2,1,1,1]$	$[3,6,2,0,1,1]$	$[3,6,1,0,1,0]$
0	0	0	$\frac{1}{2}[4,7,0,0,1,0]$	0	$\frac{1}{6}[4,7,1,1,1,1]$	$\frac{1}{6}[4,7,3,0,1,0]$	0
0	0	0	$\frac{1}{2}[3,7,1,0,1,0]$	$[3,7,2,0,0,0]$	$\frac{1}{2}[3,7,2,1,1,1]$	$\frac{1}{2}[3,7,2,0,2,0]$	0
0	0	0	0	0	$\frac{1}{3}[4,7,3,0,1,1]$	$\frac{1}{3}[4,7,3,0,1,0]$	0

表 3:

	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6	W_7	W_8	W_9	W_{10}
$\mathcal{O}_1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\mathcal{O}_2$	0	$[1,0,0,0,0,1,0]$	$[1,0,0,0,1,1,0]$	$[1,0,0,1,0,1,1]$	$[1,0,1,0,0,1,0]$	$[1,0,1,0,0,1,0]$	$[1,0,1,0,0,0,0]c_1$	$[1,0,1,1,1,0,0]$	$[1,0,1,0,0,0,0]d_1$	$[1,1,0,0,1,1,0]$
$\mathcal{O}_3$	0	0	$[2,2,0,1,0,1,0]$	$[2,2,0,2,0,1,1]$	0	$[2,2,1,1,1,0,0]$	0	$[2,2,1,1,0,0,0]$	$[2,2,1,1,1,0,0]$	$[2,2,1,1,0,1,0]$
$\mathcal{O}_4$	0	0	0	$[3,6,0,1,0,1,0]$	0	0	0	0	0	0
$\mathcal{O}_5$	0	0	0	0	$[2,1,1,0,1,1,0]$	$[2,1,2,0,1,0,0]$	$[2,1,1,0,1,0,0]a_1$	$[2,1,2,1,1,0,0]$	$[2,1,1,0,1,0,0]d_2$	$[2,1,1,1,1,1,0]$
$\mathcal{O}_6$	0	0	0	0	0	$[3,2,1,1,1,0,0]$	0	$[3,2,2,1,1,0,0]$	$[3,2,2,1,1,0,0]$	$[3,2,2,1,1,1,0]$
$\mathcal{O}_7$	0	0	0	0	0	0	$[2,3,1,1,1,0,0]$	$\frac{1}{2}[2,5,1,1,1,0,0]$	$[2,5,1,1,1,0,0]$	$\frac{1}{2}[2,5,1,1,1,1,0]$
$\mathcal{O}_8$	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}[4,5,1,1,0,0,0]$	0	$\frac{1}{2}[4,5,1,1,0,1,0]$
$\mathcal{O}_9$	0	0	0	0	0	0	0	0	$[3,5,2,1,1,0,0]$	$[3,5,2,1,1,1,0]$
$\mathcal{O}_{10}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$[4,6,2,1,1,1,0]$
$\mathcal{O}_{11}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\mathcal{O}_{12}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\mathcal{O}_{13}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\mathcal{O}_{14}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\mathcal{O}_{16}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\mathcal{O}_{17}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\mathcal{O}_{18}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

W_{11}	W_{12}	W_{13}	W_{14}	W_{15}	W_{16}	W_{17}	W_{18}	$W_9^{\perp}$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
$[1,0,1,1,0,0,0]c_2$	$[1,0,0,1,0,1,0]$	$[1,0,0,0,0,0,0]e_1$	$[1,0,0,0,0,1,0]d_5$	$[1,0,1,0,1,1,0]$	$[1,0,1,0,1,0,0]c_5$	$[1,0,0,0,0,2,0]$	$[1,0,1,1,0,1,1]$	$[1,0,2,0,2,0,0]$
$[2,2,2,1,1,0,0]$	$[2,2,0,2,0,0,0]c_2$	$[2,2,0,0,0,0,0]e_2$	$[2,2,0,2,0,1,1]$	$[2,2,1,1,0,0,1]d_2$	$[2,2,1,1,0,0,0]c_1$	$[2,2,0,0,1,1,0]d_5$	$[2,2,1,2,0,1,1]$	$[2,2,1,1,0,0,0]c_6$
0	$[3,6,1,1,0,0,0]$	$[3,6,1,0,0,0,0]$	$[3,6,0,1,0,1,0]$	$[3,6,1,1,1,0,0]$	0	$[3,6,0,1,0,1,0]$	$[3,6,1,1,0,1,0]$	0
$[2,1,2,1,2,0,0]$	$[2,1,2,1,1,0,0]$	$[2,1,2,0,0,0,0]d_3$	$[2,1,2,0,1,1,0]$	$[2,1,2,1,2,0,0]$	$[2,1,1,0,1,0,0]e_4$	$[2,1,2,0,2,1,0]$	$[2,1,2,1,1,1,1]$	$[2,1,1,2,1,0,0]$
$[3,2,2,2,1,0,0]$	$[3,2,1,2,1,0,0]$	$[3,2,1,0,0,0,0]e_3$	$[3,2,1,1,1,1,0]$	$[3,2,1,1,1,0,0]d_2$	$[3,2,2,1,1,0,0]a_2$	$[3,2,1,2,1,1,0]$	$[3,2,2,2,1,1,1]$	$[3,2,3,1,1,0,0]$
$\frac{1}{2}[2,5,3,1,1,0,0]$	$[2,5,0,2,0,0,0]$	$\frac{1}{2}[2,5,0,0,0,0,0]d_4$	$[2,5,0,1,1,1,0]$	$\frac{1}{2}[2,5,1,1,1,0,0]b_1$	$\frac{1}{2}[2,5,1,1,1,0,0]b_2$	$\frac{1}{2}[2,5,0,1,1,1,0]b_4$	$\frac{1}{2}[2,5,1,2,1,1,1]$	$\frac{1}{2}[2,5,1,1,1,0,0]a_2$
$\frac{1}{2}[4,5,1,1,1,0,0]$	0	$\frac{1}{2}[4,5,2,0,0,0,0]$	0	$\frac{1}{2}[4,5,1,1,0,0,0]$	$\frac{1}{2}[4,5,1,1,0,0,0]$	$\frac{1}{2}[4,5,1,1,0,1,0]$	$\frac{1}{2}[4,5,1,2,0,1,1]$	$\frac{1}{2}[4,5,1,1,0,0,0]$
$[4,6,3,1,1,0,0]$	0	$[4,6,4,0,0,0,0]$	$[3,5,2,1,1,1,0]$	$[3,5,3,2,1,0,0]$	$[3,5,2,1,1,0,0]b_3$	$[3,5,2,2,1,1,0]$	$[3,5,3,2,1,1,1]$	$[3,5,3,1,1,0,0]$
$[4,8,2,1,1,0,0]$	0	$[4,8,2,0,0,0,0]$	0	$[4,6,3,1,1,0,0]$	$[4,6,2,1,1,0,0]a_1$	$[4,6,3,1,1,1,0]$	$[4,6,3,2,1,1,1]$	$[4,6,2,1,1,0,0]$
0	$[4,6,1,2,0,0,0]$	$[4,6,1,0,0,0,0]c_4$	0	$[4,8,2,1,1,0,0]$	$[4,7,3,1,1,0,0]$	$[4,8,2,1,1,1,0]$	$[4,8,2,2,1,1,1]$	0
0	0	$[5,8,2,0,0,0,0]$	$[4,6,1,1,1,1,0]$	$[4,6,1,1,1,0,0]c_4$	0	$[4,6,1,1,2,1,0]$	$[4,6,2,2,1,1,1]$	0
0	$[5,8,2,1,1,0,0]$	0	$[5,8,2,1,1,1,0]$	$[5,8,3,2,1,1,1]$	0			
0	0	0	$[3,11,0,1,0,1,0]$	$[3,11,1,1,1,0,0]$	$2[3,9,1,1,1,0,0]$	$[3,11,0,1,0,1,0]b_5$	$[3,11,1,2,0,1,1]$	0
0	0	0	0	$[4,11,1,1,1,0,0]$	$2[4,9,2,1,1,0,0]$	$2[4,11,1,1,1,1,0]$	$[4,11,2,2,1,1,1]$	0
0	0	0	0	0	$[4,11,1,1,1,0,0]$	$\frac{1}{2}[4,13,0,1,1,1,0]$	$\frac{1}{6}[4,13,1,2,1,1,1]$	0
0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}[5,13,1,1,0,1,0]$	$\frac{1}{2}[5,13,2,2,0,1,1]$	0
0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{3}[6,13,3,1,1,1,0]$	0