ソレノイドから定まるある力学系の p 進エントロピーと p 進 Mahler 測度

片桐 宥 (東北大学)

概 要

本稿は, 2018 年に開催された「第 12 回福岡数論研究集会」で筆者が行った講演の内容に基づくものである．エントロピーの p 進類似である p 進エントロピーの定義を述べ, 2 つの力学系の p 進エントロピーについて筆者が得た結果を概説する．

1 導入

まず古典的なエントロピーを定義し, 今回話題にしたい定理を紹介する．

定義 1. $d \in \mathbb{N}$, X を集合とし, 階数 d の自由 Abel 群 $\mathbb{Z}^d$ が X に作用しているとする．

$$h(X) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{[\mathbb{Z}^d \colon (n\mathbb{Z})^d]} \log |\mathrm{Fix}_{(n\mathbb{Z})^d}(X)|$$

が存在するとき, これを **(周期的) エントロピー**という．ただし, $|\mathrm{Fix}_{(n\mathbb{Z})^d}(X)|$ は $(n\mathbb{Z})^d$の X への作用で固定される X の元の個数とする．

$L_d(\mathbb{Z}) := \mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_d^{\pm 1}]$ とする．$\mathbb{Z}^d$ の $L_d(\mathbb{Z})$ への作用を

$$\delta \cdot \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^d} a_\nu t^\nu = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^d} a_\nu t^{\nu+\delta}$$

により定義する．この作用は $L_d(\mathbb{Z})$ の Pontryagin 双対 $\widehat{L_d(\mathbb{Z})}$ への作用を誘導する．ただし $L_d(\mathbb{Z})$ は離散群とみなし, このとき $\widehat{L_d(\mathbb{Z})}$ はコンパクトとなる．

$f \in L_d(\mathbb{Z})$ を 1 つ固定すると, $\mathbb{Z}^d$ の $L_d(\mathbb{Z})$ への作用は $L_d(\mathbb{Z})/(f)$ への作用を誘導し, さらにその Pontryagin 双対 $X_f := (L_d(\mathbb{Z})/(f))^\wedge$ への作用も誘導する．$X = X_f$ のとき, $h(X_f)$ を f の**エントロピー**という．

定義 2. $0 \neq f \in \mathbb{C}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_d^{\pm 1}]$ に対して,

$$m(f) := \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^d} \int_{T^d} \log |f(z_1, \dots, z_d)| \frac{dz_1}{z_1} \cdots \frac{dz_d}{z_d} \in \mathbb{R}$$

を f の **Mahler 測度**という．ただし, $T^d = \{(z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{C}^d \mid |z_1| = \cdots = |z_d| = 1\}$ とする．これは f が T^d 上に零点や極を持っても収束する．

エントロピーと Mahler 測度について次の定理が知られている．

定理 1 (Lind-Schmidt-Ward [5]). $0 \neq f \in L_d(\mathbb{Z})$ に対して, $h(X_f)$ は存在し,

$$h(X_f) = m(f)$$

が成り立つ.

注意 1. (1) 定理 1 の主張における $h(X_f)$ は位相的エントロピーである. 位相的エントロピーの定義はここではしないが, 定義 1 で定義した周期的エントロピーとは定義が異なる. しかし, 今のセッティングでは, 任意の $z \in T^d$ に対して $f(z) \neq 0$ ならば 2 つのエントロピーの概念は一致する.

(2) $d = 1$ のとき $0 \neq P(z) = \sum_{i=s}^{t} a_i z^i \in \mathbb{C}[z^{\pm 1}]$ $(t \geq s, a_s a_t \neq 0)$ に対して, P の Mahler 測度は次で与えられる:

$$m(P) = \log|a_t| + \sum_{P(\alpha)=0,\, |\alpha|>1} \log|\alpha| = \log|a_s| - \sum_{P(\alpha)=0,\, 0<|\alpha|<1} \log|\alpha|.$$

ただし, 和はいずれも根の重複度も込めてとるものとする.

(3) $d \geq 2$ のときは次のような結果が知られている:

定理 2 (Smyth [8]).

$$m(z_1 + z_2 + 1) = \frac{2\sqrt{3}}{4\pi} L(\chi_{-3}, 2).$$

ただし, χ_{-3} は $\bmod 3$ の奇指標, $L(\chi_{-3}, s)$ は Dirichlet L-関数とする.

定理 3 (Rogers-Zudilin [7]).

$$m(z_1 + z_1^{-1} + z_2 + z_2^{-1} + 1) = \frac{15}{4\pi^2} L(E, 2).$$

ただし, E は $z_1 + z_1^{-1} + z_2 + z_2^{-1} + 1 = 0$ から定まる楕円曲線とする.

定理 1 により f のエントロピーを求めるためには, f の Mahler 測度を計算すればよく, 注意 1 によりその値には L-関数の特殊値が現れることがある. $d \geq 2$ の場合の f のエントロピーの値は, 簡潔に表すことは難しいが興味深い数が現れることが期待される.

また定理 1 の拡張として次のような定理もある.

定理 4 (Einsiedler [4]). K を代数体, $\mathcal{O}_K$ を K の整数環, $L_d(\mathcal{O}_K) = \mathcal{O}_K[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_d^{\pm 1}]$ とする. $0 \neq f \in L_d(\mathcal{O}_K)$ に対して, $h(X_f)$ は存在し,

$$h(X_f) = m(N_{K/\mathbb{Q}}(f))$$

が成り立つ. ただし, 左辺は上と同様に定まる $\mathbb{Z}^d$ の $L_d(\mathcal{O}_K)/(f)$ の Pontryagin 双対 $X_f := (L_d(\mathcal{O}_K)/(f))^\wedge$ への作用に関するエントロピーである. また

$$N_{K/\mathbb{Q}}(f) = \prod_{\tau: K \hookrightarrow \mathbb{C}} \tau(f)$$

とする.

これまで紹介した定理 1 および定理 4 の p 進類似を追うのが次の節の目標である.

2　p 進エントロピー

以下では p は素数とする．まず p 進エントロピーを定義する．この定義は Deninger によるものである．

定義 3 ([2])**.** $\mathbb{C}_p$ を $\mathbb{Q}_p$ の代数閉包の完備化とし，そのノルムは $|p|_p = p^{-1}$ を満たすとする．また $\log_p\colon \mathbb{C}_p^\times \to \mathbb{C}_p$ を $\log_p p = 0$ を満たす p 進対数とする．

$d \in \mathbb{N}$, X を集合とし，階数 d の自由 Abel 群 $\mathbb{Z}^d$ が X に作用しているとする．

$$h_p(X) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{[\mathbb{Z}^d\colon (n\mathbb{Z})^d]} \log_p |\mathrm{Fix}_{(n\mathbb{Z})^d}(X)|$$

が存在するとき，これを p **進エントロピー**という．

1 節と同様に，$f \in L_d(\mathbb{Z})$ を 1 つ固定し，$X_f := (L_d(\mathbb{Z})/(f))^\wedge$ とする．定義 3 において，$X = X_f$ のとき，$h_p(X_f)$ を f **の** p **進エントロピー**という．

定義 4. $f \in \mathbb{C}_p[t_1^{\pm1}, \ldots, t_d^{\pm1}]$ に対して，

$$m_p(f) := \int_{T_p^d} \log_p f(z_1, \ldots, z_d) \frac{dz_1}{z_1} \cdots \frac{dz_d}{z_d} = \lim_{\substack{N\to\infty \\ (N,p)=1}} \frac{1}{N^d} \sum_{\zeta \in \mu_N^d} \log_p f(\zeta)$$

が存在するとき，$m_p(f)$ を f **の** p **進 Mahler 測度**という．ただし，$\mu_N = \{z \in \mathbb{C}_p \mid z^N = 1\}$, $T_p^d = \{(z_1, \ldots, z_d) \in \mathbb{C}_p^d \mid |z_1|_p = \cdots = |z_d|_p = 1\}$ とする．

この p 進エントロピーについて定理 1 の p 進類似となる定理が示されている．

定理 5 (Deninger [2])**.** $f \in L_d(\mathbb{Z})$ とする．任意の $z \in T_p^d$ に対して $f(z) \neq 0$ ならば，$h_p(X_f)$ は存在し，

$$h_p(X_f) = m_p(f)$$

が成り立つ．

注意 2. (1) 任意の $z \in T_p^d$ に対して $f(z) \neq 0$ ならば，$m_p(f)$ は存在する．

(2) 一般に次も成立する:

定理 6 (Deninger [2])**.** $n \in \mathbb{N}, f \in M_n(L_d(\mathbb{Z}))$ とする．任意の $z \in T_p^d$ に対して $(\det f)(z) \neq 0$ ならば，$h_p(X_f)$ は存在し，

$$h_p(X_f) = m_p(\det f)$$

が成立する．ただし，$X_f := (L_d(\mathbb{Z})^n / f L_d(\mathbb{Z})^n)^\wedge$ とする．

(3) $d = 1$ のとき $0 \neq P(z) = \sum_{i=s}^{t} a_i z^i \in \mathbb{C}_p[z^{\pm1}]$ $(t \geq s, a_s a_t \neq 0)$ に対して，任意の $z \in T_p^d$ に対して $P(z) \neq 0$ ならば，P の p 進 Mahler 測度は次で与えられる:

$$m_p(P) = \log_p a_t + \sum_{P(\alpha)=0,\, |\alpha|_p > 1} \log_p \alpha = \log_p a_s - \sum_{P(\alpha)=0,\, 0<|\alpha|_p<1} \log_p \alpha.$$

ただし，和はいずれも根の重複度も込めてとるものとする．

(4) 1 節で紹介した古典的なケースと異なり，この p 進エントロピーと p 進 L-関数の特殊値などとの関係式は未だ知られていない．

注意 2 (4) で述べたように, p 進エントロピーと p 進 L-関数の特殊値などとの関係式は見つかっていないが, もしこのような関係式が見つかれば数論的に非常に意味のあるものであると思われる. このような関係式を探求することが今後の課題の 1 つであり, この力学系の p 進エントロピーを研究することの醍醐味の 1 つであると筆者は考える.

また今回, 定理 4 の p 進類似にあたる定理として以下の定理 7 を得た. これは定理 6 を用いると証明できる.

定理 7 (K.)**.** K を代数体, $\mathcal{O}_K$ を K の整数環, $f \in L_d(\mathcal{O}_K)$ とする. 任意の $z \in T_p^d$ に対して $N_{K/\mathbb{Q}}(f)(z) \neq 0$ ならば, $h_p(X_f)$ は存在し,

$$h_p(X_f) = m_p(N_{K/\mathbb{Q}}(f))$$

が成り立つ.

この定理も定理 6 と同様に一般に $f \in M_n(L_d(\mathcal{O}_K))$ としても成立する. 定理 7 を用いて p 進エントロピーの計算例を挙げ, この節の最後とする.

例 1. $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ とする. $f = 3t + \sqrt{2} \in \mathcal{O}_K[t^{\pm 1}]$ について

$$N_{K/\mathbb{Q}}(f) = 9t^2 - 2 = 0 \iff t = \pm\frac{\sqrt{2}}{3}$$

なので

$$\left|\frac{\sqrt{2}}{3}\right|_p = \begin{cases} 1 & (p \neq 2, 3) \\ 2^{-\frac{1}{2}} & (p = 2) \\ 3 & (p = 3) \end{cases}$$

となり, $p = 2, 3$ のときに f の p 進エントロピーは存在し,

$$h_2(X_f) = m_2(9t^2 - 2) = \log_2 9 \in \mathbb{C}_2,$$
$$h_3(X_f) = m_3(9t^2 - 2) = \log_3 2 \in \mathbb{C}_3$$

となる. ちなみに

$$h(X_f) = m(9t^2 - 2) = \log 9$$

である.

3　ソレノイドの p 進エントロピー

この節ではこれまでの節で扱っていた力学系とは異なる力学系を扱い, その p 進エントロピーについて筆者が示したことを紹介する. そのためにまず ソレノイドを定義する.

定義 5. $P \subset \mathbb{Z}$ を素数全体の集合とする. $S \subset P$ に対して, $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{S}\right]$ の Pontryagin 双対

$$\Sigma_S := \widehat{\mathbb{Z}\left[\frac{1}{S}\right]}$$

をソレノイドという. このとき $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{S}\right]$ は離散群とみなし, Σ_S はコンパクト Abel 群となる. 特に $S = P$ のとき

$$\Sigma := \hat{\mathbb{Q}}$$

をフルソレノイドという.

このソレノイドから定まる力学系について次のような結果がある.

定理 8 (Lind-Ward [6])**.** $A \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{Q}), M := \mathbb{Q}^s, X := \hat{M} = \Sigma^s$ とする. $\mathbb{Z}$ の M への作用を

$$n \cdot x = A^n x$$

により定義し, これにより $\mathbb{Z}$ の X への作用が誘導される. このとき

$$h(A; X) = \sum_{l \le \infty} \sum_{|\lambda|_l > 1} \log |\lambda|_l \in \mathbb{R}$$

が成り立つ. ただし $l \le \infty$ は素数全体および $l = \infty$ を表し, λ は A の固有値全体を走るものとする.

注意 3. 定理 8 における $h(A; X)$ は測度論的エントロピーであり, 周期的エントロピーとは定義が異なる. しかし, X がコンパクトで距離化可能な Abel 群かつ $\mathbb{Z}$ の X への作用が広大[1]であるとき, 2 つのエントロピーの概念は一致する. 測度論的エントロピーおよび広大の定義はここでは省略する.

定理 8 の p 進類似を考えたいが, 同様の状況のまま p 進類似を考えることは (おそらく) できない. その最大の理由は, p 進エントロピーは周期的エントロピーの定義の p 進類似として定義されており, 測度論的エントロピーとはかけ離れているからである. また測度論的エントロピーの定義の p 進類似を考えることも難しい.

そこで状況を少し変え, 次のような定理を考えた.

定理 9 (K.)**.** $S \subset P$ を素数の有限集合, $A \in \mathrm{GL}_s\left(\mathbb{Z}\left[\frac{1}{S}\right]\right)$ とする. $M = \mathbb{Z}\left[\frac{1}{S}\right]^s, X = \hat{M} = \Sigma_S^s$ とすると定理 8 と同様にして $\mathbb{Z}^d$ は X に作用する. また A の固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ とし, 任意の $k = 1, \dots, s$ および $p \in S$ に対して $|\lambda_k|_p \neq 1$ と仮定する. このとき任意の $p \in S$ に対して $h_p(X)$ は存在し,

$$h_p(A; X) := h_p(X) = \sum_{\substack{l \in S \\ l \neq p}} \sum_{|\lambda_k|_l > 1} \log_p |\lambda_k|_l + \sum_{|\lambda_k|_p > 1} \log_p \lambda_k$$

が成り立つ. ただし, 任意の $p \in S$ に対して埋め込み $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}_p$ を固定し, これにより各 $\lambda_k \in \overline{\mathbb{Q}}$ を $\mathbb{C}_p$ の元とみなす.

注意 4. (1) $R := L_1(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ とし, $S \subset P$ に対して $M = \mathbb{Z}\left[\frac{1}{S}\right]^s, A \in \mathrm{GL}_s\left(\mathbb{Z}\left[\frac{1}{S}\right]\right)$ とすると

$$f(t) \cdot x = f(A)x$$

により M は R 加群となる. この R 加群の構造において $M = \mathbb{Q}^s$ は有限生成 R 加群ではない. しかし p 進エントロピーは M が有限生成 R 加群でないと不都合である ([1],[3]). というのは, 注意 3 で紹介した広大の p 進類似として p 進的広大という概念があり, p 進的広大であるためには M が有限生成 R 加群であることが必要である. この点でも定理 8 の仮定のままで p 進類似を考えることができないのである. しかし, 定理 9 の仮定があれば, $M = \mathbb{Z}\left[\frac{1}{S}\right]^s$ が有限生成 R 加群であることを示すことができる.

(2) A の固有多項式を χ_A とすると, 定理 9 の右辺の主張の第 2 項は $m_p(\chi_A)$ に一致する.

[1]「広大」は "expansive" の筆者による和訳である.

最後に定理 9 の適用例を紹介する.

例 2. $S = \{2,3\}$ とし,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2\left(\mathbb{Z}\left[\frac{1}{6}\right]\right)$$

とすると, A の固有値は $\lambda_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{-143}}{12}$ である. $p = 2,3$ に対して $|\lambda_{\pm}|_p = p^{\pm 1}$ (複号同順) なので, p 進エントロピーは次の通り:

$$h_2(A;X) = \log_2 3 + \log_2 \lambda_+ \in \mathbb{C}_2,$$
$$h_3(A;X) = \log_3 2 + \log_3 \lambda_+ \in \mathbb{C}_3.$$

ちなみに

$$h(A;X) = \log 2 + \log 3 = \log 6 \in \mathbb{R}$$

となる.

謝辞

第 12 回福岡数論研究集会世話人の金子昌信先生, 權寧魯先生, 岸康弘先生, 高妻倫太郎先生に, 今回の講演機会を与えていただいたことをこの場をお借りして感謝申し上げます.

参考文献

[1] J. Bräuer, Entropies of algebraic $\mathbb{Z}^d$-actions and K-theory, Dissertation, Münster, 2010.

[2] C. Deninger, p-adic entropy and a p-adic Fuglede-Kadison determinant, In: Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin. Vol. I, 423–442, Progr. Math., 269, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2009.

[3] C. Deninger, Regulators, entropy and infinite determinants, In: Regulators, 117–134, Contemp. Math., 571, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012.

[4] M. Einsiedler, A generalisation of Mahler measure and its application in algebraic dynamical systems, Acta Arith. **88** (1999), no. 1, 15–29.

[5] D. Lind, K. Schmidt and T. Ward, Mahler measure and entropy for commuting automorphisms of compact groups, Invent. Math. **101** (1990), no. 3, 593–629.

[6] D. Lind and T. Ward, Automorphisms of solenoids and p-adic entropy, Ergodic Theory Dynam. Systems **8** (1988), no. 3, 411–419.

[7] M. Rogers and W. Zudilin, On the Mahler measure of $1 + X + 1/X + Y + 1/Y$, Int. Math. Res. Not. IMRN 2014, no. 9, 2305–2326.

[8] C. J. Smyth, On measures of polynomials in several variables, Bull. Austral. Math. Soc. **23** (1981), no. 1, 49–63.