リーマンゼータ関数の導関数の a 点についての和

小野塚 友一 (九州大学)

1 Introduction

$\zeta(s)$ をリーマンゼータ関数とし $\zeta^{(k)}(s)$ をその k 階導関数とする．また本稿では複素変数 s の実部と虚部を $s=\sigma+it$ のように表すこととする．複素数 a に対して $\zeta^{(k)}(s)-a$ の零点を $\rho_a^{(k)}=\beta_a^{(k)}+i\gamma_a^{(k)}$ と書き $\zeta^{(k)}(s)$ の a 点という．$a=0$ のとき a 点は零点であるため, これは零点を一般化したものとなっている．リーマンゼータ関数の零点については Riemann-von Mangoldt の公式という有名な式が知られている:

$$N(T)=\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}+O(\log T).$$

ただし $N(T)$ はリーマンゼータ関数の零点で虚部が $0<\mathrm{Im}(s)<T$ を満たしているものの個数であり, この個数は重複を込めてカウントしている．この公式は Landau [2] により a 点に一般化され, 次式が成り立つ:

$$N(a;T):=\sum_{1<\gamma_a^{(0)}<T}1=\begin{cases}\dfrac{T}{2\pi}\log\dfrac{T}{2\pi}-\dfrac{T}{2\pi}+O(\log T) & (a\neq 1)\\ \dfrac{T}{2\pi}\log\dfrac{T}{4\pi}-\dfrac{T}{2\pi}+O(\log T) & (a=1).\end{cases}\tag{1}$$

更に Landau [8] は Riemann-von Mangoldt の公式の別の一般化も与えており, $x>1$ に対して次式が成り立つ:

$$\sum_{0<\gamma_0^{(0)}<T}x^{\rho_0^{(0)}}=-\Lambda(x)\frac{T}{2\pi}+O(\log T).$$

ただし $\Lambda(x)$ は x が整数のときフォン・マンゴルト関数であり, それ以外のとき 0 とする．この式は $x>1$ という条件のもとで成り立つが, $x=1$ のとき左辺は零点の個数を表しておりこれは Riemann-von Mangoldt の公式の $N(T)$ となっている．

この式は Steuding [10] により a 点に一般化されている．Steuding は複素数 a と正の数 $x\neq 1$ に対し

$$\sum_{0<\gamma_a^{(0)}<T}x^{\rho_a^{(0)}}=\left(\alpha(x)-x\Lambda\left(\frac{1}{x}\right)\right)\frac{T}{2\pi}+O\left(T^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)\tag{2}$$

が成り立つことを示した．ただし $\alpha(x)$ は $a\neq 1$ のとき, x が整数なら

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)-a}=\sum_{d\in 2^{-n}\mathbb{N}\ (n\in\mathbb{N})}\frac{\alpha(d)}{d^s}\tag{3}$$

で定まり x が整数でなければ $\alpha(x)=0$ とする．$a=1$ のときには, ある整数 n が存在して $2^nx\in\mathbb{Z}$ を満たせば (3) 式で $\alpha(x)$ を定め, それ以外のとき $\alpha(x)=0$ とする．Steuding は (1) 式や (2) 式を用いることにより次の結果を与えた．

定理 1 (Steuding [10])**.** 任意の実数 $\alpha \neq 0$ と任意の複素数 a に対して数列 $\{\alpha\gamma_a^{(0)}\}_{\gamma_a^{(0)}>1}$ は mod 1 で一様に分布する.

この結果はもともと $a=0$ のときに Rademacher によりリーマン予想の仮定のもとで示されていた. その後, $a=0$ のときに Elliott がリーマン予想の仮定をはずせると指摘し, Hlawka がその証明を与えていた. Steuding の結果はそれを a 点に拡張したものとなっている.

これらの a 点方面への一般化の一方で, Berndt [1] は Riemann-von Mangoldt の公式を k 階導関数に一般化した. Berndt は $k \geq 1$ に対して次の式を示した:

$$N_k(T) := \sum_{0<\gamma_0^{(k)}<T} 1 = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{4\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T).$$

もとの Riemann-von Mangoldt の公式では右辺第 1 項の log の中身が $T/(2\pi)$ となっていたが, 導関数の場合には $T/(4\pi)$ となり分母が変化する. これはディリクレ級数表示したときに定数項がないことが原因となっている. つまり

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots,$$
$$\zeta^{(k)}(s) = \frac{(-\log 2)^k}{2^s} + \frac{(-\log 3)^k}{3^s} + \cdots$$

と級数で書いたとき, $\zeta(s)$ の初項の 1 という定数項にあたるものが $\zeta^{(k)}(s)$ にはないため分母が変わっている. 同じ現象は $N(a;T)$ の場合にもおきており, やはり定数項があるかどうかで log の中の分母が決まる.

Conrey と Ghosh [3] はゼータ関数の導関数を研究する中で, 非負整数 j,k に対して

$$\sum_{0<\gamma_0^{(k)}\leq T} \zeta^{(j)}(\rho_0^{(k)})$$

はどうなるかという問題を提起した. これに対し藤井 [4] は $j=1, k=0$ のときに

$$\sum_{0<\gamma_0^{(0)}\leq T} \zeta'(\rho_0^{(0)})X^{\rho_0^{(0)}} \quad (X>0)$$

の漸近式を与え, Garunkštis と Steuding [5] は $X=1$ のときに a 点に拡張し, 次の漸近式を与えた:

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{\rho_a^{(0)};\ \text{non-trivial}\\ 0<\gamma_a^{(0)}\leq T}} \zeta'(\rho_a^{(0)}) &= \left(\frac{1}{2}-a\right)\frac{T}{2\pi}\log^2\frac{T}{2\pi} + (C_0 - 1 + 2a)\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} \\ &\quad + (1 - C_0 - C_0^2 + 3C_1 - 2a)\frac{T}{2\pi} + E(T). \end{aligned} \tag{4}$$

ただし C_n は Stieltjes 定数[1]であり, $E(T)$ は任意の $\varepsilon > 0$ とある定数 C を使って

$$E(T) = \begin{cases} O\left(T^{\frac{1}{2}+\epsilon}\right) & \text{under the Riemann hypothesis} \\ O\left(Te^{-C\sqrt{\log T}}\right) & \text{unconditionally} \end{cases}$$

[1] Stieltjes 定数は $\zeta(s)$ の $s=1$ でのローラン級数展開の係数により定義される:

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{C_n}{n!}(s-1)^n.$$

と評価できる. (4) より Garunkštis と Steuding は $\zeta(1/2+it)$ の a 点への近づき方の平均が分かると結論付けている.

Karabulut と Yildirim [7] は一般の非負整数 j,k に対して Conrey と Ghosh の平均を与えた:

$$\sum_{0<\gamma_0^{(k)}\le T}\zeta^{(j)}\left(\rho_0^{(k)}\right)=(-1)^j\left(\delta_{j,0}+B(j,k)\right)\frac{T}{2\pi}\left(\log T\right)^{j+1}+O\left(T(\log T)^j\right). \tag{5}$$

ただし $\delta_{j,0}$ は $j=0$ のときに 1 で, そうでないとき 0 とする. また

$$B(j,k):=-\frac{k+1}{j+1}-j!\sum_{r=1}^{k}\frac{e^{-z_r}}{z_r^{j+1}}P_j(z_r)+j!\sum_{r=1}^{k}\frac{1}{z_r^{j+1}}$$

と定め, z_r $(r=1,...,k)$ は $P_k(z)=\sum_{j=0}^{k}z^j/j!$ の零点をわたるものとする.

2 主結果

ここまでで紹介してきた結果はリーマンゼータ関数の結果を a 点に一般化したものか, もしくは k 階導関数に一般化したものだった. 今回紹介する主結果はこの両方についての一般化を行ったものである. 最初に紹介する主結果は $\zeta(s)$ の k 階導関数の a 点の個数についての評価を与えている.

定理 2 (O. [9])**.** 正の整数 k と複素数 $a\neq 0$ に対して次式が成り立つ:

$$N_k(a;T):=\sum_{1<\gamma_a^{(k)}<T}1=\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}+O(\log T).$$

次に紹介する結果は (2) 式の一般化である. ただしこの結果は (2) 式の範囲である正の数 $x\neq 1$ ほど一般的な結果ではなく, $x>1$ という狭い範囲での結果となっている.

定理 3 (O. [9])**.** $x>1$ とする. 正の整数 k と複素数 a に対して次式が成り立つ:

$$\sum_{1<\gamma_a^{(k)}<T}x^{\rho_a^{(k)}}
=\begin{cases}\dfrac{T}{2\pi}\displaystyle\sum_{\substack{l\ge 0\\ n_0,\dots,n_l\ge 2\\ x=n_0\cdots n_l}}\frac{(-1)^{k(l+1)}}{a^{l+1}}(\log n_0)^{k+1}(\log n_1\cdots\log n_l)^k+O(\log T) & (a\neq 0)\\ \dfrac{T}{2\pi}\displaystyle\sum_{\substack{l\ge 0\\ n_0\ge 2\\ n_1,\dots,n_l\ge 3\\ x=n_0\cdots n_l/2^{l+1}}}\left(\frac{-1}{(\log 2)^k}\right)^{l+1}(\log n_0)^{k+1}(\log n_1\cdots\log n_l)^k+O(\log T) & (a=0).\end{cases}$$

$a\neq 0$ のとき $x\notin\mathbb{Z}$ なら右辺の和は 0 とする. $a=0$ のときどんな整数 n に対しても $2^n x\notin\mathbb{Z}$ なら右辺の和は 0 とする.

上の 2 つの主結果を用いることで次の系を示すことができる.

系 (Lee-O.-Suriajaya [6])**.** k を正の整数とする. 任意の実数 $\alpha\neq 0$ と任意の複素数 a に対して数列 $\{\alpha\gamma_a^{(k)}\}_{\gamma_a^{(k)}>1}$ は mod 1 で一様に分布する.

最後に紹介する結果は (5) 式を a 点に一般化したものである.

定理 4 (Mazhouda-O.)**.** 非負整数 j,k と複素数 a に対して次式が成り立つ:

$$\sum_{1<\gamma_a^{(k)}<T} \zeta^{(j)}\left(\rho_a^{(k)}\right) = (-1)^j\left(\delta_{j,0}+a\delta_{k,0}+B(j,k)\right)\frac{T}{2\pi}\left(\log T\right)^{j+1}+O\left(T(\log T)^j\right).$$

定理 4 より $\zeta^{(j)}(\rho_a^{(k)})$ の $1<\mathrm{Im}(\rho_a^{(k)})<T$ での平均が計算できる:

$$\frac{1}{N_k(a,T)}\sum_{1<\gamma_a^{(k)}<T}\zeta^{(j)}(\rho_a^{(k)}) \sim (-1)^j\left(\delta_{j,0}+a\delta_{k,0}+B(j,k)\right)(\log T)^j.$$

これは $\zeta^{(j)}(s)$ の特定の点での平均的な大きさを表している.

3 証明の方針

上で紹介した 3 つの主結果について, ここでは簡単に証明の方針を説明する.

留数定理より定数 b,B と関数 f に対して

$$\sum_{\substack{1<\gamma_a^{(k)}<T\\ 1-b<\beta_a^{(k)}<B}} f\left(\rho_a^{(k)}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{R}} f(s)\frac{\zeta^{(k+1)}(s)}{\zeta^{(k)}(s)-a}ds$$

が成り立つ. ただし積分路 $\mathbf{R}$ は 4 点 $1-b+i$, $B+i$, $B+iT$, $1-b+iT$ を頂点とする長方形を反時計回りに回るものとする. 定数 b,B をうまくとることにより, $1<\mathrm{Im}(s)<T$ を満たす a 点を長方形の内部に有限個を除いて入れることができる. つまり

$$\sum_{1<\gamma_a^{(k)}<T} f\left(\rho_a^{(k)}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{R}} f(s)\frac{\zeta^{(k+1)}(s)}{\zeta^{(k)}(s)-a}ds+O(1)$$

が成り立つ. この積分を各線分ごとに分解しそれぞれを個別に評価していく:

$$\begin{aligned}\sum_{1<\gamma_a^{(k)}<T} f\left(\rho_a^{(k)}\right) &= \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{1-b+i}^{B+i}+\int_{B+i}^{B+iT}+\int_{B+iT}^{1-b+iT}+\int_{1-b+iT}^{1-b+i}\right\} f(s)\frac{\zeta^{(k+1)}(s)}{\zeta^{(k)}(s)-a}ds+O(1)\\ &=: \frac{1}{2\pi i}(I_1+I_2+I_3+I_4)+O(1).\end{aligned}$$

ここで定理 2 では $f(s)=1$, 定理 3 では $f(s)=x^s$, 定理 4 では $f(s)=\zeta^{(j)}(s)$ と選ぶことで証明できることに注意しておく.

I_1 は T に依存しないため $I_1=O(1)$ が成り立つ.

I_2 は Dirichlet 級数表示

$$\zeta^{(k)}(s) = \frac{(-\log 2)^k}{2^s}+\frac{(-\log 3)^k}{3^s}+\cdots$$

と等比級数

$$\frac{\zeta^{(k+1)}(s)}{\zeta^{(k)}(s)-a} = -\frac{\zeta^{(k+1)}(s)}{a}\left\{1+(\zeta^{(k)}(s)/a)+(\zeta^{(k)}(s)/a)^2+\cdots\right\}$$

を用いて評価する．ただし後者の級数は $a \neq 0$ のときのみ成り立つ式である．$a = 0$ の場合にはこの級数は使えないが, 代わりに少し形を変えた同様の等比級数を考えればよい．

I_3 の評価については次の式を用いる ([9, Lemma 2.6]):

$$\frac{\zeta^{(k+1)}(s)}{\zeta^{(k)}(s) - a} = \sum_{|\gamma_a^{(k)} - t| < 1} \frac{1}{s - \rho_a^{(k)}} + O(\log t).$$

この式を用いることで I_3 が誤差項に含まれることが分かる．

I_4 が一番難しい部分である．この部分の計算には関数等式を用いる．リーマンゼータ関数にはきれいな形の関数等式が存在するが導関数には関数等式が存在しないため, リーマンゼータ関数の関数等式の両辺を微分したものを使う．ただそのままでは複雑で使いにくいため使いやすい形に計算し直す．例えば [9, Lemma 2.1] の

$$\zeta^{(k)}(1-s) = (-1)^k 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)(\log s)^k \cos\frac{\pi s}{2}\ \zeta(s)\left(1 + O\left(\frac{1}{|\log s|}\right)\right)$$

や [3, (16)] にある

$$(-1)^m \zeta^{(m)}(s) = \chi(s)(1 + O(1/|t|))\left(\ell - \left(\frac{s}{ds}\right)\right)^m \zeta(1-s)$$

のような形に変形して I_4 を評価していく．ただし $\chi(s) := 2(2\pi)^{s-1}\Gamma(1-s)\sin(\pi s/2)$ とし $\ell := \log|t|/(2\pi)$ とする．

これらの計算により I_1 から I_4 が評価でき, 定理 2, 定理 3, 定理 4 がそれぞれ与えられる．

参考文献

[1] B. C. Berndt, *The number of zeros for* $\zeta^{(k)}(s)$, J. Lond. Math. Soc. (2) **2** (1970), 577–580.

[2] H. Bohr, E. Landau and J. E. Littlewood, *Sur la fonction* $\zeta(s)$ *dans le voisinage de la droite* $\sigma = \frac{1}{2}$, Bull. de l'Acad. Royale de Belgique (1913), 3–35.

[3] J. B. Conrey and A. Ghosh, *Zeros of derivatives of the Riemann zeta-function near the critical line*, In: Analytic Number Theory (Allerton Park, IL, 1989), 95–110, Progr. Math., 85, Birkhauser Boston, Boston, MA, 1990.

[4] A. Fujii, *On the Distribution of Values of Derivative of the Riemann Zeta Function at Its Zeros. I*, Proc. Steklov Inst. Math. **276** (2012), 51–76.

[5] R. Garunkštis and J. Steuding, *On the roots of the equation* $\zeta(s) = a$, Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. **84** (2014), 1–15.

[6] J. Lee, T. Onozuka and A. I. Suriajaya, *Some probabilistic value distributions of the Riemann zeta function and its derivatives*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **92** (2016), 82–83.

[7] Y. Karabulut and Y. Yildirim, *On some averages at the zeros of the derivatives of the Riemann zeta-function*, J. Number Theory **131** (2011), 1939–1961.

[8] E. Landau, *Über die Nullstellen der Zetafunktion*, Math. Ann. **71**, (1912), 548–564.

[9] T. Onozuka, *On the a-points of the derivatives of the Riemann zeta*, Eur. J. Math. **3** (2017), 53–76.

[10] J. Steuding, *One hundred years uniform distribution modulo one and recent appricaticns to Riemann's zeta function*, In: Topics in mathematical analysis and applications, 659–698, Springer Optim. Appl., 94, Springer, Cham, 2014.