Hurwitz ゼータ関数の区間 $(0,1)$ における実零点について

遠藤 健太 (名古屋大学)　鈴木 雄太 (名古屋大学)

概 要

本稿は, 2017 年に開催された「第 11 回福岡整数論研究集会」で筆者が行った講演の内容に基づくものである. Hurwitz ゼータ関数の区間 $(0,1)$ における実零点についての筆者らの得た結果とその証明を概説する.

1　導入と主結果

Huriwitz ゼータ関数は,

$$\zeta(s,a)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+a)^{-s},\quad s=\sigma+it,\quad \sigma>1,\quad 0<a\le 1$$

で定義される級数である. この級数は, 複素全平面に解析接続され, $s=1$ において 1 位の極を持つことが知られている. $a=1$ のときは, Riemann ゼータ関数となる.

Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ は, $0<\sigma<1$ の範囲に実零点を持たないことが知られている. 一方で, Hurwitz ゼータ関数は, $0<\sigma<1$ の範囲に実零点を持つことがある. このことを詳しく調べたのが中村隆氏である. 中村氏は, 以下の定理を証明した.

Theorem 1.1 (中村 [2])**.** (1) $1/2\le a\le 1$ のとき, Hurwitz ゼータ関数 $\zeta(\sigma,a)$ は区間 $(0,1)$ において非零である.
(2) $0<a<1/2$ のとき, Hurwitz ゼータ関数 $\zeta(\sigma,a)$ は区間 $(0,1)$ において少なくとも一つの零点を持つ.

この定理により, Hurwitz ゼータ関数の区間 $(0,1)$ での実零点の非零条件が明らかにされた. 我々は, 実零点が存在するとき, すなわち, $0<a<1/2$ のときについて詳しく調べ, Theorem 1.1 を精密化することに成功した. それは, 以下の定理である.

Theorem 1.2 (E.–S. [1])**.** $0<a<1/2$ のとき, Hurwitz ゼータ関数 $\zeta(\sigma,a)$ は区間 $(0,1)$ においてただ一つの零点を持つ. また, それらの零点はすべて一位の零点である.

さらに, この零点がパラメータ a に関してどのような挙動をするか調べ, 以下の結果を得ることができた.

Theorem 1.3 (E.–S. [1])**.** $0<a<1/2$ にたいして, $\beta(a)$ を区間 $(0,1)$ における $\zeta(\sigma,a)$ のただ一つの零点とする. このとき, $\beta:(0,1/2)\to(0,1)$ は単調減少な C^{∞}-微分同相関数である. さらに, 漸近公式

$$\beta(a)=1-a+a^2\log a+O(a^2)\qquad(a\to 0+)$$

が成り立つ.

2 主結果の証明

まず, 中村氏が示した Theorem 1.1 の証明のスケッチをする. 証明の鍵となるのは以下の点である:

1. $0 < \sigma < 1$ のとき, 積分表示
$$\Gamma(\sigma)\zeta(\sigma, a) = \int_0^\infty H(a, x) x^{\sigma-1} dx \tag{1}$$
が成り立つ. ただし,
$$H(a, x) := \frac{e^{(1-a)x}}{e^x - 1} - \frac{1}{x} = \frac{xe^{(1-a)x} - e^x + 1}{x(e^x - 1)}, \quad x > 0$$
である.

2. 任意の $x > 0$ にたいして $H(a, x)$ が負であることは, $1/2 \leq a \leq 1$ であることに同値である.

3. $\zeta(s, a)$ の特殊値は,
$$\zeta(0, a) = \frac{1}{2} - a, \quad \lim_{\sigma \to 1-0} \zeta(\sigma, a) = -\infty$$
となる.

これにより, $1/2 \leq a \leq 1$ のとき, $\zeta(\sigma, a) < 0$ が成り立ち, $0 < a < 1/2$ のときは, 特殊値が $\zeta(0, a) = 1/2 - a > 0$, $\lim_{\sigma \to 1-0} \zeta(\sigma, a) = -\infty$ となるので, 中間値の定理より, 零点を持つことが示される.

Theorem 1.1 の鍵となっているのは, 積分表示 (1) である. 零点の存在が一意的であることについて, $\zeta(\sigma, a)$ の微分を調べることによって挙動を知ろうとすると計算がうまくいかず, 十分な情報を得ることができなかった. そこで, 筆者らは, 再び積分表示 (1) に注目することによって, 零点の存在が一意的であることを示すことができた. そこで, 鍵となったのは以下の二つの lemma である.

Lemma 2.1. 任意の $0 < a < 1/2$ にたいして, ある $x_0 > 0$ が唯一つ存在して,
$$H(a, x_0) = 0, \quad H(a, x) > 0 \ (0 < x < x_0 \text{ のとき}), \quad H(a, x) < 0 \ \ (x_0 < x \text{ のとき})$$
が成り立つ.

この lemma の証明は省略する.

Lemma 2.2. $0 < a < 1/2$ とし, $x_0 > 0$ を Lemma 2.1 で与えられるものとする. このとき
$$x_0^{-\sigma}\Gamma(\sigma)\zeta(\sigma, a)$$
は $0 < \sigma < 1$ に関して狭義単調減少である.

Proof. $\zeta(\sigma, a)$ の積分表示から
$$x_0^{-\sigma}\Gamma(\sigma)\zeta(\sigma, a) = \int_0^{x_0} H(a, x) \left(\frac{x}{x_0}\right)^\sigma \frac{dx}{x} + \int_{x_0}^\infty H(a, x) \left(\frac{x}{x_0}\right)^\sigma \frac{dx}{x}$$

となる．最初の積分について, 被積分関数は

$$H(a,x)>0, \quad \left(\frac{x}{x_0}\right)^{\sigma} \text{ は, } 0<\sigma<1 \text{ に関して単調減少},$$

であるので

$$\int_0^{x_0} H(a,x)\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\sigma}\frac{dx}{x}$$

は, $0<\sigma<1$ に関して単調減少となる．2項目の積分についても, 同じような議論をすることにより, $0<\sigma<1$ に関して単調減少となり結論を得る． □

Proof of Theorem 1.2. $0<a<1/2$ とする．このとき,

$$\zeta(0,a)=1/2-a>0, \quad \lim_{\sigma\to 1-}\zeta(\sigma,a)=-\infty$$

となる．これより,

$$\lim_{\sigma\to 0+} x_0^{-\sigma}\Gamma(\sigma)\zeta(\sigma,a)=\infty, \quad \lim_{\sigma\to 1-} x_0^{-\sigma}\Gamma(\sigma)\zeta(\sigma,a)=-\infty$$

が成り立つ．したがって, Lemma 2.2 より, $\zeta(\sigma,a)$ の零点が唯一つであることが示される．

$$F(\sigma,a)=x_0^{-\sigma}\Gamma(\sigma)\zeta(\sigma,a)$$

とおく．$s=\beta(a)$ での零点の位数が1位であることを示すために, $\frac{\partial}{\partial\sigma}F(\sigma,a)$ を計算する．任意の $0<\sigma<1$ にたいして,

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}F(\sigma,a)=\left(\int_0^{x_0}+\int_{x_0}^{\infty}\right)H(a,x)\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\sigma}\log\left(\frac{x}{x_0}\right)\frac{dx}{x}<0$$

が成り立つ．なぜなら, 任意の $x\neq x_0$, Lemma 2.1 より

$$H(a,x)\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\sigma}\log\left(\frac{x}{x_0}\right)<0$$

が成り立つからである．$x_0^{-\sigma}\Gamma(\sigma)$ は, 区間 $(0,1)$ において零点も極も持たないので, 零点の位数が1位であることがわかる． □

Remark 2.3. この証明手法は, Mellin 変換された形の関数の実零点を調べる際に, 被積分関数の零点が唯一つでありその零点の前後で値の符号が変化するときに適用できるので, Hurwitz ゼータ以外の他のゼータ関数の実零点を調べる際にも応用できるのではないかと考えられる．

Proof of Theorem 1.3. 本論説では, $\beta:(0,1/2)\to(0,1)$ が単調減少な C^{∞}-微分同相関数であることの証明は省略させてもらう．ここでは, この $\beta(a)$ の性質から漸近公式がどのように導かれるかを解説する．まず, $\beta(a)\to 1-$ $(a\to 0+)$ となることから, $\beta(a)\geq 1/2$ として良い．Euler–Maclaurin の和公式より,

$$\begin{aligned}\zeta(s,a)&=a^{-s}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+a+1)^s}\\&=a^{-s}+\frac{(a+1)^{1-s}}{s-1}+\frac{(a+1)^{-s}}{2}-s\int_0^{\infty}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)(x+a+1)^{-s-1}dx\end{aligned}$$

が任意の $0<\sigma<1$ にたいして成り立つ. $s=\sigma$ のとき, 任意の $0<\sigma<1$ に対して一様に,

$$\left|\sigma\int_0^\infty\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)(x+a+1)^{-\sigma-1}dx\right|\ll\sigma\int_0^\infty(x+a+1)^{-\sigma-1}dx\ll 1$$

が成り立つ. よって,

$$\zeta(\sigma,a)=a^{-\sigma}+\frac{(a+1)^{1-\sigma}}{\sigma-1}+O(1)$$

が成り立つ. $\beta=\beta(a)$ と略記し, $\sigma=\beta$ を代入すると,

$$\beta-1=-a^\beta(a+1)^{1-\beta}+O((1-\beta)a^\beta) \tag{2}$$

が成り立つ. いま $\beta\geq 1/2$ としていたので, この (2) より $\beta-1\ll a^\beta\ll a^{1/2}$ となることに注意すると,

$$a^\beta=a\exp((\beta-1)\log a)=a+(\beta-1)a\log a+O\left((\beta-1)^2a|\log a|^2\right) \tag{3}$$

が成り立つ. 特に,

$$a^\beta\ll a \tag{4}$$

が成り立つ. また,

$$(a+1)^{1-\beta}=\exp\left((1-\beta)\log(1+a)\right)=1+O\left((1-\beta)a\right) \tag{5}$$

も成り立つ. (2) に (3), (4), (5) を代入することにより,

$$\beta-1=-a+(1-\beta)a\log a+O\left((1-\beta)a\right) \tag{6}$$

を得る. 特に,

$$1-\beta\ll a\quad\text{および}\quad\beta-1=-a+O\left(a^2|\log a|\right)$$

が成り立つ. この評価を (6) に代入することで,

$$\beta-1=-a+\left(a+O(a^2|\log a|)\right)a\log a+O(a^2)=-a+a^2\log a+O(a^2)$$

を得る. □

Remark 2.4. 一般 Stieltjes 定数を用いることで $\beta(a)$ のさらなる漸近展開を求めることができる.

$$\zeta(s,a)=\frac{1}{s-1}+\sum_{n=0}^\infty\gamma_n(a)(s-1)^n$$

を $\zeta(s,a)$ の $s=1$ での Laurent 展開とする. $s=\beta(a)$ を代入することで,

$$\beta(a)=1-\frac{1}{\gamma_0(a)}\left(1+\sum_{n=1}^\infty\gamma_n(a)(\beta-1)^{n+1}\right) \tag{7}$$

を得る. 一般 Stieltjes 定数の変数 a についての漸近展開を用いると, 公式 (7) を再帰的に用いることにより, 以下の形の展開式を得ることができる:

$$\beta(a)=1+\sum_{\substack{1\leq k\leq N\\0\leq l\leq k-1}}A_{k,l}a^k\log^l a+O_N(a^{N+1}|\log a|^N),\quad A_{k,l}\in\mathbb{R}.$$

最後に

中村氏 [3] と松坂俊輝氏 [4] により, $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とするとき, $\sigma \in (-N-1, -N)$ においての Theorem 1.1 と同様な結果が成り立つことが証明されている. この結果に対して, 筆者らの手法を用いることで, 零点の存在が一意的であることを証明できると予想できる. 実際, 区間 $(-1, 0)$ では筆者らの手法を適用することができることを確認している. 一般の区間 $(-N-1, -N)$ の証明については, 現在, 奮闘中である.

参考文献

[1] K. Endo and Y. Suzuki, *Real zeros of Hurwitz zeta-functions and their asymptotic behavior in the interval* $(0, 1)$, preprint, 2017, arXiv:1705.08102.

[2] T. Nakamura, *Real zeros of Hurwitz-Lerch zeta and Hurwitz-Lerch type of Euler-Zagier double zeta functions*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **160** (2016), 39–50.

[3] T. Nakamura, *Real zeros of Hurwitz-Lerch zeta functions in the interval* $(-1, 0)$, J. Math. Anal. Appl. **438** (2016), 42–52.

[4] T. Matsusaka, *Real zeros of the Hurwitz zeta function*, preprint, 2016, arXiv:1610.07945.