重み付きメビウス関数の平均のオーダーと
その応用について

井上 翔太 (名古屋大学)

概 要

本稿ではよく知られた数論的関数の 1 つであるメビウス関数のリース平均の挙動とそれを調べることで得られるいくつかの結果を報告することを目的とする. 本稿で紹介する研究のモチベーションとしては良く知られた 2 つの未解決問題が背景としてある. それら 2 つの問題は独立した問題というわけではなく密接な関係があり素数分布に関わる重要な未解決問題である. ここではリース平均という比較的議論を簡単にする平均を用いてこれらの問題に対する新たなアプローチのきっかけを模索するということを行っている.

1 導入

次のメビウス関数は素数分布の研究において重要な研究対象の 1 つである:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & (n=1), \\ (-1)^k & (n = p_1 \cdots p_k,\ \text{ただし } p_i \neq p_j \text{ となる素数}), \\ 0 & (\text{その他}). \end{cases}$$

この関数についての重要な事実として次のことが知られている.

命題 1. リーマン予想が成り立つことと不等式

$$M(x) := \sum_{n \le x} \mu(n) \ll x^{1/2+\varepsilon} \tag{1.1}$$

が成り立つことは同値である.

この命題から関数 $M(x)$ は素数, とくにリーマンゼータ関数の零点分布と深い関りがある. これは次の公式から自然にわかる事実である.

$c > 1$ に関して

$$M(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^s}{s\zeta(s)} ds, \qquad (1 < x \notin \mathbb{Z}). \tag{1.2}$$

ここで $\zeta(s)$ はリーマンゼータ関数である. 式 (1.2) の右辺は留数計算をすることで留数の和で書くことができる. そして主な留数はゼータ関数の非自明な零点によるものである. そのため $M(x)$ を調べることにより $\zeta(s)$ の零点の情報を得ることができる.

ゼータ関数の零点についてはリーマン予想を始め多くの問題が未解決であり現在でも様々な研究が行われている.

今回の私の研究のモチベーションとしては以下の 2 つの問題が背景にある.

問題 1. リーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ の零点は全て 1 位であるか.

この予想は肯定的に成り立つことが予想されている. そして数値計算によりかなりの数の零点の位数が計算されているが今のところ 2 位以上の位数の零点は見つかっていない. この問題に関する最近の結果については Bui と Heath-Brown の 2 人が 2013 年にリーマン予想の仮定の下で, 非自明な零点の中での 1 位の零点の割合が 70.37%以上であることを示している [1]. 以下この問題が肯定的に成り立つことを simple zero conjecture (SZC) とよぶ.

2 つ目の問題は以下の問題である.

問題 2.

$$M(x) \ll x^{1/2} \tag{1.3}$$

は成り立つか.

よく知られたメルテンス予想は本来,

$$|M(x)| \leq x^{1/2}$$

であった. しかし, この不等式は Odlyzko と te Riele により 1984 年に否定された [8]. そしてこの問題 2 も多くの数学者が否定的に信じている. しかしその証明はされていない. 不等式 (1.3) は不等式 (1.1) を強めた不等式でありリーマン予想よりも強い主張として成り立つか否かが自然に考えられる問題の 1 つであると思う. この不等式が成り立たないと思われている理由はいくつかあるが次の結果が最も大きな理由の 1 つであろう.

命題 2. Linear Independence Conjecture が成り立つならば不等式 (1.3) は成り立たない.

これは A. E. Ingham により 1942 年に示された [5]. ここで Linear Independence Conjecture とは以下の予想である.

予想 1 (Linear Independence Conjecture)**.** リーマン予想の仮定の下で, ゼータ関数の非自明な零点を $\frac{1}{2} + i\gamma$ としたとき, 全ての $\gamma > 0$ は $\mathbb{Q}$ 上 1 次独立である.

この予想は零点の分布が不規則であるという観点からすると尤もらしい予想である. そして, この予想の下では実際に $M(x)$ は

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{M(x)}{x^{1/2}} = \pm\infty$$

となり, $M(x) \ll x^{1/2}$ が成り立たないことがわかる. さらに Gonek が予想している次のような予想もある.

予想 2. 正の定数 $B > 0$ が存在して

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{M(x)}{x^{1/2}(\log\log\log x)^{5/4}} = \pm B$$

となる.

もし (1.3) が成り立つとするとリーマン予想と問題 1 が肯定的に成り立つことが知られている. そのため, 不等式 (1.3) の真偽を判定する上ではリーマン予想と問題 1 が成り立つ下で議論する.

2 メビウス関数のリース平均に関する結果と重複度への応用

ここではリース平均と零点の重複度に関して得られた結果を述べたいと思う. 次の定理は通常の $M(x)$ ではすでに知られていた事実をリース平均に拡張した結果である.

定理 1. リーマン予想が成り立つと仮定する. もし, 非負実数 τ が存在して,

$$M_\tau(x) = \frac{1}{\Gamma(\tau+1)} \sum_{n \le x} \mu(n) \left(1 - \frac{n}{x}\right)^\tau = o\left(x^{1/2}(\log x)^\alpha\right)$$

が成り立つとする. このとき, 不等式

$$m(\rho) < \alpha + 1$$

が任意の非自明な $\zeta(s)$ の零点 ρ について成り立つ. ただし, $m(\rho)$ は零点の重複度である.

この結果はよく知られた結果 $M(x) = \Omega_\pm(x^{1/2})$ の証明とほぼ同様に示すことができる. $M_\tau(x)$ は $\mu(n)$ のリース平均を取ったものであり, 本来の $M(x)$ より扱いやすい和である. 一方で, 定理 1 のようにリース平均を取った上でも本来の $M(x)$ により得られる重要な情報を得ることができることもわかる. もともとの $M(x)$ に関して上と同様の結果を考えると $M(x) = o(x^{1/2}\log x)$ としなければならず, それと比べると問題の緩和化に成功している思う. また後でも正確に述べるがある仮定の下では $\tau > 1/2$ に関して $M_\tau(x) \ll x^{1/2}$ を示すことができる. しかし, $M(x)$ では非常に強い仮定の下でも $M(x) \ll x^{1/2}(\log x)^{5/4}$ までしか現在は示すことしかできていない.

今, リーマン予想の下で $M_\tau(x)$ に関する次の定理を得ることができる.

定理 2. リーマン予想が成り立つと仮定する. このとき定数 $C_0 > 0$ が存在して, 任意の $\tau = \tau(x) \ge \frac{C_0 \log\log x}{\log\log\log\log x}$ に関して

$$M_\tau(x) \ll x^{1/2}$$

が成り立つ.

この定理は τ が x に依存している下での結果である. しかし, 定理 1 については τ は x に依存していない結果となっている. このことから (SZC) へのアプローチとして τ が x に依存しているような定理 1 の類似があるとよい. 今回そのような結果を示すことはできなかったがそのような結果を得ることはできると強く期待している. その根拠を述べるために $M_\tau(x)$ に関する明示公式を次に述べる. $M(x)$ に関する明示公式は昔から知られておりその式の拡張ともみれる.

定理 3. 任意の正の数 $\tau > 0$ に関してある無限大へ発散する数列 $\{T_\nu\}$ が存在して,

$$\begin{aligned} M_\tau(x) = &\lim_{\nu\to\infty} \sum_{|\gamma|<T_\nu} \frac{1}{(m(\rho)-1)!} \lim_{s\to\rho} \frac{d^{m(\rho)-1}}{ds^{m(\rho)-1}} \left((s-\rho)^{m(\rho)} \frac{x^s}{\zeta(s)} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(1+\tau+s)}\right) \\ &+ \sum_{l=0}^{\infty} \operatorname*{Res}_{s=-l} \left(\frac{x^s}{\zeta(s)} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(1+\tau+s)}\right) \end{aligned}$$

が成り立つ. ただし, $m(\rho)$ は零点 ρ の位数である. そして, 最後の級数は $x \ge \delta$ に関して絶対かつ一様収束する級数である.

この式を用いて次のような考察を行うことができる．リーマン予想を仮定して ρ' を $\zeta(s)$ の 1 位でない零点とすると微分のライプニッツの公式により，

$$
\begin{aligned}
M_\tau(x) &= 2x^{1/2}(\log x)^{m(\rho')-1}m(\rho')\mathrm{Re}\left(\frac{\Gamma(\rho')}{\zeta^{(m(\rho'))}(\rho')\Gamma(1+\tau+\rho')}x^{i\gamma'}\right) \\
&\quad + \frac{2x^{1/2}}{(m(\rho')-1)!}\sum_{l=0}^{m(\rho')-2}\binom{m(\rho')-1}{l}(\log x)^l \\
&\quad \times \mathrm{Re}\left(\lim_{s\to\rho'}\frac{d^{m(\rho')-1-l}}{ds^{m(\rho')-1-l}}\left((s-\rho')^{m(\rho')}\frac{\Gamma(s)}{\zeta(s)\Gamma(1+\tau+s)}\right)x^{i\gamma'}\right) \\
&\quad + \lim_{\nu\to\infty}\sum_{\substack{|\gamma|<T_\nu \\ |\gamma|\neq|\gamma'|}}\frac{1}{(m(\rho)-1)!}\lim_{s\to\rho}\frac{d^{m(\rho)-1}}{ds^{m(\rho)-1}}\left((s-\rho)^{m(\rho)}\frac{x^s}{\zeta(s)}\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(1+\tau+s)}\right) \\
&\quad + \sum_{l=0}^{\infty}\operatorname*{Res}_{s=-l}\left(\frac{x^s}{\zeta(s)}\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(1+\tau+s)}\right) \\
&=: 2x^{1/2}(\log x)^{m(\rho')-1}m(\rho)\mathrm{Re}\left(\frac{x^{i\gamma'}\Gamma(\rho')}{\zeta^{(m(\rho'))}(\rho')\Gamma(1+\tau+\rho')}\right) + Y_{\tau,\rho'}(x)
\end{aligned}
$$

となることがわかる．この等式は任意の τ, x で成り立つ．また，詳しい計算は省略するが上記の級数の各項にはディガンマ関数などのある程度調べることが可能な関数たちが現れることが計算することでわかる．ここでわかっていないのは各項の大きさが常に残り続けるかということである．これは各項と残りの項の正負や大きさを正確に計算しなければならず現段階ではよくわかっていない．しかし τ が x に依存しない定数の場合は定理 1 により $M_\tau(x)$ の大きさが零点の 1 つ 1 つに大きな影響を受けることがわかっている．これらのことを踏まえ次の予想が成り立つことを提起する．

予想 3. ρ を非自明なリーマンゼータ関数の零点とする．このとき任意の単調な関数 $\tau=\tau(x)$ に対して

$$
M_\tau(x) = \Omega\left(x^{1/2}(\log x)^{m(\rho)-1}(\tau/e)^{-\tau-1}\right).
$$

が成り立つ．

そしてこの予想下では次のような命題が成り立つことがわかる．

命題 3. 予想 3 が成り立つと仮定する．もし，$\tau=\tau(x) \le \frac{\log\log x}{\log\log\log x}(\alpha+o(1))$ で $M_\tau(x) \ll x^{1/2}(\log x)^\beta$ をみたすような単調な関数 $\tau(x)$ が存在すると仮定すると

$$
m(\rho) \le \alpha+\beta+1
$$

が任意の $\zeta(s)$ の複素零点 ρ について成り立つ．特に，$\alpha+\beta<1$ とできるとすると (SZC) が成り立つ．

定理 1 と命題 3 を合わせて考えると必要な評価と得られる結果の差が $M(x)$ や τ が定数の場合の $M_\tau(x)$ を考えた場合と比較して非常に小さくなっているように感じる．このような理由からこの方針は (SZC) に対しての新たな 1 つの突破口になればと著者は期待している．

次に以下の予想と $M_\tau(x)$ の関係を考える．

予想 4 (Gonek-Hejhal Hypothesis)**.** (SZC) の仮定の下で, 任意の $\lambda > -3/2$ に関して

$$J_\lambda(T) := \sum_{0<\gamma\le T} \left|\zeta'(\rho)\right|^{2\lambda} \asymp T(\log T)^{(\lambda+1)^2}$$

が成り立つ.

この予想はGonek [2] と Hejhal [3] により独立に予想された. Gonek は Dirichlet polynomial の研究からこの予想を考え Hejhal は $\log\zeta'(s)$ の研究からこの予想を考えた. また, Gonek はリーマン予想と (SZC) の仮定の下で $\lambda = -1$ のとき,

$$J_{-1}(T) = \sum_{0<\gamma<T} \frac{1}{|\zeta'(\rho)|^2} \gg T$$

が成り立つことも示している [2]. さらに Hughes, Keating と O'Connell らはランダム行列を用いることで,

$$J_\lambda(T) \sim \frac{G^2(\lambda+2)}{G(2\lambda+3)} a_\lambda \frac{T}{2\pi} \left(\log\frac{T}{2\pi}\right)^{(\lambda+1)^2}$$

が成り立つこと予想した [4]. ただし,

$$a_\lambda = \prod_p \left(1-\frac{1}{p}\right)^{\lambda^2} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(m+\lambda)}{m!\Gamma(\lambda)}\right)^2 p^{-m}\right)$$

であり G は Barnes' 関数で

$$G(z+1) = (2\pi)^{z/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(z^2+\gamma z^2+z)\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(\left(1+\frac{z}{n}\right)^n e^{-z+z^2/2n}\right)$$

であり γ はオイラー定数である. このように予想 4 は様々な観点から成り立つであろうことが支持されている予想であり, この予想下でどの程度のことがわかるのかを整理することは重要な研究と思う.

今, 定理 3 により予想 4 とリーマン予想の下で次の結果が成り立つ.

系 1. リーマン予想と予想 4 が成り立つとする. このとき,

$$M_\tau(x) \ll \begin{cases} x^{1/2} & (1 \ll \tau), \\ x^{1/2}/\tau^{5/4} & \left((\log x)^{-1} \ll \tau = o(1)\right), \\ x^{1/2}(\log x)^{5/4} & \left(0 \le \tau = o\left((\log x)^{-1}\right)\right) \end{cases}$$

が成り立つ.

系 1 の $\tau = 0$ の場合は Ng が [7] で示した結果と同様である. そして, 系 1 により $\tau \gg 1$ のとき $M_\tau(x)$ に関する不等式 (1.3) に対応するものを得ることができることがわかる. この結果を考えた最初の動機は $M_\tau(x)$ で $M(x)$ を近似することにより, $M(x)$ に関する最良の結果を得ることができないかというものであった. しかし, それに関しては失敗した. それに関して少しここで考察する. リーマン予想と $J_{-1}(T) \ll T$ を仮定する. このとき, $M(x), M_\tau(x)$ の明示公式により,

$$M(x) - M_\tau(x) = x^{1/2} \sum_{|\gamma|<T_*} \frac{1}{\zeta'(\rho)} \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma^{1+\tau}}\right) x^{i\gamma} + E(x,T_*)$$

となることが計算することでわかる．ただし, T_* はある都合の良い任意に大きくできる数であり, $E(x,T_*)$ は T_* が x に依存して十分大であるとき $E(x,T_*) \ll \tau^{-1/2}x^{1/2}$ となる項である．この最初の和の項であるが $\tau \ll \frac{1}{\log x}$ としなければ近似がうまくいかない．そのため, 上記の系 1 により $M_\tau(x)$ により $M(x)$ を近似して最良の結果を出すことは難しい．また, ここでリーマン予想と $J_{-1}(T) \ll T$ の仮定の下での $M(x)$ の結果を改善できないかと考えた理由は現在の最良の結果が非常に単純な方法でほとんど自明ともいえる結果であるからである．しかし, いくつかの方法でその改良を試みたが失敗した．上の考察もその 1 つの失敗例である．その失敗の原因だが明示公式の零点の和の中に三角不等式で項 1 つ 1 つに絶対値を取ることであると思う．その方法で得られる結果としては現在の Ng の結果 $M(x) \ll x^{1/2}(\log x)^{5/4}$ が最良になるであろう．

3　$M(x)$ の積分に関する結果

このセクションではこれまでに述べたリース平均を $M(x)$ へ応用して得られた結果を紹介したいと思う．ここで $M(x)$ の積分を調べる動機はやはり問題 2 である．$M(x)$ の積分に関しては Ng が [7] で予想 4 の下でいくつかの研究を行っている．しかし, 予想 4 は非常に強い予想である．また, 予想 4 と問題 2 との明確な関係性はまだ明らかになっていない．そのためここでは予想 4 よりも弱い主張である次の予想下で議論をする．

予想 5 (弱メルテンス予想)**.**

$$\int_1^x \left(\frac{M(u)}{u}\right)^2 du \ll \log x.$$

この予想は 1950 年頃から考えられており E. C. Titchmarsh [9] がこの予想の下での議論を詳しく行っている．弱メルテンス予想は不等式 (1.3) を弱くしたものである．実際に不等式 (1.3) を仮定することで弱メルテンス予想が得られることはすぐにわかる．弱メルテンス予想からわかることは多く, 例えばリーマン予想, (SZC) と不等式,

$$J_{-1}(T) = \sum_{0<\gamma<T} \frac{1}{|\zeta'(\rho)|^2} = o\left(T^2\right)$$

が得られることがわかっている．そのためこの予想下で $M(x)$ を調べることは問題 2 の真偽を判断するためには重要な研究であると著者は思う．

Ng はリーマン予想と Gonek-Hejhal Hypothesis から弱メルテンス予想が成り立つことを示した．つまり弱メルテンス予想はリーマン予想かつ Gonek-Hejhal Hypothesis よりも弱い予想である．さらに Ng は弱メルテンス予想よりもより精密な漸近式

$$\int_1^x \left(\frac{M(u)}{u}\right)^2 du \sim \log x \sum_{\gamma} \frac{1}{|\rho\zeta'(\rho)|^2}$$

をリーマン予想と Gonek-Hejhal Hypothesis の仮定の下で示している．

弱メルテンス予想の仮定の下で以下の結果が成り立つ．

系 2. 弱メルテンス予想を仮定する．このとき, 任意の $\tau > 1/2$ に関して

$$M_\tau(x) = x^{1/2} \sum_{\gamma} \frac{x^{i\gamma}}{\zeta'(\rho)} \frac{\Gamma(\rho)}{\Gamma(\rho+\tau+1)} + \sum_{l=0}^{\infty} \operatorname*{Res}_{s=-l} \left(\frac{x^s}{\zeta(s)} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(1+\tau+s)}\right)$$

が成り立ち, 最初の級数は $x \geq \delta$ に関して, 絶対かつ一様収束する. 特に, $\tau \geq 1/2+\varepsilon$ に関して

$$M_\tau(x) \ll_\varepsilon x^{1/2}$$

が成り立つ.

このように弱メルテンス予想の仮定の下では $M_\tau(x)$ に関して不等式 (1.3) に対応するものを得ることができることがわかる.
さらにこの系 2 により, 次の系らを得ることもできる.

系 3. 弱メルテンス予想を仮定する, このとき, 任意の実数 κ に対して,

$$\int_1^x \frac{M(u)}{u^\kappa}du = x^{3/2-\kappa}\sum_\gamma \frac{x^{i\gamma}}{\zeta'(\rho)\rho(\rho+1-\kappa)} + E_\kappa(x)$$

が成り立つ. ただし,

$$E_\kappa(x) = \begin{cases} A(\kappa) + O\left(x^{1-\kappa}\right) & \text{if } 1 < \kappa, \\ O(\log x) & \text{if } \kappa = 1, \\ O(x^{1-\kappa}) & \text{if } \kappa < 1, \end{cases}$$

$$A(s) = \frac{10s-12}{s-1} + s\sum_{l=1}^\infty \frac{2(-1)^l(2l-2)!(2\pi)^{2l}}{\{(2l)!\}^2\,(2l+s-1)\,\zeta(2l+1)} - s\sum_\gamma \frac{1}{\zeta'(\rho)\rho(\rho+1)(\rho-s+1)}$$

である. さらに $\kappa > \frac{1}{2}$ に対して,

$$\frac{1}{\zeta(\kappa)} = \kappa A(\kappa+1)$$

が成り立ち, $\kappa \leq \frac{3}{2}$ では

$$\int_1^x \frac{M(u)}{u^\kappa}du \ll x^{3/2-\kappa} \tag{3.1}$$

も成り立つ.

注意 1. 系 3 は仮定をリーマン予想, (SZC) と

$$J_{-1}(T) := \sum_{0<\gamma<T} \frac{1}{|\zeta'(\rho)|^2} \ll \frac{T^3}{(\log T)^{3+\delta}}$$

まで弱くしても成り立つ結果である.

ここで, 弱メルテンス予想の仮定の下, コーシーシュワルツの不等式による簡単な考察により

$$\int_1^x \frac{|M(u)|}{u^{3/2}}du \leq \left(\int_1^x \left(\frac{M(u)}{u}\right)^2 du\right)^{1/2} \left(\int_1^x \frac{du}{u}\right)^{1/2} \ll \log x$$

となることはすぐにわかる.
また, Ng はリーマン予想と Gonek-Hejhal Hypothesis の仮定の下で

$$\int_1^x \frac{M(u)}{u^{3/2}}du = o(\log x)$$

となることも言及している. 不等式 (3.1) はこの結果の改良も含んだ結果となっている. この改良は $M_\tau(x)$ の明示公式を弱メルテンス予想の下で考えることにより成功した. 実際に $M(x)$ の明示公式は弱メルテンス予想の仮定の下では $x>1$ に関して一様収束せずそこから積分を考えることは簡単ではない. しかし系 2 により弱メルテンス予想の仮定の下では $\tau>1/2$ において $M_\tau(x)$ の明示公式が一様収束することがわかる. そして $x^\tau M_\tau(x)=\int_1^x u^{\tau-1}M_{\tau-1}(u)du$ と書けることから $M_\tau(x)$ を調べることで私たちは $M(x)$ の積分の情報を得ることできる.

ここで上記の不等式 (3.1) がどのくらいよい不等式なのかが自然と気になる問題であろう. それについてはすでに unconditionl な下でオメガ評価を得ることに成功しており (3.1) は得られる最良の評価となっている. そのオメガ評価を以下に記す.

定理 4. 任意の $\kappa\le 3/2$ に対して,

$$\int_1^x \frac{M(u)}{u^\kappa}du-\frac{2}{\zeta(1/2)}=\Omega_\pm\left(x^{3/2-\kappa}\right)$$

が成り立つ.

ここまでは $M(x)$ そのままの積分について調べた結果を述べた. しかし, 問題 2 の真偽を議論するのであれば絶対値付きの積分の評価も気になる問題の 1 つである. 最後はそれについて言及しておく. まず Ng により

$$0<\delta(S):=\lim_{X\to\infty}\frac{1}{\log X}\int_{[2,X]\cap S}\frac{dt}{t}<1,$$
$$S=\{x\ge 1\,|\,|M(x)|\le\sqrt{x}\}$$

がリーマン予想, Linear Independence Conjecture と不等式

$$\sum_{0<\gamma<T}\frac{1}{|\rho\zeta'(\rho)|}\asymp(\log T)^{5/4}\quad\text{and}\quad\sum_{\gamma>T}\frac{1}{|\rho\zeta'(\rho)|^2}\asymp\frac{1}{T}$$

の下で成り立つことが示された [7]. これを応用することで次の評価

$$\int_1^x\frac{|M(u)|}{u^{3/2}}du\asymp\log x$$

がリーマン予想, Linear Independence Conjecture, $J_{-1}(T)\ll T$, $\sum_{0<\gamma<T}1/|\rho\zeta'(\rho)|\asymp(\log T)^{5/4}$ らの仮定の下で成り立つことを示すことができる. このように $M(x)$ は尤もらしい予想下の下では平均的には不等式 (1.3) をみたすことが考察される. しかし, これらの仮定はやはり強くこのような仮定を課さずに議論したいのが本音である. そのため今回は弱メルテンス予想などの比較的弱い仮定の下での研究を行った.

謝辞

文末となりますが, この場を借りてこのような報告集, 及び講演の機会をくださった福岡数論研究集会のオーガナイザーの皆様に感謝申し上げます.

参考文献

[1] H. M. Bui and D. R. Heath-Brown, On simple zeros of the Riemann zeta-function, Bull. London Math. Soc. **45** (2013), 953–961.

[2] S. M. Gonek, On negative moments of the Riemann zeta-function, Mathematika **36** (1989), 71–88.

[3] D. Hejhal, On the distribution of $\log\left|\zeta'(\frac{1}{2}+it)\right|$, In: Number theory, trace formula and discrete groups, (Oslo, 1987), 343–370, Academic Press, Boston, MA, 1989.

[4] C. P. Hughes, J. P. Keating and Neil O'Connell, Random matrix theory and the derivative of the Riemann zeta function, Proc. Roy. Soc. London Ser. A **456** (2000), 2611–2627.

[5] A. E. Ingham, On two conjectures in the theory of numbers, Amer. J. Math. **64** (1942), 313–319.

[6] S. Inoue, Relations among some conjectures on the Möbius function and the Riemann zeta-function, arXiv:1705.00853.

[7] N. Ng, The distribution of the summatory function of the Möbius function, Proc. London Math. Soc. (3) **89** (2004), 361–389.

[8] A. M. Odlyzko and H. J. J. te Riele, Disproof of the Mertens conjecture, J. Reine Angrew. Math. **357** (1984), 138–160.

[9] E. C. Titchmarsh, The theory of the Riemann zeta-function, Second edition, Edited and with a preface by D. R. Heath-Brown, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1986.