高次 Mahler 測度とゼータ Mahler 測度の解析的性質

川村 悟史 (東北大学)

概 要

本報告では, まず Biswas-Monico による, 特殊な 1 変数多項式に対する高次 Mahler 測度の極限値の計算を改良し, 一般の 1 変数多項式に対する極限値を求める. 続いて 1 変数多項式に対するゼータ Mahler 測度の有理型函数としての解析接続を行い, すべての極が 1 位であることおよび, ある点において留数が消えない場合があることを計算することで, 整函数とはならないことを述べる.

1 Introduction

高次 Mahler 測度 (以下 HMM) とゼータ Mahler 測度 (以下 ZMM) は, いずれも K. Mahler による Mahler 測度を一般化したものであり, 黒川-Lalín-落合 [5] と赤塚 [1] において各々導入された. 各々は以下で定義される:

Definition 1 (高次 Mahler 測度, ゼータ Mahler 測度; [1], [5])**.** T^n をトーラス

$$T^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n \ ; \ |x_1| = \cdots = |x_n| = 1\}$$

とする.

$f = f(x_1, \ldots, x_n)$ を 0 ではない $\mathbb{C}$ 上の多項式, k を 0 以上の整数とするとき, f の k 次 Mahler 測度 $m_k(f)$ を次で定義する:

$$m_k(f) := \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_{T^n} \log^k |f(x_1, \ldots, x_n)| \frac{dx_1}{x_1} \cdots \frac{dx_n}{x_n} \ (\in \mathbb{R}).$$

ただし $\log^k(x) = (\log(x))^k$ である. この定義において, $k = 1$ のときは, 古典的な Mahler 測度に一致する.

また, f のゼータ Mahler 測度 $Z(s, f)$ を複素変数 s の函数として, 次で定義する:

$$Z(s, f) := \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_{T^n} |f(x_1, \ldots, x_n)|^s \frac{dx_1}{x_1} \cdots \frac{dx_n}{x_n}.$$

Mahler 測度は多項式の対数を取り, 複素トーラス上で積分することで得られる実数値である. HMM は, 対数の冪を取って積分を行うと得られる実数値である. ZMM はこれら HMM の (指数型) 母函数として理解できる.

HMM の計算を実際に行った例として, 以下が挙げられる:

Example 1 ([1],[5])**.**

$$Z(s, x-1) = \frac{2^s}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}, \quad m_k(x-1) \in \left\langle \prod_{j=1}^{h} \zeta(b_j) \ ; \ h \geq 1, \ \sum_{j=1}^{h} b_j = k \right\rangle_{\mathbb{Q}}.$$

この例のように, HMM はガンマ函数や超幾何函数, 多重ポリログ, 多重ゼータ函数といった特殊函数やその特殊値を用いて表示されることが知られている. その応用として, 例えばこれら特殊函数の特殊値の超越性判定問題がある. 具体的な数の超越性判定において, 積分で表示するということは有効な手段であり, Mahler 測度を利用して, 様々な数の超越性が判定できると期待される. また, それが Kontsevich-Zagier の周期であることも理解できる. ここで Kontzevich-Zagier の周期とは以下の $\overline{\mathbb{Q}}$-代数を指す:

Definition 2 (Kontsevich-Zagier の周期環; [4])**.** 実数 α が (Kontsevich-Zagier の) 基本周期であるとは, 数論的領域 $D \subset \mathbb{R}^n$ と $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n)$ が存在して,

$$\alpha = \int_D f(x)dx$$

なる形の絶対収束積分の形で書けるときをいう. ただし, D が数論的領域とは, $g_1, \ldots, g_k \in \mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n)$ が存在して,

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ g_1(x) > 0, \ldots, g_k(x) > 0\}$$

と書けるときをいう. 基本周期の $\overline{\mathbb{Q}}$-線形結合を周期といい, その全体を $\mathcal{P}$ で表す. $\mathcal{P}$ は Fubini の定理から $\overline{\mathbb{Q}}$-代数をなす.

HMM を明示的に計算することは, その応用上も重要だが, 実際に計算が済んでいるケースは現時点では少なく, HMM の計算の難しさを物語っている. **そこで ZMM を研究するモチベーションは, HMM の母函数であることを活かし, 直接の計算では理解ができないような HMM の情報が得られる可能性があることである.** たとえば Riemann ゼータ函数は函数等式を持つが, そこから Riemann ゼータ函数の負の整数点での値が求められる. これを念頭に置くと **ZMM が函数等式をもつならば, HMM の情報を留数の計算などから求められる可能性がある.** そこで ZMM に函数等式が存在するかは重要な研究課題であり, その前段階として解析接続を持つかを確かめることが本研究の目的である.

そのため HMM と ZMM の解析的性質を調べる必要があるが, これについては [1] において以下の 2 つの定理が得られている:

Theorem 1 (ZMM の存在定理; 赤塚 [1])**.** $f \in \mathbb{C}[x_1^{\pm}, \ldots, x_n^{\pm}]\backslash\{0\}$ とする. $Z(s, f)$ は $\Re s > {}^{\exists}\sigma_0(f)$ において絶対かつ s について広義一様収束し, この範囲で正則函数を定める. また k 次の導関数は,

$$\frac{d^k}{ds^k} Z(s, f) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_{T^n} |f(x_1, \ldots, x_n)|^s \log^k(|f(x_1, \ldots, x_n)|) \frac{dx_1}{x_1} \cdots \frac{dx_n}{x_n}$$

で与えられる.

Theorem 2 (HMM の存在定理; 赤塚 [1])**.** $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]\backslash\mathbb{C}$ に対して, 以下が成立.

(1) $\sigma_0(f) \le -d^{\min}(f)^{-1} < 0$.

(2) $V(f) \cap T^n = \emptyset$ ならば, $\sigma_0(f) = -\infty$. ただし,

$$V_n(f) := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n \ ; \ f(x_1, \ldots, x_n) = 0\}.$$

以上の 2 つの定理は変数の数に依らず成立する定理である. 一方で 1 変数の多項式に対してのみではあるが, HMM の極限値が Biswas-Monico によって計算されている:

Theorem 3 (Biswas-Monico [2])**.** 0 でない 1 変数多項式 $f \in \mathbb{C}[x]$ に対して次が成立:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|m_k(f)|}{k!} = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\sum_{a \in V_1(f)\cap T^1} \frac{1}{|f'(a)|} & \text{if } f \text{ has no multiple roots on } T^1, \\ \infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

本報告における主定理はこれらの結果に関連する結果であるが, その定式化のためには与えられた多項式のトーラス上の多重度を測る枠組みが必要であった:

Definition 3 (T^1-重複度)**.** 多項式 $f(x) \in \mathbb{C}[x]\backslash\{0\}$ に対して, その T^1-重複度 $\mu(f)$ を以下で定義する:

$$\mu(f) := \max\{\mu_a(f)\ ;\ a \in T^1\}.$$

ただし, 多項式 f と $a \in \mathbb{C}$ に対し, $f(x) = (x-a)^\mu g(x),\ g(a) \neq 0$ となる整数 μ を $\mu_a(f)$ と定める.

Remark 1. f は多項式なので, 代数学の基本定理から根を有限個しか持たず, $\mu(f)$ は well-defined である.

この定義のもと以下が成立する. すなわち 1 変数多項式に対する ZMM の解析的性質として, 全平面への解析接続を持つことを得た:

Theorem 4. 任意の $f \in \mathbb{C}[x]\backslash\{0\}$ に対し, $Z(s,f)$ は有理型函数として全平面へ解析接続され, $\mathfrak{P}(f)$ の点を除き正則である. ただし, $\mathfrak{P}(f)$ は $Z(s,f)$ の possible pole の集合で,

$$\mathfrak{P}(f) := \left\{ -\frac{k}{\mu_a(f)}\ ;\ k \in \mathbb{Z}_{>0},\ a \in \tilde{V}(f) \right\} (\subset \mathbb{Q}_{<0})$$

で与えられる. さらに, 任意の $Z(s,f)$ の極は 1 位の極である. とくに, $s = -\mu(f)^{-1}$ での留数は次のように書き表せる:

$$\mathrm{Res}\left(Z(s,f),\ s = -\frac{1}{\mu(f)} \right) = \frac{\Lambda(f)}{\mu(f)}\ (\neq 0).$$

ただし, この定理中に現れる $\Lambda(f)$ は HMM の一種の極限値であり, 次で与えられる:

Theorem 5. 多項式 $f(x) \in \mathbb{C}[x]\backslash\{0\}$ に対して, その T^1-重複度を $\mu = \mu(f)$ とおく. $\mu > 0$ のとき以下が成立:

$$\Lambda(f) := \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\mu^k} \frac{|m_k(f)|}{k!} = \frac{1}{\pi} \sum_{a \in V_1(f)\cap T^1,\ \mu_a(f)=\mu} \left(\frac{\mu!}{|f^{(\mu)}(a)|} \right)^{\frac{1}{\mu}}.$$

Remark 2. Theorem 5 は $\mu(f) = 1$ に制限すると Biswas-Monico の定理を復元するため, この定理の拡張となっている.

2 主定理の証明方針

HMM と ZMM はいずれも積分で定義される. そこで証明の方針としては以下を取る:

(i) 積分を多項式のトーラス上の零点の近傍上の積分に分割する.

(ii) それぞれの積分を評価, ないしは解析接続する.

この方法は先行研究である Biswas と Monico の結果 ([2]) でも用いられた方法であり, これを足掛かりとした. 証明は筆者のプレプリント ([3]) を参照いただきたい.

Sketch for Theorem 5. $\widetilde{V}_1(f) := V_1(f) \cap T^1$ と表記する. f を

$$f(x) = g(x) \prod_{a \in \widetilde{V}_1(f)} (x-a)^{\mu_a}$$

と因数分解し, T^1 上の零点に着目する.

記号をいくつか定義する. $a \in \widetilde{V}_1(f)$ を $a = \mathrm{e}(\alpha)$, $\alpha \in]0,1[$ と書くとき, $\varepsilon > 0$ に対して $B(\alpha;\varepsilon){:=}\{t \in \mathbb{R}\ ;\ |t-\alpha| < \varepsilon\}$ と定義する. さらに円盤 $B(\alpha;\varepsilon)$ たちの補集合を $A(\varepsilon) := [0,1] \setminus \coprod_{\mathrm{e}(\alpha)\in\tilde{V}_1(f)} B(\alpha;\varepsilon)$ と表記する.

$\varepsilon > 0$ を十分小さくとることで, 円盤たちが互いに交わらないようにできるので,

$$m_k(f) = \int_{[0,1]} \log^k(|\tilde{f}(t)|)dt = \left(\int_{A(\varepsilon)} + \sum_{\mathrm{e}(\alpha)\in\widetilde{V}_1(f)} \int_{B(\alpha;\varepsilon)} \right) \log^k(|\tilde{f}(t)|)dt$$

を得る. 以下でこれらの積分を評価することで結論を得た. □

Sketch for Theorem 4. 証明のためいくつかの記号と補題を用意する. まず記号として, 局所ゼータ Mahler 測度と Mahler 核を定める:

$f \in \mathbb{C}[x]$ と (Lebesgue) 可測集合 $U \subset [0,1]$ に対して,

$$Z_U(s,f) := \int_U |\widetilde{f}(t)|^s dt$$

と書き, U における局所ゼータ Mahler 測度 (Local Zeta Mahler Measure; LZMM) と呼ぶ.

また $f \in \mathbb{C}[x]$ と $a = \mathrm{e}(\alpha) \in \widetilde{V}_1(f)$ に対して, f の a における Mahler 核とは,

$$K_a[f](t,s) := \left|\frac{\sin(t)}{t}\right|^{\mu_a s} \left(\left|\widetilde{f_a^\times}\left(\alpha + \frac{t}{\pi}\right)\right|^s + \left|\widetilde{f_a^\times}\left(\alpha - \frac{t}{\pi}\right)\right|^s \right)$$

である. ただし多項式 f に対して, $f_a^\times(x) := f(x)/(x-a)^{\mu_a(f)}$ である. これらの記号を用いると, ZMM は LZMM の和として,

$$Z(s,f)(= Z_{[0,1]}(s,f)) = Z_{A(\varepsilon)}(s,f) + \sum_{a=\mathrm{e}(\alpha)\in\widetilde{V}_1(f)} Z_{B(\alpha,\varepsilon)}(s,f)$$

と表示され, 零点の近傍における LZMM は Mahler 核を用いて,

$$Z_{B(\alpha;\varepsilon/\pi)}(s,f) = \frac{2^{\mu_a s}}{\pi} \int_0^\varepsilon t^{\mu_a s} K_a[f](t,s)dt$$

と書けることに注意されたい. 続いて補題として以下を認める:

Lemma 1. 任意の $f \in \mathbb{C}[x]\setminus\{0\}$ と, その根 $a = \mathrm{e}(\alpha) \in \widetilde{V}_1(f)$ に対し, $0 < \varepsilon < 1$ を $[-\varepsilon,\varepsilon]$ において $\widetilde{f_a^\times}\left(\alpha + \dfrac{t}{\pi}\right)$ が零点をもたないように取る. このとき, t, s の函数 $K_a[f](t,s)$ は次を満たす:

(i) $s \in \mathbb{C}$ を固定するごとに, $K_a[f](t,s)$ は t について, $[0,\varepsilon]$ 上の C^∞-級函数をなす.

(ii) $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする. $t \in [0,\varepsilon]$ を固定するごとに, $\frac{\partial^l}{\partial t^l} K_a[f](t,s)$ は s について $\mathbb{C}$ 上の正則函数をなす.

(iii) $\mu \in \mathbb{R}_{>0}$, $c \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする. このとき,

$$I(s) := \int_0^\varepsilon t^{\mu s + c} \frac{\partial^l}{\partial t^l} K_a[f](t,s) dt$$

は $\mu \Re(s) + c > -1$ を満たす $\mathbb{C}$ の右半平面における正則函数をなす.

この Lemma における (iii) の証明は Morera の定理や Fubini の定理などから正当化される. 赤塚の "ZMM の存在理" と Lemma 1 から Theorem 2 の証明が得られる. $\square$

3 今後の課題

1 変数多項式に対する ZMM は全平面への解析接続を持つことが分かったが, 本来知りたい情報は函数等式を経由して HMM の計算に生かすことであった.

それゆえ函数等式を目指すにおいて, 今回求められた ZMM の各極における Laurent 展開を計算し, その係数と HMM の関係性や対称性のようなものが見つかるか観察するべきである. 現時点では留数の計算に留まるのみで, 定数項の計算にも至っていない.

また留数が 0 となる場合を排除できていないため, ZMM の possible pole は, 本当は極ではない可能性もある. この判別を行うことも重要である.

別の課題として, 多変数多項式に対する ZMM の解析接続および函数等式も考える必要がある. こちらは最近, 多くの多変数多項式で全平面への解析接続が得られる, という趣旨の結果を得た. これでかなりの部分の多項式に関して ZMM の有理型函数としての解析接続が可能になり, 負の整数点をも含めた特殊値を考察できる段階になったと言ってよいと考えている.

謝辞

第 11 回福岡数論研究会組織委員の金子昌信先生, 權寧魯先生, 岸康弘先生に, 今回の講演機会を与えていただいたことをこの場をお借りして感謝申し上げます.

参考文献

[1] H. Akatsuka, *Zeta Mahler measures*, J. Number Theory **129** (2009), 2713–2734.

[2] A. Biswas and C. Monico, *Limiting Value of Higher Mahler measures*, J. Number Theory **143** (2014), 357–362.

[3] S. Kawamura, *On higher Mahler measures and zeta Mahler measures for one variable polynomials*, preprint.

[4] M. Kontsevich and D. Zagier, Periods, In: Mathematics unlimited—2001 and beyond, 771–808, Springer, Berlin, 2001.

[5] N. Kurokawa, M. Lalín and H. Ochiai, *Higher Mahler measures and zeta functions*, Acta Arith. **135** (2008), 269–297.