# On certain identities among the multiple zeta values

広瀬 稔 (九州大学)

## 1 概要

多重ゼータ値とは正整数 $k_1,\dots,k_d$ (ただし $k_d > 2$) に対して, 次の無限級数で定義される実数である:

$$\zeta(k_1,\dots,k_d) := \sum_{0<n_1<\cdots<n_d} n_1^{-k_1}\cdots n_d^{-k_d}.$$

多重ゼータ値が満たす様々な線形関係式族は, 多重ゼータ研究の主要なトピックの一つである. 本稿のテーマは, 筆者と共同研究者の佐藤信夫[1]が発見・証明した或る強力な線形関係式族 (定理 1) である. この関係式族を用いて我々は, 今まで未解決であった次の 6 つの予想[2]を証明できたので, それについて紹介したい.

1. Borwein, Bradley, Broadhurst の予想式 (1997) [1, equation (18)]
2. Borwein, Bradley, Broadhurst, Lisonek の第一の予想式 (1998) [2, Conjecture 1]
3. Borwein, Bradley, Broadhurst, Lisonek の第二の予想式 (1998) [2, Conjecture 2]
4. Hoffman の予想式 (2000) [4]
5. Charlton の第一の予想式 (2016) [3, Conjecture 2.5.1]
6. Charlton の第二の予想式 (2016) [3, Conjecture 2.8.2]

## 2 Charlton 以前の予想

Zagier は多重ゼータに関する次の等式

$$\zeta(\{1,3\}^n) = \frac{2\pi^{4n}}{(4n+2)!}$$

を予想し, Broadhurst はこれを証明した. 当時から知られていた等式

$$\zeta(\{2\}^n) = \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!}$$

を用いれば, この式は

$$\zeta(\{1,3\}^n) = \frac{1}{2n+1}\zeta(\{2\}^{2n})$$

と書ける. Borwein, Bradley, Broadhurst は, これの一般化として次を予想した.

[1]国立台湾大学国家理論科学研究中心 (NCTS)

[2]ただし, これらは独立ではない. 2 は 1 の, 5 は 2 と 4 の, 6 は 3 の一般化である.

**予想 1** ([1, equation (18)])**.** 任意の $m, n \geq 0$ に対して

$$\zeta(\{\{2\}^m, 1, \{2\}^m, 3\}^n, \{2\}^m) = \frac{1}{2n+1}\zeta(\{2\}^{2n+(2n+1)m}).$$

Borwein, Bradley, Broadhurst, Lisonek は次の $Z$ 記法を用いてこの予想を一般化した.

**定義 1.** $2n+1$ 個 $(n \geq 0)$ の非負整数 $m_0, \ldots, m_{2n}$ に対して

$$Z(m_0, m_1, \ldots, m_{2n}) := \zeta(\{2\}^{m_0}, 1, \{2\}^{m_1}, 3, \{2\}^{m_2}, \ldots, 1, \{2\}^{m_{2n-1}}, 3, \{2\}^{m_{2n}}).$$

**予想 2** ([2, Conjecture 1])**.** 任意の非負整数 $m_0, \ldots, m_{2n}$ に対して

$$\sum_{j=0}^{2n} Z(m_{2n-j+1}, \ldots, m_{2n}, m_0, \ldots, m_{2n-j}) = \zeta(\{2\}^{2n+\sum_{j=0}^{2n} m_j}).$$

予想 1 が予想 2 から従うことは $\zeta(\{\{2\}^m, 1, \{2\}^m, 3\}^n, \{2\}^m) = Z(\{m\}^{2n+1})$ からすぐに分かる. また, これとは別のタイプの式として Borwein, Bradley, Broadhurst, Lisonek は次を予想した.

**予想 3** ([2, Conjecture 2])**.** 任意の非負整数 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2$ に対して

$$\begin{aligned} &z(a_1, b_1, a_2, b_2, a_3) + Z(a_2, b_1, a_3, b_2, a_1) + Z(a_3, b_1, a_1, b_2, a_2) \\ &\qquad = Z(a_1, b_2, a_2, b_1, a_3) + Z(a_2, b_2, a_3, b_1, a_1) + Z(a_3, b_2, a_1, b_1, a_2). \end{aligned}$$

また, Hoffman は次の形の等式を予想した.

**予想 4** ([4])**.** 任意の非負整数 $n$ に対して

$$2\zeta(3, 3, \{2\}^n) - \zeta(3, \{2\}^n, 1, 2) = -\zeta(\{2\}^{n+3}).$$

## 3 Block 記法と Charlton の予想

Charlton は, Block 記法と呼ばれる記法を導入し, 予想 2, 3, 4 を一般化した. Block 記法は多重ゼータ値の反復積分表示と相性がよいので, まず多重ゼータ値の反復積分表示について復習する. 実数 $a_0 \leq a_{n+1}$ と $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C} \setminus (a_0, a_{n+1})$ に対して

$$I(a_0, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) := \int_{a_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < a_{n+1}} \prod_{j=1}^{n} \frac{dt_j}{t_j - a_j}$$

と置く. このとき多重ゼータ値は

$$\zeta(k_1, \ldots, k_d) = (-1)^d I(0, 1, \{0\}^{k_1-1}, 1, \{0\}^{k_2-1}, \ldots, 1, \{0\}^{k_d-1}, 1)$$

と書ける.

**定義 2.** 正整数 $n_1, \ldots, n_d$ $(d \geq 1,\ n_1, n_d \geq 2)$ に対して

$$I_{\mathrm{bl}}(n_1, \ldots, n_d) := I(a_1, a_2, \ldots, a_{n_1+\cdots+n_d}).$$

ここで $a_1 = 0$ であり, $j < n_1 + \cdots + n_d$ に対して $a_{j+1} \in \{0, 1\}$ は次で定義される.

$$a_{j+1} := \begin{cases} 1 - a_j & j \notin \{n_1, n_1 + n_2, \ldots, n_1 + \cdots + n_d\} \\ a_j & j \in \{n_1, n_1 + n_2, \ldots, n_1 + \cdots + n_d\}. \end{cases}$$

つまり, $I_{\mathrm{bl}}(n_1,\dots,n_d)$ とは, 反復積分記号 $I(-)$ の中に, 長さ $n_1,\dots,n_d$ の 01 交互列 (ブロック) を各列の端の数字が一致するように並べたものである. 例えば

$$I_{\mathrm{bl}}(3,4,5)=I(\overbrace{0,1,0},\overbrace{0,1,0,1},\overbrace{1,0,1,0,1})$$

となる. このとき Block 記法と $Z$ 記法の間には次の関係がある:

$$Z(m_0,\dots,m_{2n})=I_{\mathrm{bl}}(2m_0+2,\dots,2m_{2n}+2).$$

$Z$ 記法は一部の多重ゼータ値しか表せなかったのに対し, Block 記法は全ての多重ゼータ値を表すことができる. Charlton は, この Block 記法を用いて予想 2 と予想 4 を統合する一般化となる次の予想を提出した.

**予想 5** ([3, Conjecture 2.5.1])**.** $n$ を正整数とする. 2 以上の整数 $\ell_1,\dots,\ell_n$ に対して

$$\sum_{i=0}^{n-1} I_{\mathrm{bl}}(\ell_{n-i+1},\dots,\ell_n,\ell_1,\dots,\ell_{n-i})=\begin{cases} I_{\mathrm{bl}}(\ell_1+\cdots+\ell_n) & n:\mathrm{odd} \\ 0 & n:\mathrm{even}.\end{cases}$$

予想 5 から予想 2 と予想 4 が従うことは簡単に確かめられる. また, Charlton は予想 3 が双対関係式を用いて

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_3}\mathrm{sgn}(\sigma)Z(a_{\sigma(1)},b_1,a_{\sigma(2)},b_2,a_{\sigma(3)})=0$$

と表されることに注意し, 予想 3 の一般化として次を予想した.

**予想 6** ([3, Conjecture 2.8.2])**.** $n$ を正整数とする. 2 以上の整数 $a_1,\dots a_{n+1},b_1,\dots,b_n$ に対して

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{n+1}}\mathrm{sgn}(\sigma)I_{\mathrm{bl}}(a_{\sigma(1)},b_1,a_{\sigma(2)},b_2,\dots,a_{\sigma(n)},b_n,a_{\sigma(n+1)})=0.$$

## 4 主結果

$\mathfrak{X}=\mathbb{Q}\langle x_2,x_3,x_4,\dots\rangle$ を形式的な記号 $x_2,x_3,x_4,\dots$ から生成される非可換環とし $\mathfrak{X}^0=\ker(\mathfrak{X}\to\mathbb{Q})\subset\mathfrak{X}$ を定数項が 0 となる部分空間とする. 線形写像 $L:\mathfrak{X}^0\to\mathbb{R}$ を

$$L(x_{i_1}\cdots x_{i_m}):=I_{\mathrm{bl}}(i_1,\dots,i_m)$$

で定義する. また $k\geq 2$ に対して線形写像 $s_k:\mathfrak{X}\to\mathfrak{X}$ を

$$s_k(1):=0,\quad s_k(x_iw):=x_{i+k}w\quad(w\in\mathfrak{X})$$

で定義する. さらに変形された shuffle 積 $\widetilde{ш}:\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}\to\mathfrak{X}$ を次で定まる双線型写像とする:

$$\begin{aligned} u\,\widetilde{ш}\,1 &:= u\,\widetilde{ш}\,1 := u, \\ x_au\,\widetilde{ш}\,x_bv &:= x_a(u\,\widetilde{ш}\,x_bv)+x_b(x_au\,\widetilde{ш}\,v)+s_{a+b}(u\,\widetilde{ш}\,v). \end{aligned}$$

このとき我々の主定理は次のように書ける.

**定理 1** (Sato-H.)**.** 任意の $u,v\in\mathfrak{X}^0$ に対して

$$L(u\,\widetilde{ш}\,v)=0.$$

この定理の系として次が得られる.

**系 1.** 予想 1, 2, 3, 4, 5, 6 は全て正しい.

## 参考文献

[1] J. M. Borwein, D. M. Bradley and D. J. Broadhurst, Evaluations of $k$-fold Euler/Zagier sums: a compendium of results for arbitrary $k$, The Wilf Festschrift (Philadelphia, PA, 1996), Electron. J. Combin. **4** (1997), no. 2, Research Paper 5, 21 pp.

[2] J. M. Borwein, D. M. Bradley, D. J. Broadhurst and P. Lisoněk, Combinatorial aspects of multiple zeta values,Electron. J. Combin. **5** (1998), Research Paper 38, 12 pp.

[3] S. P. Charlton, Identities arising from coproducts on multiple zeta values and multiple polylogarithms, Durham theses, 2016, available at `http://etheses.dur.ac.uk/11834/`.

[4] M. Hoffman, Multiple Zeta Values, preprint, available at `http://www.usna.edu/Users/math/meh/mult.html`.