New functional equations of finite multiple polylogarithms

小野 雅隆 (慶應義塾大学)

はじめに

本稿は, 筆者が 2017 年 8 月 10 日に第 11 回福岡数論研究集会で行った講演の内容をまとめたものである. 2017 年 12 月現在, 有限多重ポリログと呼ばれる対象は 2 種類存在し, 1 つは佐久川–関型, もう 1 つは小野–山本型と呼ばれている. 佐久川–関型は有限多重ゼータ値の双対関係式をポリログに一般化することを目指して定義され, 小野–山本型は有限多重ポリログのシャッフル関係式は何ぞやということを探求する過程で定義された. それぞれ全く独立な研究動機から定義された対象であるが, 小野–山本型は佐久川–関型を用いた有限和で書き下すことができる [SS, Proposition 3.16]. 本稿では, 小野–山本型有限多重ポリログの “$t \leftrightarrow 1-t$” 型の函数等式を紹介する. また小野–山本型を佐久川–関型で書き下すことで, 同時に佐久川–関型有限多重ポリログの函数等式も得られたことになる. これについても深さが 3 と 4 のものを紹介する. 証明については [O] を参照していただきたい.

記号. r を非負整数とする. 正整数の組 $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ をインデックスと呼ぶ. ただし $r = 0$ のインデックスを $\emptyset$ と表す. $\mathrm{wt}(\mathbf{k}) := k_1 + \cdots + k_r$ を $\mathbf{k}$ の重さ, $\mathrm{dep}(\mathbf{k}) := r$ を $\mathbf{k}$ の深さと呼ぶ. また正整数 k, r に対し $(\{k\}^r) := (\underbrace{k, \ldots, k}_{r})$ と表す.

単位的可換環 R に対し, $\mathcal{A}_R := \left(\prod_p R/pR\right) \Big/ \left(\bigoplus_p R/pR\right)$ とおく [SS, Definition 3.1]. ただし p は有理素数全てをわたる. $\mathbb{Q}$ を $\mathcal{A}_R$ に対角的に埋め込むことができるので, $\mathcal{A}_R$ は $\mathbb{Q}$ 代数になる. 以下では $\mathcal{A}_R$ の元 $(a_p)_p$ とその p 成分 a_p を同一視し, $(\cdot)_p$ を省略する. 例えば $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}[t]}$ の元 $(t^p)_p$ は t^p と表記する. $R = \mathbb{Z}$ の時, $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}$ を $\mathcal{A}$ と略記する.

1 小野–山本型有限多重ポリログの函数等式

小野–山本型有限多重ポリログを定義する.

定義 1.1 ([OY, Definition 1.2])**.** インデックス $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ に対し, $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}[t]}$ の元

$$\pounds^{\mathrm{OY}}_{\mathcal{A},\mathbf{k}}(t) := \sideset{}{'}\sum_{0<l_1,\ldots,l_r<p} \frac{t^{l_1+\cdots+l_r}}{l_1^{k_1}(l_1+l_2)^{k_2}\cdots(l_1+\cdots+l_r)^{k_r}} \bmod p$$

を小野–山本型有限多重ポリログと呼ぶ. ただし $\sum'$ は分母が p と互いに素となるようにダミー変数 $l_1, \ldots, l_r$ が動くことを意味する.

主定理を述べるために, $\mathcal{A}$ の元 $\zeta^{(i)}_{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ を定義する. これは小野–山本型有限多重ポリログのシャッフル関係式を計算すると自然に現れる対象である.

定義 1.2 ([OY, Definition 2.1])**.** インデックス $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_r)$ と $1\le i\le r$ に対し,

$$\zeta_{\mathcal{A}}^{(i)}(\mathbf{k})=\sideset{}{'}\sum_{\substack{0<l_1,\ldots,l_r<p\\(i-1)p<l_1+\cdots+l_r<ip}}\frac{1}{l_1^{k_1}(l_1+l_2)^{k_2}\cdots(l_1+\cdots+l_r)^{k_r}} \bmod p\in\mathcal{A}$$

とおく. $\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}):=\zeta_{\mathcal{A}}^{(1)}(\mathbf{k})$ を有限多重ゼータ値と呼ぶ.

注意 1.3. $\zeta_{\mathcal{A}}^{(r)}(\mathbf{k})=(-1)^{\mathrm{wt}(\mathbf{k})}\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ となる. また $\zeta_{\mathcal{A}}^{(i)}(\mathbf{k})$ は有限多重ゼータ値の有限和で明示的に書くことができる [OY, Proposition 2.4].

次の定理が本稿の主定理である.

定理 1.4 (主定理, [O, Corollary 1.4])**.** 正整数 r に対し, $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}[t]}$ の元 f_r,g_r を

$$f_r(t):=\sum_{k=0}^{r-2}\left(\sum_{i=1}^{r-k-1}\zeta_{\mathcal{A}}^{(i)}(\{1\}^{r-k-2},2)t^{ip}\right)\pounds_{\mathcal{A},\{1\}^k}^{\mathrm{OY}}(t),$$
$$g_r(t):=\sum_{k=0}^{r-2}\left(\sum_{i=1}^{r-k-2}\zeta_{\mathcal{A}}^{(i)}(\{1\}^{r-k-2})t^{ip}\right)\pounds_{\mathcal{A},(2,\{1\}^k)}^{\mathrm{OY}}(t)$$

と定義する (空和は 0 と理解する). また

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A},\{1\}^r}(t):=\pounds_{\mathcal{A},\{1\}^r}^{\mathrm{OY}}(t)-\frac{1}{r!}\sum_{k=1}^{r}(f_k(t)+g_k(t))\pounds_{\mathcal{A},1}^{\mathrm{OY}}(t)^{r-k}$$

とおく. この時

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A},\{1\}^r}(t)=\mathcal{L}_{\mathcal{A},\{1\}^r}(1-t)$$

が成り立つ.

例 1.5. 以下, 深さが小さい場合から主定理が何を主張しているかを確認する.
(1) $r=1$: この場合, f_1 と g_1 の定義内の和は空和であるので $f_1(t)=g_1(t)=0$ となる. よって $\mathcal{L}_{\mathcal{A},1}(t)=\pounds_{\mathcal{A},1}^{\mathrm{OY}}(t)$ を得る. これより主定理は $\pounds_{\mathcal{A},1}^{\mathrm{OY}}(t)=\pounds_{\mathcal{A},1}^{\mathrm{OY}}(1-t)$ を意味する. この結果は既に (本質的に) Kontsevich[K, (A)] によって示されているが, 主定理が Kontsevich の結果の別証明を与えているわけではないことに注意する (主結果は Kontsevich の結果を用いて示される).
(2) $r=2$: この場合 $g_2(t)$ 内の和は空和なので 0 である. また深さ 1 の有限多重ゼータ値は 0 である [H, Theorem 4.3] から, $f_2(t)=\zeta_{\mathcal{A}}(2)t^p=0$ となる. 従って $\pounds_{\mathcal{A},(1,1)}^{\mathrm{OY}}(t)=\pounds_{\mathcal{A},(1,1)}^{\mathrm{OY}}(1-t)$ を得る. この結果は関によって既に示されている [Se, Theorem 14.6] が, この証明は関の証明とは異なる. 関は $\pounds_{\mathcal{A},(1,1)}^{\mathrm{OY}}(t)$ を佐久川–関型で書き下し, 佐久川–関型の函数等式を用いて変数を $1-t$ に変換した後, 再び小野–山本型に書き直すことで示している. つまり $r=2$ の場合の主定理は関の結果の別証明を与えている.
(3) $r=3$: この場合, $f_3(t)=\zeta_{\mathcal{A}}(1,2)t^p(1-t)^p=f_3(1-t)$, $g_3(t)=\zeta_{\mathcal{A}}(1)t^p\pounds_{\mathcal{A},2}^{\mathrm{OY}}(t)=0$ である. 従って主定理は $\pounds_{\mathcal{A},(1,1,1)}^{\mathrm{OY}}(t)=\pounds_{\mathcal{A},(1,1,1)}^{\mathrm{OY}}(1-t)$ を意味する.
(4) $r=4$: $f_4(t)=\zeta_{\mathcal{A}}(1,1,2)t^p(1-t^2)^p+\zeta_{\mathcal{A}}^{(2)}(1,1,2)t^{2p}+f_3(t)\pounds_{\mathcal{A},1}^{\mathrm{OY}}(t)$ となる. 重さが 4 の有限多重ゼータ値が 0 であること [H, p.360], 及び $\zeta_{\mathcal{A}}^{(i)}(\mathbf{k})$ が重さ $\mathrm{wt}(\mathbf{k})$ の有限多重ゼータ値の有限和で書けることから, $\zeta_{\mathcal{A}}(1,1,2)=\zeta_{\mathcal{A}}^{(2)}(1,1,2)=0$ となる. 従って $f_4(t)=f_4(1-t)$ となる.

一方 $g_4(t)=\zeta_{\mathcal{A}}(1,1)t^p(1+t^p)\pounds^{\mathrm{OY}}_{\mathcal{A},2}(t)$ となるが, $\zeta_{\mathcal{A}}(\{k\}^r)=0$ であるので [H, Theorem 4.4], $g_4(t)=0$ となる. 以上より, 主定理は $\pounds^{\mathrm{OY}}_{\mathcal{A},\{1\}^4}(t)=\pounds^{\mathrm{OY}}_{\mathcal{A},\{1\}^4}(1-t)$ を意味する.

(5) $r=5$: $f_5(t)=\zeta_{\mathcal{A}}(1,1,1,2)t^p(1-t)^p(1+t^p+t^{2p})+\zeta^{(2)}_{\mathcal{A}}(1,1,1,2)t^{2p}(1-t)^p+f_3(t)\pounds^{\mathrm{OY}}_{\mathcal{A},1}(t)^2$ となる. 重さ 5 の有限多重ゼータ値は全てベルヌーイ数で書けることが知られており [H, Theorem 7.1], $\zeta_{\mathcal{A}}(1,1,1,2)=2B_{p-5}, \zeta^{(2)}_{\mathcal{A}}(1,1,1,2)=0$ がわかる. 一方

$$\begin{aligned}
g_5(t) &= (\zeta_{\mathcal{A}}(1,1,1)t^p+\zeta^{(2)}_{\mathcal{A}}(1,1,1)t^{2p}+\zeta^{(3)}_{\mathcal{A}}(1,1,1)t^{3p})\pounds^{\mathrm{OY}}_{\mathcal{A},2}(t) \\
&\quad + (\zeta_{\mathcal{A}}(1,1)t^p+\zeta^{(2)}_{\mathcal{A}}(1,1)t^{2p})\pounds^{\mathrm{OY}}_{\mathcal{A},(2,1)}(t)+\zeta_{\mathcal{A}}(1)t^p\pounds^{\mathrm{OY}}_{\mathcal{A},(2,1,1)}(t) \\
&= \zeta^{(2)}_{\mathcal{A}}(1,1,1)t^{2p}\pounds^{\mathrm{OY}}_{\mathcal{A},2}(t)
\end{aligned}$$

であるが, $\zeta^{(2)}_{\mathcal{A}}(1,1,1)=4\zeta_{\mathcal{A}}(1,1,1)+\zeta_{\mathcal{A}}(2,1)+\zeta_{\mathcal{A}}(1,2)=\zeta_{\mathcal{A}}(2,1)+\zeta_{\mathcal{A}}(1,2)$ であり, $\zeta_{\mathcal{A}}(k_1,\dots,k_r)=(-1)^{k_1+\cdots+k_r}\zeta_{\mathcal{A}}(k_r,\dots,k_1)$[H, Theorem 4.5] を用いると 0 となる. これより $\pounds^{\mathrm{OY}}_{\mathcal{A},\{1\}^5}(t)-\pounds^{\mathrm{OY}}_{\mathcal{A},\{1\}^5}(1-t)=\frac{1}{5}B_{p-5}t^p(1-t^p)(2t^p-1)$ を得る. B_{p-5} は $\mathcal{A}$ の中で 0 でないと予想されているので, この予想が正しいなら $\pounds^{\mathrm{OY}}_{\mathcal{A},\{1\}^5}(t)\neq\pounds^{\mathrm{OY}}_{\mathcal{A},\{1\}^5}(1-t)$ となる.

(6) $r\geq 6$: この場合も $\zeta_{\mathcal{A}}(1,1,1,2)$ が現れるので, $\mathcal{A}$ において B_{p-5} が消えないならば, $r=5$ の場合の議論と同様に $\pounds^{\mathrm{OY}}_{\mathcal{A},\{1\}^r}(t)\neq\pounds^{\mathrm{OY}}_{\mathcal{A},\{1\}^r}(1-t)$ となる.

以上をまとめると, $1\leq r\leq 4$ に対して主定理は $\pounds^{\mathrm{OY}}_{\mathcal{A},\{1\}^r}(t)=\pounds^{\mathrm{OY}}_{\mathcal{A},\{1\}^r}(1-t)$ と同値である. また $r\geq 5$ の場合は $\pounds^{\mathrm{OY}}_{\mathcal{A},\{1\}^r}(t)\neq\pounds^{\mathrm{OY}}_{\mathcal{A},\{1\}^r}(1-t)$ と予想されるが, いずれにせよ "$t\leftrightarrow 1-t$" 型の函数等式を与えていることがわかる.

注意 1.6. $1\leq r\leq 5$ に対して $g_r(t)=0$ であったが, これは偶然ではないと思われる. 実際, 筆者は次を予想しており, 十中八九正しいと信じている.

予想. インデックス $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)$ と $1\leq i\leq r$ に対し

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}\zeta^{(i)}_{\mathcal{A}}(k_{\sigma(1)},\dots,k_{\sigma(r)})=0$$

が成り立つ. 特に $\zeta^{(i)}_{\mathcal{A}}(\{k\}^r)=0$ が成り立つ.

$g_r(t)$ の定義には $\zeta^{(i)}_{\mathcal{A}}(\{1\}^{r-k-2})$ が現れるため, この予想が正しければ全ての r に対して $g_r(t)=0$ が成り立つ. $i=1$ の場合, つまり通常の有限多重ゼータ値の場合は Hoffman が示している [H, Theorem 4.4]. $i\neq 1,r$ の場合, $\zeta^{(i)}_{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ は一般には有限多重ゼータ値の有限和であり有限多重ゼータ値そのものではないので, この予想は Hoffman の結果を一般化しているとは言い難いが, 対称和が消える $\mathcal{A}$ の元であって, 有限多重ゼータ値を含むある種の系列を与えていると言える.

この予想の証明は今後の課題である.

2 小野–山本型有限多重ポリログのシャッフル関係式

主定理の証明は $\pounds^{\mathrm{OY}}_{\mathcal{A},\{1\}^r}(t)$ と $\pounds^{\mathrm{OY}}_{\mathcal{A},1}(t)$ の積を再び小野–山本型有限多重ポリログで書き下す "シャッフル関係式" に基づく. 本来シャッフル関係式は多重ポリログに対して成り立つ関係式で, 多重ポリログの持つ反復積分表示から直ちに従う関係式である. ところが小野–山本型有限多重ポリログの反復積分表示は知られていない. そこで [OY] では小森, 松本及び津村 [KMT] による多重ポリログのシャッフル関係式の部分分数分解による別証明を基に, 部分分数分解を用いて小野–山本型有限多重ポリログのシャッフル関係式を得ている. この節ではこの [OY] のアイディアを例で説明する.

例 2.1.

$$\pounds^{\mathrm{OY}}_{\mathcal{A},1}(t)^2 = \sum_{0<l_1,l_2<p} \frac{t^{l_1+l_2}}{l_1 l_2}$$

を部分分数分解 $\frac{1}{xy} = \frac{1}{x(x+y)} + \frac{1}{y(x+y)}$ を用いて再び小野–山本型有限多重ポリログで書き下そう. まずこの部分分数分解をそのまま適用すると分母に p で割れる項が現れるので,

$$\sum_{0<l_1,l_2<p} = {\sum_{\substack{0<l_1,l_2<p \\ (l_1+l_2,p)=1}}}' + \sum_{\substack{0<l_1,l_2<p \\ p|(l_1+l_2)}}$$

と和を分割する. 第 1 の和に部分分数分解を適用すると, 適用後に現れる 2 つの有限和はどちらも $\pounds^{\mathrm{OY}}_{\mathcal{A},(1,1)}(t)$ となる. 一方第 2 の和について, p が l_1+l_2 を割り切るのは $l_1+l_2=p$ の場合だけであるので, l_2 を消去すると

$$\sum_{\substack{0<l_1,l_2<p \\ p|(l_1+l_2)}} \frac{t^{l_1+l_2}}{l_1 l_2} = \sum_{0<l_1<p} \frac{t^p}{l_1(p-l_1)} = -\zeta_{\mathcal{A}}(2)t^p = 0$$

が得られる. 以上の計算から

$$\pounds^{\mathrm{OY}}_{\mathcal{A},1}(t)^2 = 2\pounds^{\mathrm{OY}}_{\mathcal{A},(1,1)}(t)$$

が得られ, $\pounds^{\mathrm{OY}}_{\mathcal{A},1}(t)^2$ を小野–山本型有限多重ポリログで書き下すことができた.

r を正整数とすると, $\pounds^{\mathrm{OY}}_{\mathcal{A},\{1\}^{r-1}}(t)$ と $\pounds^{\mathrm{OY}}_{\mathcal{A},1}(t)$ の積の場合でも上記の証明の "原理" が通用する. この場合は

$$\frac{1}{x^a y^b} = \sum_{i=0}^{b-1} \binom{a-1+i}{i} \frac{1}{y^{b-i}(x+y)^{a+i}} + \sum_{i=0}^{a-1} \binom{b-1+i}{i} \frac{1}{x^{a-i}(x+y)^{b+i}}$$

を用いることになる. 例 2.1 では第 2 の和の係数に深さ 1 の有限多重ゼータ値が現れたため偶然にも消えてしまったが, $\pounds^{\mathrm{OY}}_{\mathcal{A},\{1\}^{r-1}}(t)$ と $\pounds^{\mathrm{OY}}_{\mathcal{A},1}(t)$ の積の場合は (少なくとも予想的には) 消えずに残る. この残った項が $f_r(t)$ と $g_r(t)$ である. つまり $f_r(t)$ と $g_r(t)$ は $\pounds^{\mathrm{OY}}_{\mathcal{A},\{1\}^r}(t)$ と $\pounds^{\mathrm{OY}}_{\mathcal{A},1}(t)$ の積を和に変換した際の "ズレ" を表していると言える.

命題 2.2 ([O, Lemma 2.1])**.** 正整数 r に対し, 次が成り立つ:

$$\pounds^{\mathrm{OY}}_{\mathcal{A},\{1\}^{r-1}}(t)\pounds^{\mathrm{OY}}_{\mathcal{A},1}(t) = r\pounds^{\mathrm{OY}}_{\mathcal{A},\{1\}^r}(t) - f_r(t) - g_r(t).$$

主定理は Kontsevich による $r=1$ の場合の等式と命題 2.2 を用いて帰納法で証明される.

3 佐久川–関型有限多重ポリログの函数等式

最後に, 小野–山本型有限多重ポリログを経由して得られる佐久川–関型有限多重ポリログの函数等式の例を挙げて, 本稿を終える.

多変数佐久川–関型有限多重ポリログは shuffle タイプと harmonic タイプの 2 種類が定義されているが, 本稿で扱うものは harmonic タイプである.

定義 3.1. インデックス $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)$ に対し,

$$\pounds^*_{\mathcal{A},\mathbf{k}}(t_1,\dots,t_r):=\sum_{0<n_1<\dots<n_r<p}\frac{t_1^{n_1}\cdots t_r^{n_r}}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}}\in\mathcal{A}_{\mathbb{Z}[t_1,\dots,t_r]},$$
$$\pounds_{\mathcal{A},\mathbf{k}}(t):=\pounds^*_{\mathcal{A},\mathbf{k}}(\{1\}^{r-1},t)\in\mathcal{A}_{\mathbb{Z}[t]},$$
$$\widetilde{\pounds}_{\mathcal{A},\mathbf{k}}(t):=\pounds^*_{\mathcal{A},\mathbf{k}}(t,\{1\}^{r-1})\in\mathcal{A}_{\mathbb{Z}[t]}$$

を本稿では佐久川–関型有限多重ポリログと呼ぶ.

[SS, Proposition 3.16] を用いると, 小野–山本型を佐久川–関型で翻訳することができる. 以下の定理は $\pounds^{\mathrm{OY}}_{\mathcal{A},(1,1,1)}(t)$ 及び $\pounds^{\mathrm{OY}}_{\mathcal{A},\{1\}^4}(t)$ の "$t\leftrightarrow 1-t$" 型函数等式 (例 1.5) を佐久川–関型有限多重ポリログで書き直したものである.

定理 3.2 ([O, Corollary 4.3, 4.4])**.** 次が成り立つ:

$$\begin{aligned}
&(1+t^p)\pounds_{\mathcal{A},\{1\}^3}(t)+t^p(1+t^p)\widetilde{\pounds}_{\mathcal{A},\{1\}^3}(t)+2t^p\pounds^*_{\mathcal{A},\{1\}^3}(1,t,1)+t^p\pounds_{\mathcal{A},(2,1)}(t)+t^p\widetilde{\pounds}_{\mathcal{A},(1,2)}(t)\\
&\quad=(2-t^p)\pounds_{\mathcal{A},\{1\}^3}(1-t)+(2-t^p)(1-t^p)\widetilde{\pounds}_{\mathcal{A},\{1\}^3}(1-t)+2(1-t^p)\pounds^*_{\mathcal{A},\{1\}^3}(1,1-t,1)\\
&\qquad+(1-t^p)\pounds_{\mathcal{A},(1,2)}(1-t)+(1-t^p)\widetilde{\pounds}_{\mathcal{A},(2,1)}(1-t),\\
&(1+4t^p+t^{2p})\pounds_{\mathcal{A},\{1\}^4}(t)+2t^p(2+t^p)\pounds^*_{\mathcal{A},\{1\}^4}(1,1,t,1)+2t^p(1+2t^p)\pounds^*_{\mathcal{A},\{1\}^4}(1,t,1,1)\\
&\qquad+t^p(1+4t^p+t^{2p})\widetilde{\pounds}_{\mathcal{A},\{1\}^4}(t)+t^p(1+3t^p)\widetilde{\pounds}_{\mathcal{A},(2,1,1)}(t)+2t^p(1+t^p)\pounds^*_{\mathcal{A},(1,2,1)}(1,t,1)\\
&\qquad+t^p(3+t^p)\pounds_{\mathcal{A},(1,1,2)}(t)+t^p\Big(\pounds_{\mathcal{A},(2,1,1)}(t)+\pounds^*_{\mathcal{A},(2,1,1)}(1,t,1)+\pounds_{\mathcal{A},(1,2,1)}(t)\\
&\qquad+\pounds_{\mathcal{A},(2,2)}(t)\Big)+t^{2p}\Big(\widetilde{\pounds}_{\mathcal{A},(1,1,2)}(t)+\pounds^*_{\mathcal{A},(1,1,2)}(1,t,1)+\widetilde{\pounds}_{\mathcal{A},(1,2,1)}(t)+\widetilde{\pounds}_{\mathcal{A},(2,2)}(t)\Big)\\
&\quad=(6-6t^p+t^{2p})\pounds_{\mathcal{A},\{1\}^4}(1-t)+2(1-t^p)(3-t^p)\pounds^*_{\mathcal{A},\{1\}^4}(1,1,1-t,1)\\
&\qquad+2(1-t^p)(3-2t^p)\pounds^*_{\mathcal{A},\{1\}^4}(1,1-t,1,1)+(1-t^p)(6-6t^p+t^{2p})\widetilde{\pounds}_{\mathcal{A},\{1\}^4}(1-t)\\
&\qquad+(1-t^p)(4-3t^p)\widetilde{\pounds}_{\mathcal{A},(2,1,1)}(1-t)+2(1-t^p)(2-t^p)\pounds^*_{\mathcal{A},(1,2,1)}(1,1-t,1)\\
&\qquad+(1-t^p)(4-t^p)\pounds_{\mathcal{A},(1,1,2)}(1-t)+(1-t^p)\Big(\pounds_{\mathcal{A},(2,1,1)}(1-t)+\pounds^*_{\mathcal{A},(2,1,1)}(1,1-t,1)\\
&\qquad+\pounds_{\mathcal{A},(1,2,1)}(1-t)+\pounds_{\mathcal{A},(2,2)}(1-t)\Big)+(1-t^p)^2\Big(\widetilde{\pounds}_{\mathcal{A},(1,1,2)}(1-t)\\
&\qquad+\pounds^*_{\mathcal{A},(1,1,2)}(1,1-t,1)+\widetilde{\pounds}_{\mathcal{A},(1,2,1)}(1-t)+\widetilde{\pounds}_{\mathcal{A},(2,2)}(1-t)\Big).
\end{aligned}$$

注意 3.3. 定理 3.2 に現れる佐久川–関型の多変数有限多重ポリログは, 例えば $\pounds^*_{\mathcal{A},\{1\}^4}(1,1,t,1)$ のように, 中間の変数が 1 つだけあり残りは 1 であるものしか出てこない. このような佐久川–関型有限多重ポリログは [SS] の枠組みで扱うことは難しく, 定理 3.2 を [SS] の結果のみを用いて証明することは難しいと筆者は考えている.

謝辞

末筆ではありますが, 第 11 回福岡整数論研究集会で講演の機会をくださいました世話人の金子昌信先生, 岸康弘先生, 権寧魯先生に感謝申し上げます.

参考文献

[H] M. E. Hoffman, *Quasi-symmetric functions and mod p multiple harmonic sums*, Kyushu J. Math. **69** (2015) 345–366.

[KZ] M. Kaneko and D. Zagier, *Finite multiple zeta values*, in preparation.

[KMT] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, *Shuffle products of multiple zeta values and partial fraction decompositions of zeta-functions of root systems*, Math. Z. **268**, (2011) 993–1011.

[K] M. Kontsevich, *The* 1+1/2 *logarithm*, appendix to: "On poly(ana)log I", Compositio Math. **130** (2002) 211–214.

[O] M. Ono, *New functional equations of finite multiple polylogarithms*, preprint, arXiv:1706.09136.

[OY] M. Ono and S. Yamamoto, *Shuffle product of finite multiple polylogarithms*, Manuscripta Math. **152** (2017) 153–166.

[SS] K. Sakugawa and S. Seki, *On functional equations of finite multiple polylogarithms*, Journal of Algebra **469** (2017) 323–357.

[Se] S. Seki, *Finite multiple polylogarithms*, doctoral dissertation, Osaka University, 2017.