有限多重ゼータ値と対称多重ゼータ値における関係式について

村原 英樹 (中村学園大学)

概 要

大野関係式は, 多重ゼータ値の分野ではよく知られた関係式である. 今回, 今冨耕太郎氏・斎藤新悟氏・広瀬稔氏との共同研究によって, 多重ゼータスター値・有限多重ゼータスター値における大野関係式の類似物が得られた. また, 斎藤新悟氏との共同研究によって, 有限多重ゼータ値における制限和公式 (通常の和公式の和を取る範囲を制限したもの) が得られた. 本稿では, これらについて紹介する.

1 多重ゼータ (スター) 値の関係式

多重ゼータ値とは, リーマンのゼータ関数の正の整数点での値をある種拡張したもので, 近年盛んに研究されている対象である. 多重ゼータ値研究における関心事の 1 つは, 多重ゼータ値の張る $\mathbb{Q}$-線形空間の代数構造を把握することである. 一般に多重ゼータ値において, それらの間の様々な関係式族が知られているが, その中の 1 つである「大野関係式」は, 特に有名かつ重要な関係式である. 本稿では, この多重ゼータ値の定義を少し変えた多重ゼータスター値について, 新たに得られた結果を紹介する.

まずはじめに, 多重ゼータ (スター) 値の定義について述べる. $k_1 \geq 2$ となるインデックス $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r) \in \mathbb{Z}^r_{\geq 1}$ を収束インデックスと呼ぶ.

定義 1.1. 収束インデックス $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r) \in \mathbb{Z}^r_{\geq 1}$ に対して, 多重ゼータ値と多重ゼータスター値をそれぞれ,

$$\zeta(\mathbf{k}) := \sum_{m_1 > \cdots > m_r \geq 1} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_r^{k_r}} \in \mathbb{R},$$
$$\zeta^\star(\mathbf{k}) := \sum_{m_1 \geq \cdots \geq m_r \geq 1} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_r^{k_r}} \in \mathbb{R}$$

と定義する. また, $\mathrm{wt}(\mathbf{k}) := k_1 + \cdots + k_r$ をインデックス $\mathbf{k}$ の重さ, $\mathrm{dep}(\mathbf{k}) := r$ を深さと呼ぶ.

多重ゼータ値の関係式として, 古典的であり, かつ最も基本的な関係式である「双対定理」と「和公式」について述べる. 双対定理を記述するために, 双対インデックスを定義する.

定義 1.2 (双対インデックス)**.**

$$\mathbf{k} = (a_1 + 1, \underbrace{1, \ldots, 1}_{b_1 - 1}, \ldots, a_s + 1, \underbrace{1, \ldots, 1}_{b_s - 1}) \quad (a_p, b_q \geq 1)$$

に対して, 双対インデックス $\mathbf{k}^\dagger$ を

$$\mathbf{k}^\dagger = (b_s + 1, \underbrace{1, \ldots, 1}_{a_s - 1}, \ldots, b_1 + 1, \underbrace{1, \ldots, 1}_{a_1 - 1})$$

と定義する．

例えば, $(4,1,1,1,3,1,1)^\dagger = (4,1,5,1,1)$ となる．双対定理は次のように表される．

定理 1.3 (双対定理)**.** 収束インデックス $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_r)\in\mathbb{Z}_{\geq 1}^r$ に対して,

$$\zeta(\mathbf{k})=\zeta(\mathbf{k}^\dagger).$$

さて次に, 和公式について説明する．和公式とは, 重さと深さを固定した多重ゼータ値の和が一定になるという以下の定理のことをいう．

定理 1.4 (和公式; Granville [1], Zagier [15])**.** $r\leq k-1$ となる正の整数 $k,r\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して,

$$\sum_{\substack{\mathrm{wt}(\mathbf{k})=k\\ \mathrm{dep}(\mathbf{k})=r\\ \mathbf{k}:\text{収束インデックス}}}\zeta(\mathbf{k})=\zeta(k).$$

例 1.5.

$$\zeta(4,1)+\zeta(3,2)+\zeta(2,3)=\zeta(3,1,1)+\zeta(2,2,1)+\zeta(2,1,2)=\zeta(5),$$
$$\zeta(4,1,1)+\zeta(3,2,1)+\zeta(3,1,2)+\zeta(2,3,1)+\zeta(2,2,2)+\zeta(2,1,3)=\zeta(6).$$

この双対定理と和公式の双方の拡張となっているのが, 多重ゼータ値の分野でよく知られている次の大野関係式である．定理を簡明に記すために, インデックス $\mathbf{k}$ と $\mathbf{l}$ の深さが同じとき, それらの和 $\mathbf{k}+\mathbf{l}$ を $\mathbf{k}$ と $\mathbf{l}$ の成分ごとの和と定義する．(例えば, $(3,2,1)+(1,1,1)=(4,3,2)$.)

定理 1.6 (大野関係式; 大野 [13])**.** 収束インデックス $\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_{\geq 1}^r$ と整数 $m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して,

$$\sum_{\substack{\mathrm{wt}(\mathbf{e})=m\\ \mathrm{dep}(\mathbf{e})=r}}\zeta(\mathbf{k}+\mathbf{e})=\sum_{\substack{\mathrm{wt}(\mathbf{e})=m\\ \mathrm{dep}(\mathbf{e})=\mathrm{dep}(\mathbf{k}^\dagger)}}\zeta(\mathbf{k}^\dagger+\mathbf{e}).$$

先述のように大野関係式は, 多重ゼータ値の分野でよく知られた関係式である．それに対して, 多重ゼータスター値におけるその類似物については, これまでよくわかっていなかった．今回, 今冨耕太郎氏・斎藤新悟氏・広瀬稔氏との共同研究によって, 多重ゼータスター値における大野関係式の類似物と思われる結果を得たので紹介する．

定理 1.7 (今冨-斎藤-広瀬-M.)**.** 収束インデックス $\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_{\geq 1}^r$ と整数 $m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して,

$$\sum_{\substack{wt(\mathbf{e})=m\\ dep(\mathbf{e})=r}}\zeta^\star(\mathbf{k}+\mathbf{e})\cdot c(\mathbf{k},\mathbf{e})=\sum_{\substack{wt(\mathbf{e})=m\\ dep(\mathbf{e})=dep(\mathbf{k}^\dagger)}}\zeta^\star((\mathbf{k}^\dagger+\mathbf{e})^\dagger).$$

ここで,

$$c(\mathbf{k},\mathbf{e}):=\Pi_{i=1}^r\binom{k_i+e_i+\delta_{i,r}-2}{e_i}\binom{n-1}{n}=\begin{cases}1 & (n=0),\\ 0 & (n\neq 0).\end{cases}$$

多重ゼータスター値における大野型関係式には二項係数が含まれることが注意点である．上の定理は後述する Hoffman 双対インデックス $\vee$ を用いて, 二項係数を用いない本質的に等価な書き換えを行うことができる．

定理 1.8 (定理 1.7 と同値). インデックス $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^r$(収束インデックスでなくてもよい) と整数 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して,

$$\zeta^{\star,+}((\mathbf{k} ш \{1\}^m)^\vee) = \sum_{\substack{wt(\mathbf{e})=m \\ dep(\mathbf{e})=r}} \zeta^{\star,+}((\mathbf{k}+\mathbf{e})^\vee).$$

ここで, $\zeta^{\star,+}(k_1,\ldots,k_r) := \zeta^\star(k_1+1,k_2,\ldots,k_r)$ である. また, $\mathbf{k} ш \mathbf{l}$ は, インデックス $\mathbf{k}$ と $\mathbf{l}$ をシャッフルしたものの和を表す. (例えば, $(3)ш(1,1) = (3,1,1)+(1,3,1)+(1,1,3)$.) さらに, $(\{1\}^m) := (\underbrace{1,\ldots,1}_{m})$ とする.

注意 1.9. 定理 1.8 は, 通常の双対インデックスを用いても記述できるが, わずかに記述が煩雑になるため本稿では省略する.

定理 1.7 の証明は省略するが, 後述する補題 3.14 および川島関係式 (川島 [9] 参照) を用いて, 定理 3.10 と同様に示される. 定理 1.7 の具体例を挙げておこう.

例 1.10. $\mathbf{k} = (3,2), m = 2$ のとき,

$$\begin{aligned}\zeta^\star(3,4) + 4\zeta^\star(4,3) + 3\zeta^\star(5,2) = \zeta^\star(2,1,2,2) + \zeta^\star(2,2,1,2) + \zeta^\star(2,2,2,1) + \zeta^\star(3,1,1,2) \\ + \zeta^\star(3,1,2,1) + \zeta^\star(3,2,1,1).\end{aligned}$$

2 有限多重ゼータ (スター) 値

前節の多重ゼータ値に対して, $\mathcal{A}$-有限多重ゼータ値と対称多重ゼータ値と呼ばれる類似が考えられている. (これら 2 つを総称して, 有限多重ゼータ値と呼ぶ.) 有限多重ゼータ値については, その次元や代数構造について多重ゼータ値に対応する形の予想が知られており, 多重ゼータ値と同様にその重要性が認識されつつある. まず有限多重ゼータ値の定義について述べよう. そのために, 以下のような環 $\mathcal{A}$ を考える. (この発想は, Zagier 氏による.)

定義 2.1.

$$\mathcal{A} := \left(\prod_p \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right) \Big/ \left(\bigoplus_p \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right) = \{(a_p)_p \mid a_p \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}/\sim,$$

$$(a_p) \sim (b_p) \Leftrightarrow \text{高々有限個の素数 } p \text{ を除いて } a_p = b_p.$$

この環 $\mathcal{A}$ は, 成分ごとの和と積について, $\mathbb{Q}$-代数になっている. 環 $\mathcal{A}$ の元として, 有限多重ゼータ値は以下のように定義される.

定義 2.2. インデックス $\mathbf{k} = (k_1,\ldots,k_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^r$ に対して, $\mathcal{A}$-有限多重ゼータ値と $\mathcal{A}$-有限多重ゼータスター値をそれぞれ,

$$\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) := \left(\sum_{p>m_1>\cdots>m_r\geq 1} \frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}} \mod p\right)_p \in \mathcal{A},$$

$$\zeta_{\mathcal{A}}^\star(\mathbf{k}) := \left(\sum_{p>m_1\geq\cdots\geq m_r\geq 1} \frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}} \mod p\right)_p \in \mathcal{A}$$

と定義する.

次に, 金子昌信氏と Zagier 氏によって定義された対称多重ゼータ値について述べよう. 対称多重ゼータ値を定義するために, $\zeta_{\mathcal{S}}^{*}(\mathbf{k})$ と $\zeta_{\mathcal{S}}^{ш}(\mathbf{k})$ を以下のように定める.

定義 2.3 (金子–Zagier [8]). インデックス $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)\in\mathbb{Z}_{\geq 1}^r$ に対して,

$$\zeta_{\mathcal{S}}^{*}(\mathbf{k}) := \sum_{i=0}^{r}(-1)^{k_1+\cdots+k_i}\zeta^{*}(k_i,\dots,k_1)\zeta^{*}(k_{i+1},\dots,k_r),$$
$$\zeta_{\mathcal{S}}^{ш}(\mathbf{k}) := \sum_{i=0}^{r}(-1)^{k_1+\cdots+k_i}\zeta^{ш}(k_i,\dots,k_1)\zeta^{ш}(k_{i+1},\dots,k_r)$$

とする. ここで, $\zeta^{*},\zeta^{ш}$ は, 調和積, シャッフル積によって正規化されたものの定数項 (実数値) を指す. (正確には, 右辺を調和積, シャッフル積によって正規化すると, 定数項 (実数値) が残る. 正規化に関しては, 井原–金子–Zagier [5] を参照.)

$\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}$ を 1 と多重ゼータ値で張られる $\mathbb{Q}$-ベクトル空間とする. ($\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}$ は調和積またはシャッフル積に関して $\mathbb{Q}$-代数となる.) 次の定理 2.4 を踏まえて, 対称多重ゼータ (スター) 値は定義 2.5 のように定義される.

定理 2.4 (金子–Zagier [8]). インデックス $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)\in\mathbb{Z}_{\geq 1}^r$ に対して,

$$\zeta_{\mathcal{S}}^{*}(\mathbf{k})-\zeta_{\mathcal{S}}^{ш}(\mathbf{k})\in\zeta(2)\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}.$$

定義 2.5. インデックス $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)\in\mathbb{Z}_{\geq 1}^r$ に対して,

$$\zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{k}) := \zeta_{\mathcal{S}}^{*}(\mathbf{k}) \bmod \zeta(2)\in\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}/\zeta(2)\mathcal{Z}_{\mathbb{R}},$$
$$\zeta_{\mathcal{S}}^{\star}(\mathbf{k}) := \sum_{\substack{\circ\text{ は「+ (プラス)」}\\ \text{または「, (カンマ)」}}}\zeta_{\mathcal{S}}^{*}(k_1\circ\cdots\circ k_r) \bmod \zeta(2)\in\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}/\zeta(2)\mathcal{Z}_{\mathbb{R}}.$$

ここで, $\mathcal{Z}_{\mathcal{A}}$ を 1 と $\mathcal{A}$-有限多重ゼータ値で張られる $\mathbb{Q}$-ベクトル空間とする. ($\mathcal{Z}_{\mathcal{A}}$ は調和積に関して $\mathbb{Q}$-代数となる.) このとき, 以下の同型予想が知られている. この予想は, 有限多重ゼータ値と対称多重ゼータ値の関係を見る上で大変重要である.

予想 1 (金子–Zagier [8]). 代数的同型写像 ϕ で,

$$\begin{array}{cccc}\phi: & \mathcal{Z}_{\mathcal{A}} & \to & \mathcal{Z}_{\mathbb{R}}/\zeta(2) \\ & \zeta_{\mathcal{A}}(k_1,\dots,k_r) & \mapsto & \zeta_{\mathcal{S}}(k_1,\dots,k_r)\end{array}$$

を満たすものが存在する.

3　有限多重ゼータ (スター) 値における関係式

3.1　有限多重ゼータ (スター) 値の双対定理と和公式について

さて, 有限多重ゼータ値における既知の結果をいくつか紹介する. 簡明のために, $\mathcal{F}=\mathcal{A}$ または $\mathcal{S}$ とする. ($\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ で有限多重ゼータ値, $\zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{k})$ で対称多重ゼータ値を表す.) まず Hoffman 双対インデックスを定義する.

定義 3.1 (Hoffman 双対インデックス)**.**

$$\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r) = (\underbrace{1 + \cdots + 1}_{k_1}, \ldots, \underbrace{1 + \cdots + 1}_{k_r})$$

に対して, Hoffman 双対インデックス $\mathbf{k}^\vee$ を

$$\mathbf{k}^\vee = \text{インデックス } \mathbf{k} \text{ の中の「}+\text{ (プラス)」と「 , (カンマ)」を入れかえたもの}$$

と定義する.

例えば, $(1,3,1,1,2,1,1)^\vee = (2,1,4,3)$ は Hoffman 双対インデックスの例である. このHoffman 双対インデックスを用いて, 有限多重ゼータスター値と対称多重ゼータスター値の双対定理は以下のように書かれる. (有限多重ゼータスター値については Hoffman 氏, 対称多重ゼータスター値については Jarossay 氏によって示された.)

定理 3.2 (双対定理; $(\mathcal{A})$Hoffman/$(\mathcal{S})$Jarossay)**.** インデックス $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^r$ に対して,

$$\zeta_{\mathcal{F}}^\star(\mathbf{k}) = -\zeta_{\mathcal{F}}^\star(\mathbf{k}^\vee).$$

次に, 有限多重ゼータ (スター) 値の和公式について述べよう. 和公式を簡明に記述するために, 記号の準備をする.

記号 3.3. $1 \leq i \leq r \leq k-1$ となる正の整数 $k, r, i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して,

$$S_{k,r,i} := \sum_{\substack{\mathrm{wt}(\mathbf{k})=k \\ \mathrm{dep}(\mathbf{k})=r \\ k_i \geq 2, \forall k_j \geq 1}} \zeta_{\mathcal{F}}(\mathbf{k}), \qquad S_{k,r,i}^\star := \sum_{\substack{\mathrm{wt}(\mathbf{k})=k \\ \mathrm{dep}(\mathbf{k})=r \\ k_i \geq 2, \forall k_j \geq 1}} \zeta_{\mathcal{F}}^\star(\mathbf{k})$$

とする.

この記号の下, 有限多重ゼータ (スター) 値の和公式は以下のように与えられる. (有限多重ゼータ値については斎藤新悟氏と若林徳子氏, 対称多重ゼータ値については著者によって示された.)

定理 3.4 (和公式; $(\mathcal{A})$ 斎藤-若林/$(\mathcal{S})$M.)**.** $1 \leq i \leq r \leq k-1$ となる正の整数 $k, r, i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して,

$$S_{k,r,i} = P_{k,r,i}, \qquad S_{k,r,i}^\star = (-1)^r P_{k,r,i}.$$

ここで,

$$P_{k,r,i} := (-1)^{i-1} \left(\binom{k-1}{i-1} + (-1)^r \binom{k-1}{r-i} \right) \mathfrak{Z}_{\mathcal{F}}(k),$$

$$\mathfrak{Z}_{\mathcal{F}}(k) := \begin{cases} \left(\frac{B_{p-k}}{k} \bmod p \right)_p & (\mathcal{F} = \mathcal{A}), \\ \zeta(k) \bmod \zeta(2) & (\mathcal{F} = \mathcal{S}). \end{cases}$$

さて, この和公式のある種の制限化を斎藤新悟氏との共同研究によって得たので紹介する.

記号 3.5. $1 \le i \le j \le r \le k-2$ となる正の整数 $k, r, i, j \in \mathbb{Z}_{\ge 1}$ に対して,

$$S_{k,r,\{i,j\}} := \begin{cases} \sum_{\substack{\mathrm{wt}(\mathbf{k})=k \\ \mathrm{dep}(\mathbf{k})=r \\ k_i \ge 2,\, k_j \ge 2}} \zeta_{\mathcal{F}}(\mathbf{k}) & (i \ne j), \\ \sum_{\substack{\mathrm{wt}(\mathbf{k})=k \\ \mathrm{dep}(\mathbf{k})=r \\ k_i \ge 3}} \zeta_{\mathcal{F}}(\mathbf{k}) & (i = j), \end{cases}$$

$$S^{\star}_{k,r,\{i,j\}} := \begin{cases} \sum_{\substack{\mathrm{wt}(\mathbf{k})=k \\ \mathrm{dep}(\mathbf{k})=r \\ k_i \ge 2,\, k_j \ge 2}} \zeta^{\star}_{\mathcal{F}}(\mathbf{k}) & (i \ne j), \\ \sum_{\substack{\mathrm{wt}(\mathbf{k})=k \\ \mathrm{dep}(\mathbf{k})=r \\ k_i \ge 3}} \zeta^{\star}_{\mathcal{F}}(\mathbf{k}) & (i = j) \end{cases}$$

とする.

このとき, 次の定理が成り立つ. (後述する有限多重ゼータ値の大野型関係式と双対定理によって証明が可能である.)

定理 3.6 (制限和公式; 斎藤-M.)**.** k を奇数とする. $1 \le i \le j \le r \le k-2$ となる正の整数 $k, r, i, j \in \mathbb{Z}_{\ge 1}$ に対して,

$$S_{k,r,\{i,j\}} = Q_{k,r,i,j}, \qquad S^{\star}_{k,r,\{i,j\}} = (-1)^r Q_{k,r,i,j}.$$

ここで,

$$\begin{aligned} Q_{k,r,i,j} = \frac{1}{2}\Bigg(& -(r-i+1)(-1)^i \binom{k-1}{i-1} + (k-j)(-1)^j \binom{k-1}{j-1} \\ & + (k-r+i-1)(-1)^{r-i} \binom{k-1}{r-i} - j(-1)^{r-j} \binom{k-1}{r-j} \\ & + k(-1)^i \binom{k-2}{i-1} - k(-1)^j \binom{k-2}{j-1} \\ & - k(-1)^{r-i} \binom{k-2}{r-i} + k(-1)^{r-j} \binom{k-2}{r-j} \Bigg) \mathfrak{Z}_{\mathcal{F}}(k). \end{aligned}$$

注意 3.7. $i = j$ のとき上記の式は,

$$S_{k,r,\{i,i\}} = S^{\star}_{k,r,\{i,i\}} = \frac{1}{2}(k-r-1)(-1)^i \left(\binom{k-1}{i-1} + (-1)^r \binom{k-1}{r-i} \right) \mathfrak{Z}_{\mathcal{F}}(k)$$

となる.

3.2 有限多重ゼータ (スター) 値の大野型関係式について

有限多重ゼータ値の大野型関係式は, 金子昌信氏によって予想され, 小山宏次郎氏によって証明された.

定理 3.8 (大野型関係式; 小山 [14])**.** インデックス $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^r_{\ge 1}$ と整数 $m \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ に対して,

$$\sum_{\substack{wt(\mathbf{e})=m \\ dep(\mathbf{e})=r}} \zeta_{\mathcal{F}}(\mathbf{k}+\mathbf{e}) = \sum_{\substack{wt(\mathbf{e})=m \\ dep(\mathbf{e})=dep(\mathbf{k}^{\vee})}} \zeta_{\mathcal{F}}((\mathbf{k}^{\vee}+\mathbf{e})^{\vee}).$$

注意 3.9. 上記の大野型関係式は, 有限多重ゼータ値における導分関係式と同値であることが著者によって示されている. (詳細は, 小山–堀川–M. [4] を参照.) またこの定理は, 和公式 (定理 3.4) の拡張になっている. ($\mathbf{k} = (\{1\}^i, 2, \{1\}^{r-i+1})$ とすれば和公式が導かれる. しかしながら, 双対定理 (定理 3.2) は含んでいない.)

今回, 今冨耕太郎氏・斎藤新悟氏・広瀬稔氏との共同研究によって, この大野型関係式 (定理 3.8) の (本質的な) 拡張である以下の定理を得た.

定理 3.10 (今冨-斎藤-広瀬-M.)**.** インデックス $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^r_{\geq 1}$ と整数 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して,

$$\sum_{\substack{wt(\mathbf{e})=m \\ dep(\mathbf{e})=r}} \zeta^\star_{\mathcal{F}}(\mathbf{k}+\mathbf{e}) \cdot c(\mathbf{k},\mathbf{e}) = - \sum_{\substack{wt(\mathbf{e})=m \\ dep(\mathbf{e})=dep(\mathbf{k}^\vee)}} \zeta^\star_{\mathcal{F}}(\mathbf{k}^\vee + \mathbf{e}).$$

ここで,

$$c(\mathbf{k},\mathbf{e}) := \Pi_{i=1}^r \binom{k_i + e_i + \delta_{i,1} + \delta_{i,r} - 2}{e_i}, \qquad \binom{n-1}{n} = \begin{cases} 1 & (n=0), \\ 0 & (n \neq 0). \end{cases}$$

この定理は, 次の定理と本質的に同値である. (また本稿では割愛するが, この定理の通常の双対インデックス † を用いた別表記も存在する.)

定理 3.11 (定理 3.10 と同値)**.** インデックス $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^r_{\geq 1}$ と整数 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して,

$$\zeta^\star_{\mathcal{F}}(\mathbf{k} ш \{1\}^m) = - \sum_{\substack{wt(\mathbf{e})=m \\ dep(\mathbf{e})=r}} \zeta^\star_{\mathcal{F}}((\mathbf{k}+\mathbf{e})^\vee).$$

ここで, $\mathbf{k} ш \mathbf{l}$ は, インデックス $\mathbf{k}$ と $\mathbf{l}$ をシャッフルしたものの和を表す. また, $(\{1\}^m) := (\underbrace{1,\ldots,1}_{m})$ とする.

ここで, 定理 3.10 の具体例を挙げておこう.

例 3.12. $\mathbf{k} = (3,1), m = 2$ のとき,

$$\begin{aligned} \zeta^\star_{\mathcal{F}}(3,3) + 3\zeta^\star_{\mathcal{F}}(4,2) + 6\zeta^\star_{\mathcal{F}}(5,1) = &-\zeta^\star_{\mathcal{F}}(1,1,4) - \zeta^\star_{\mathcal{F}}(1,2,3) - \zeta^\star_{\mathcal{F}}(1,3,2) - \zeta^\star_{\mathcal{F}}(2,1,3) \\ &- \zeta^\star_{\mathcal{F}}(2,2,2) - \zeta^\star_{\mathcal{F}}(3,1,2). \end{aligned}$$

この定理 3.10 (および定理 3.11) は, 本質的に双対定理 (定理 3.2) と大野型関係式 (定理 3.8) の両方を含んでいる. (特に後者に関しては代数的に示されるが, 本稿では割愛する.) 大野型関係式と定理 3.10 のそれぞれが生み出す独立な関係式の個数をまとめたのが以下の表 (表 1) である.

表 1: 有限多重ゼータ値における独立な関係式の個数

重さ	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
大野型関係式 (定理 3.8)	1	2	5	10	22	44	90	181	363	727	1456
定理 3.10	2	3	8	15	31	62	125	252	502	1006	2013

注意 3.13. 有限多重ゼータ値と有限多重ゼータスター値における, 各々の関係式族の包含関係に関する比較は, 有限多重ゼータスター値を「定義式にしたがって, 有限多重ゼータ値の和の形に書き直したもの」を用いて行っている. 例えば, $\zeta^{\star}_{\mathcal{F}}(k_1,k_2)=\zeta_{\mathcal{F}}(k_1,k_2)+\zeta_{\mathcal{F}}(k_1+k_2)$, $\zeta^{\star}_{\mathcal{F}}(k_1,k_2,k_3)=\zeta_{\mathcal{F}}(k_1,k_2,k_3)+\zeta_{\mathcal{F}}(k_1+k_2,k_3)+\zeta_{\mathcal{F}}(k_1,k_2+k_3)+\zeta_{\mathcal{F}}(k_1+k_2+k_3)$ のように, 有限多重ゼータスター値は, 有限多重ゼータ値の和の形に書き換えられる.

さて, 定理 3.10 を示すために, 次の補題を準備する.

補題 3.14. インデックス $\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^r_{\geq 1}$ と整数 $m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して,

$$\mathbf{k}\,\overline{ш}(\{1\}^m)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{\substack{wt(\mathbf{e})=m-i\\ dep(\mathbf{e})=r}}(\mathbf{k}+\mathbf{e})\,\overline{*}\,(\{1\}^i).$$

ここで, $\overline{*}$ は, 多重ゼータスター値における調和積を表す (詳細は, 宗田 [10] を参照.):

$$\begin{aligned}\mathbf{k}\,\overline{*}\,1=1\,\overline{*}\,\mathbf{k}&=\mathbf{k},\\ (k_1,\mathbf{k})\,\overline{*}\,(l_1,\mathbf{l})&=(k_1,\mathbf{k}\,\overline{*}\,(l_1,\mathbf{l}))+(l_1,(k_1,\mathbf{k})\,\overline{*}\,\mathbf{l})-(k_1+l_1,\mathbf{k}\,\overline{*}\,\mathbf{l}).\end{aligned}$$

例えば,

$$\begin{aligned}(a,b)\,\overline{*}\,(c,d)=(a,b,c,d)&+(a,c,b,d)+(a,c,d,b)+(c,a,b,d)\\ &+(c,a,d,b)+(c,d,a,b)\\ &-(a+c,b,d)-(a+c,d,b)-(a,b+c,d)-(a,c,b+d)\\ &-(c,a,b+d)-(c,a+d,b)\\ &+(a+c,b+d).\end{aligned}$$

最後に, 定理 3.10 の証明について述べよう. (証明は, 定理 3.10 の代わりに定理 3.11 を示す. 証明は非常に短い. (補題の結果を含めて 4 行！))

Proof.

$$\begin{aligned}\zeta^{\star}_{\mathcal{F}}(\mathbf{k}\,\overline{ш}(\{1\}^m))&=\sum_{i=0}^{m}\sum_{\substack{wt(\mathbf{e})=m-i\\ dep(\mathbf{e})=r}}\zeta^{\star}_{\mathcal{F}}((\mathbf{k}+\mathbf{e})\,\overline{*}\,(\{1\}^i))\\ &=\sum_{\substack{wt(\mathbf{e})=m-i\\ dep(\mathbf{e})=r}}\zeta^{\star}_{\mathcal{F}}(\mathbf{k}+\mathbf{e})\\ &=-\sum_{\substack{wt(\mathbf{e})=m-i\\ dep(\mathbf{e})=r}}\zeta^{\star}_{\mathcal{F}}((\mathbf{k}+\mathbf{e})^{\vee}).\end{aligned}$$

□

Acknowledgements

本稿は第 11 回福岡数論研究集会における著者の講演に基づくものです. 講演および報告集執筆の機会を与えてくださった, 金子先生, 権先生, 岸先生に感謝申し上げます.

参考文献

[1] A. Granville, *A decomposition of Riemann's zeta-function*, In: Analytic number theory (Kyoto, 1996), 95–101, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 247, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.

[2] M. E. Hoffman, *The algebra of multiple harmonic series*, J. Algebra **194** (1997), 477–495.

[3] M. E. Hoffman, *Quasi-symmetric functions and mod p multiple harmonic sums*, Kyushu J. Math. **69** (2015), 345–366.

[4] Y. Horikawa, K. Oyama and H. Murahara, *A note on derivation relations for multiple zeta values and finite multiple zeta values*, preprint.

[5] K. Ihara, M. Kaneko and D. Zagier, *Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values*, Compositio Math. **142** (2006), 307–338.

[6] D. Jarossay, *Double mélange des multizêtas finis et multizêtas symétrisés*, C. R. Acad. Sci. Paris, **352** (2014), 767–771.

[7] M. Kaneko, *Finite multiple zeta values (in Japanese)*, to appear in RIMS Kôkyûroku Bessatsu.

[8] M. Kaneko and D. Zagier, *Finite multiple zeta values*, in preparation.

[9] G. Kawashima, *A class of relations among multiple zeta values*, J. Number Theory **129** (2009), 755–788.

[10] S. Muneta, *Algebraic setup of non-strict multiple zeta values*, Acta Arithmetica **136** (2009), 7–18.

[11] H. Murahara, *A note on finite real multiple zeta values*, Kyushu J. Math. **70** (2016), 345–366.

[12] H. Murahara, *Derivation relations for finite multiple zeta values*, Int. J. Number Theory **13** (2017), 419–427.

[13] Y. Ohno, *A generalization of the duality and sum formulas on the multiple zeta values*, J. Number Theory **74** (1999), 39–43.

[14] K. Oyama, *Ohno's relation for finite multiple zeta values*, preprint, arXiv:1506.00833.

[15] D. Zagier, *Multiple zeta values*, Unpublished manuscript, 1995.