ヤコビ楕円関数の等分多項式について

山縣 幸司 (名古屋工業大学)

概 要

本稿では, ヤコビ楕円関数の等分多項式の終結式を紹介する.

1 はじめに

これまで, 様々な等分多項式の終結式の公式が得られており, 円分多項式については [1], [3], [5], 実円分多項式については [6], [12], チェビシェフ多項式については [4], [7], [12] で紹介されている. 円分多項式 (実円分多項式) は円分体 (円分体の最大実部分体) の有理数体上の最小多項式であり, その終結式の公式には対応する代数体の整数環への応用がある [8] ([11]). 2015 年には, H.Schmidt が Weierstrass $\wp$ 関数の n 倍多項式の終結式の公式を得て, 数論力学系への応用にも言及した [9]. これらの先行研究に対し, 本稿では, ヤコビ楕円関数において定義される等分多項式 (n 倍多項式) の終結式を紹介する.

$\mathrm{sn}, \mathrm{cn}, \mathrm{dn}$ を母数 k (k は $k^2 \neq 0, 1$ を満たす複素数) のヤコビ楕円関数とし, $x = \mathrm{sn}\, u$, $y = \mathrm{cn}\, u$, $z = \mathrm{dn}\, u$ とおくとき, 正整数 n に対して,

$$(\mathrm{sn}\, nu, \mathrm{cn}\, nu, \mathrm{dn}\, nu) = \begin{cases} \left(\dfrac{xA_n(x)}{D_n(x)}, \dfrac{yB_n(x)}{D_n(x)}, \dfrac{zC_n(x)}{D_n(x)}\right) & (n : \text{奇数}), \\ \left(\dfrac{xyzA_n(x)}{D_n(x)}, \dfrac{B_n(x)}{D_n(x)}, \dfrac{C_n(x)}{D_n(x)}\right) & (n : \text{偶数}) \end{cases} \tag{1.1}$$

を満たすような x を変数とする多項式 A_n, B_n, C_n, D_n が存在し, これらをヤコビ楕円関数の等分多項式 (n 倍多項式) と呼ぶ.

以下の定理が本稿の主結果である.

定理 1.1. $X, Y \in \{A, B, C, D\}, X \neq Y$ とするとき, 正整数 n に対し,

$$\mathrm{res}(X_n, Y_n) = \kappa_n(X,Y) k^{2l_n(X,Y)} (1-k^2)^{m_n(X,Y)}. \tag{1.2}$$

ただし,

$$\kappa_n(X,Y) = 2^{\frac{n^2(n^2-1)}{3}}, \quad l_n(X,Y) = l_n(Y,X), \quad m_n(X,Y) = m_n(Y,X),$$

$$l_n(A,B) = m_n(A,D) = \begin{cases} \frac{n^2(n^2-1)}{6} & (n : \text{奇数}), \\ \frac{n^2(n^2-4)}{6} & (n : \text{偶数}), \end{cases}$$

$$l_n(A,C) = l_n(A,D) = m_n(A,B) = m_n(A,C) = \begin{cases} \frac{(n^2-1)(2n^2-3)}{12} & (n : \text{奇数}), \\ \frac{n^2(n^2-4)}{6} & (n : \text{偶数}), \end{cases}$$

$$l_n(B,C) = l_n(B,D) = m_n(B,D) = m_n(C,D) = \begin{cases} \frac{(n^2-1)(2n^2-3)}{12} & (n : \text{奇数}), \\ \frac{n^2(n^2-1)}{6} & (n : \text{偶数}), \end{cases}$$

$$l_n(C,D)=m_n(B,C)=\begin{cases}\frac{n^2(n^2-1)}{6} & (n: 奇数),\\ \frac{n^2(n^2+2)}{6} & (n: 偶数).\end{cases}$$

円分多項式 [8], 実円分多項式 [11] や $\wp$ 関数の n 倍公式 [9] の先行研究と同様に, この主結果を整数環や数論力学系へ応用することが今後の課題である.

証明は以下のように行う.

1. ヒルベルトの零点定理を使い, (1.2) を満たす k によらない整数 $\kappa_n(X,Y)>0$, $l_n(X,Y)\geq 0$, $m_n(X,Y)\geq 0$ の存在を示す (補題 3.1).
2. (1.2) の両辺の q 展開を比較して, 3 つの定数を決定する.
   (a) 両辺の先頭次数の比較から $l_n(X,Y)$ を得る.
   (b) 母数 k を補母数 k' $(:=\sqrt{1-k^2})$ に取り替えたときの等分多項式の変化を見ることで, $m_n(X,Y)$ を求める (系 3.2).
   (c) 先頭係数の比較によって $\kappa_n(X,Y)$ が決まる.

なお, ヒルベルト零点定理と q 展開を用いたこの証明においては, Schmidt による [9] にある手法を大いに参考にした.

2 ヤコビ楕円関数の等分多項式

ヤコビ楕円関数の記号は [2] や [10] に倣い $\mathrm{sn}\,u, \mathrm{cn}\,u, \mathrm{dn}\,u$ と表記する. $\mathrm{sn}, \mathrm{cn}, \mathrm{dn}$ の周期はそれぞれ

$$4mK+2niK',\quad 2mK+2n(K+iK'),\quad 2mK+4niK'\quad (m,n\in\mathbb{Z})$$

である. ただし

$$K=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},\quad K'=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}}$$

は第一種楕円積分で, $k':=\sqrt{1-k^2}$ は補母数である. ヤコビ楕円関数の定義や基本的な性質については, 本稿では [2], [10] や [13] を参考にした.

多項式 A_n,B_n,C_n,D_n の基本的な性質を述べる.

命題 2.1 (次数, 最高次係数, 因数分解). 等分多項式 A_n,B_n,C_n,D_n は x を変数する $\mathbb{Z}[k^2]$ 係数の偶多項式で, $X\in\{A,B,C,D\}$ とするとき,

$$X_n(x)=x_n\prod_{(r,s)\,\in\, R_n^X}\Big(x^2-\mathrm{sn}^2\frac{rK+siK'}{n}\Big)$$

と因数分解される. ただし, $R_n=(\{1,2,\dots,n-1\}\times\{0,n\})\sqcup(\{0,1,\dots,2n-1\}\times\{1,2,\dots,n-1\})$ とし,

$$\begin{aligned}R_n^A&=\{(r,s)\in R_n\,|\,(r,s)\equiv(0,0)\},\quad R_n^B=\{(r,s)\in R_n\,|\,(r,s)\equiv(1,0)\}\\ R_n^C&=\{(r,s)\in R_n\,|\,(r,s)\equiv(1,1)\},\quad R_n^D=\{(r,s)\in R_n\,|\,(r,s)\equiv(0,1)\}\end{aligned}\quad (\equiv の法は 2)$$

であり, $x_n \in \{a_n, b_n, c_n, d_n\}$ は X_n の最高次係数を表し, それぞれ,

$$a_n = \begin{cases} (-1)^{(n-1)/2} k^{(n^2-1)/2} & (n : 奇数), \\ (-1)^{(n-2)/2} n k^{(n^2-4)/2} & (n : 偶数), \end{cases} \quad b_n = c_n = \begin{cases} k^{(n^2-1)/2} & (n : 奇数), \\ k^{n^2/2} & (n : 偶数), \end{cases}$$

$$d_n = \begin{cases} (-1)^{(n-1)/2} n k^{(n^2-1)/2} & (n : 奇数), \\ (-1)^{n/2} k^{n^2/2} & (n : 偶数) \end{cases}$$

である. また, $A_n(0) = n,\ B_n(0) = C_n(0) = D_n(0) = 1,\ A_n(1)B_n(1)C_n(1)D_n(1) \neq 0$.

証明. 等分多項式 A_n, B_n, C_n, D_n が満たす漸化式 [2, p.79] (ここで扱う A_n, B_n, C_n, D_n は [2, p.87] における A'_n, B'_n, C'_n, D'_n であることに注意) とヤコビ楕円関数の基本平行四辺形内の零点と極の分布から示される. □

母数を k から k' に取り替えたときを考える. 次数 $2n$ の偶多項式 $f(x)$ に対し,

$$f^*(x) = \sqrt{1-x^2}^{\deg f} f\left(\frac{ix}{\sqrt{1-x^2}}\right) \tag{2.1}$$

と定義すれば, $f^*(x)$ も偶多項式で, $f^*(x)$ の x^{2n} の係数は $(-1)^n f(1)$ であり, 特に $\deg f^* = \deg f$ であることは $f(1) \neq 0$ と同値であることがわかる. また, $f(1) \neq 0$ なら $f^{**}(x) = f(x)$ である. ここで, 命題 2.1 の最後の主張より, A_n, B_n, C_n, D_n は偶多項式で $x = 1$ としても 0 をとらないことに注意すれば, k を k' に取り替えたときの様子がわかる.

命題 2.2. 母数 k への依存を明記するため, $A_n(x, k)$ 等と書くこととする. このとき,

$$A_n(x, k') = A_n^*(x, k), \quad B_n(x, k') = D_n^*(x, k),$$
$$C_n(x, k') = C_n^*(x, k), \quad D_n(x, k') = B_n^*(x, k).$$

証明. $f(1) \neq 0$ を満たす多項式 $f(x)$ の根を $\pm\alpha_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ とすれば, $f^*(x)$ の根は $\pm\frac{i\alpha_j}{\sqrt{1-\alpha_j^2}}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ と表される. これを踏まえれば, $\mathrm{sn}(iu, k) = \frac{i\,\mathrm{sn}(u,k')}{\mathrm{cn}(u,k')}$ (cf. [10, 22·4]) と命題 2.1 より, すべての場合で両辺が同じ零点をもち, 先頭係数も一致することがわかる. □

3 終結式

2 つの多項式 $f(x) = a\prod_{i=1}^m (x - \alpha_i)$ $(a \neq 0)$ と $g(x) = b\prod_{i=1}^n (x - \beta_1)$ $(b \neq 0)$ の終結式は $\mathrm{res}(f, g) = a^n b^m \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n (\alpha_i - \beta_j)$ によって定義される. このとき, $\mathrm{res}(g, f) = (-1)^{mn}\,\mathrm{res}(f, g)$ であり, h をもう一つの別の多項式とするとき $\mathrm{res}(f, gh) = \mathrm{res}(f, g)\,\mathrm{res}(f, h)$ である. これと, (2.1) の記号で $(fg)^* = f^* g^*$ であることと, $f(x) = x^2 - p$, $g(x) = x^2 - q$ とするとき $f^*(x) = (p-1)x^2 - p$, $g^*(x) = (q-1)x^2 - q$ となり, $\mathrm{res}(f^*, g^*) = (p-q)^2 = \mathrm{res}(f, g)$ であることより, 一般の多項式 f, g に対しても $\mathrm{res}(f^*, g^*) = \mathrm{res}(f, g)$ となることがわかる.

$X, Y \in \{A, B, C, D\}, X \neq Y$ とし, n を正整数とする. 終結式は 2 多項式の係数を成分に持つ行列式で表示できることと $X_n, Y_n \in \mathbb{Z}[k^2][x^2]$ により, $\mathrm{res}(X_n, Y_n)$ は $\mathbb{Z}[k^2]$ に属し, $\mathrm{res}(X_n, Y_n) = \mathrm{res}(Y_n, X_n)$ であることがわかる. 以下の補題は終結式 $\mathrm{res}(X_n, Y_n)$ の一般的な形を与える.

補題 3.1. $X, Y \in \{A, B, C, D\}, X \neq Y$ とするとき, 正整数 n に対し,

$$\mathrm{res}(X_n, Y_n) = \kappa_n(X, Y) k^{2l_n(X,Y)} (1-k^2)^{m_n(X,Y)}.$$

を満たすような (k に依存しない) 整数 $\kappa_n(X, Y) > 0$, $l_n(X, Y) \geq 0$, $m_n(X, Y) \geq 0$ が存在する.

証明. 終結式 $\mathrm{res}(X_n, Y_n)$ は k^2 を変数とする整数係数多項式とみなしてよい. 命題 2.1 の因数分解から X_n と Y_n は共通根を持たないことがわかるので, $k^2 \neq 0, 1$ ならば, $\mathrm{res}(X_n, Y_n) \neq 0$ である. よって, ヒルベルトの零点定理より, $(k^2(1-k^2))^t = Q\,\mathrm{res}(X_n, Y_n)$ を満たす正整数 t と k^2 を変数とする整数係数多項式 Q が存在する. 多項式環 $\mathbb{Q}[k^2]$ は一意分解整域だから, $\mathrm{res}(X_n, Y_n) = \kappa k^{2l}(1-k^2)^m$ を満たすような有理数 κ と非負整数 l, m がとれる. そして, $\mathrm{res}(X_n, Y_n) \in \mathbb{Z}[k^2]$ であることと, X_n と Y_n は偶多項式であることから, κ は正整数であることがわかる. □

命題 2.2 と終結式の定義の直後の議論より, l_n と m_n の関係式が得られる.

系 3.2. 補題 3.1 の状況で,

$$\begin{aligned}
&l_n(A,B) = m_n(A,D), \quad l_n(A,D) = m_n(A,B), \quad l_n(A,C) = m_n(A,C),\\
&l_n(B,C) = m_n(C,D), \quad l_n(C,D) = m_n(B,C), \quad l_n(B,D) = m_n(B,D),\\
&\kappa_n(A,B) = \kappa_n(A,D), \quad \kappa_n(B,C) = \kappa_n(C,D).
\end{aligned}$$

命題 2.1 の因数分解と終結式の定義から, 終結式 $\mathrm{res}(X_n, Y_n)$ は以下のようになる.

命題 3.3. 命題 2.1 の記号で, $X, Y \in \{A, B, C, D\}, X \neq Y$ とするとき,

$$\mathrm{res}(X_n, Y_n) = x_n^{\deg Y_n} y_n^{\deg X_n} \prod_{(r,s)\in R_n^X} \prod_{(r',s')\in R_n^Y} f(r, s, r', s')^2.$$

ただし, x_n, y_n はそれぞれ X_n, Y_n の最高次係数とし,

$$f(r, s, r', s') = \mathrm{sn}^2 \frac{rK + siK'}{n} - \mathrm{sn}^2 \frac{r'K + s'iK'}{n}$$

とする.

これを踏まえて, 次節では $f(r, s, r', s')^2$ を調べる.

4 q 展開

$\tau = iK'/K$, $q = e^{\pi i \tau}$ とする. 主結果の証明では以下の q 展開 ([10, 21·61], [10, 22·6,22·61]) を使う:

$$k^{\frac{1}{2}} = 2q^{\frac{1}{4}} + \cdots, \quad 2K = \pi\bigl(1 + 2\sum_{j=0}^{\infty} q^{j^2}\bigr)^2, \tag{4.1}$$

$$\mathrm{sn}\, u = \frac{2\pi}{Kk} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{q^{j+\frac{1}{2}} \sin(2j+1)x}{1 - q^{2j+1}}, \tag{4.2}$$

$$\mathrm{ns}\,u = \frac{1}{\mathrm{sn}\,u} = \frac{\pi}{2K}\operatorname{cosec} x + \frac{2\pi}{K}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{q^{2j+1}\sin(2j+1)x}{1-q^{2j+1}} \tag{4.3}$$

ただし, $x := \pi u/2K$ であり, (4.2), (4.3) はそれぞれ $|\operatorname{Im}(x)| < \frac{\pi}{2}\operatorname{Im}(\tau)$, $\{x \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im}(x)| < \pi\operatorname{Im}(\tau), x \ni \pi\mathbb{Z}\}$ において成立する.

$u = \frac{rK+siK'}{n}$ $((r,s) \in R_n)$ としたときを考える. $0 \le s < n$ なら (4.2), $s = 0$ なら (4.3) が使えることに注意すれば, $-4\,\mathrm{sn}^2\,\frac{rK+siK'}{n}$ は q に関する先頭次数が $-\frac{s}{n}$ で, 先頭係数が

$$\begin{cases} (\zeta^r - \zeta^{-r})^2 & s = 0 \text{ のとき}, \\ \zeta^{-2r} & 0 < s < n \text{ のとき}, \quad (\zeta = \exp\dfrac{\pi i}{2n}) \\ (\zeta^r - \zeta^{-r})^{-2} & s = n \text{ のとき} \end{cases}$$

である $q^{\frac{1}{2n}}$ のローラン級数で表示できる. よって $f(r,s,r',s')^2$ の q 展開の先頭項が得られ, 主定理の証明に使う部分を以下の補題でまとめる.

補題 4.1. $s \ge s'$ とするとき, $16f(r,s,r',s')^2$ の q 展開の先頭項は q に関する次数が $-\frac{2s}{n}$ であり, 先頭係数を $L(r,s,r',s')$ とおくと

$$|L(r,s,r',s')| = \begin{cases} |1-\zeta_{2n}^{r'}|^{-4} & s < s' = n,\ n: \text{奇数のとき}, \\ |1-\zeta_{2n}^{r}|^{-4} & s' < s = n,\ n: \text{偶数のとき}, \quad (\zeta_m = \exp\dfrac{2\pi i}{m}) \\ 1 & \text{その他}. \end{cases}$$

5　定理 1.1 の証明

$X, Y \in \{A,B,C,D\}, X \ne Y$ とする. 命題 3.3 の設定と同様に, x_n, y_n はそれぞれ多項式 X_n, Y_n の x を変数としたときの先頭係数とする. 命題 2.1 の最高次係数と (4.1) より, x_n と y_n の q 展開が得られ, その先頭係数をそれぞれ x'_n と y'_n とする. このとき, 命題 3.3 と補題 4.1 から, $\operatorname{res}(X_n, Y_n)$ の q 展開の先頭項は

$$x_n'^{\deg Y_n} y_n'^{\deg X_n} \prod_{(r,s)\in R_n^X} \prod_{(r',s')\in R_n^Y} \frac{L(r,s,r',s')}{16} q^{-\frac{2}{n}\max\{s,s'\}} \tag{5.1}$$

である.

まず, q 展開の先頭項の次数を考える. 補題 3.1 と (4.1) によれば, $\operatorname{res}(X_n, Y_n)$ の q 展開の先頭項の次数は $q^{l_n(X,Y)}$ である. 一方で, 命題 2.1 と (4.1) から, $x_n'^{\deg Y_n} y_n'^{\deg X_n}$ の q のべきの部分は $q^{\frac{1}{2}\deg X_n \deg Y_n}$ であり, よって, (5.1) より,

$$l_n(X,Y) = \frac{1}{2}\deg X_n \deg Y_n - \frac{2}{n}\sum_{(r,s)\in R_n^X}\sum_{(r',s')\in R_n^Y}\max\{s,s'\}$$

であるとわかり, $l_n(X,Y)$ が得られる. よって, 系 3.2 より, $m_n(X,Y)$ の値も求められる.

次に, $\operatorname{res}(X_n, Y_n)$ の q 展開の先頭係数について考える. 補題 3.1 と (4.1) より, それは $\kappa_n(X,Y)16^{l_n(X,Y)}$ であることがわかる. $\kappa_n(X,Y)$ は正であるから, (5.1) の絶対値のみわかればよい. $\operatorname{res}(X_n, Y_n) = \operatorname{res}(Y_n, X_n)$ であることと系 3.2 より, $(X,Y) \in \{(A,C),(A,D),(B,C),(B,D)\}$ の場合のみ求めればよいことがわかるため, ここでは s は偶数で, s' は奇数としてよ

い．命題 2.1 と (4.1) より，(5.1) の ${x'_n}^{\deg Y_n}{y'_n}^{\deg X_n}$ と 16 のべきの部分は自明である．残る $P := \prod_{(r,s)\in R_n^X}\prod_{(r',s')\in R_n^Y}|L(r,s,r',s')|$ は

$$P_1 = \prod_{\substack{(r,s)\in R_n^X,\\ s\notin\{0,n\}}}\prod_{\substack{(r',s')\in R_n^Y,\\ s'\notin\{0,n\}}}|L(r,s,r',s')|, \quad P_2 = \prod_{\substack{(r,s)\in R_n^X,\\ s\in\{0,n\}}}\prod_{\substack{(r',s')\in R_n^Y,\\ s'\notin\{0,n\}}}|L(r,s,r',s')|,$$
$$P_3 = \prod_{\substack{(r,s)\in R_n^X,\\ s\notin\{0,n\}}}\prod_{\substack{(r',s')\in R_n^Y,\\ s'\in\{0,n\}}}|L(r,s,r',s')|, \quad P_4 = \prod_{\substack{(r,s)\in R_n^X,\\ s\in\{0,n\}}}\prod_{\substack{(r',s')\in R_n^Y,\\ s'\in\{0,n\}}}|L(r,s,r',s')|$$

として，$P = P_1P_2P_3P_4$ と分解し，s,s' の偶奇の仮定を踏まえ，補題 4.1 を用いれば，よく知られた $\prod_{r=1}^{n-1}(1-\zeta_n^r) = n$ と $|1-\zeta_n^r| = |1-\zeta_n^{n-r}|$ が使える．したがって，P_1, P_2, P_3, P_4 が計算でき，$\mathrm{res}(X_n, Y_n)$ の先頭係数が得られる．よって，(1.2) (補題 3.1 内の式と同じ式) の両辺の q 展開の先頭係数を比較すれば，κ_n が得られ，証明が完了する．

参考文献

[1] T. M. Apostol, Resultants of cyclotomic polynomials, Proc. Amer. Math. Soc. **24** (1970), 457–462.

[2] A. Cayley, An elementary treatise on elliptic functions, second edition, Dover Publications, Inc., New York, 1961.

[3] F.-E. Diederichsen, Über die Ausreduktion ganzzahliger Gruppendarstellungen bei arithmetischer Äquivalenz, Abh. Math. Sem. Hansischen Univ. **13** (1940), 357–412.

[4] D. P. Jacobs, M. O. Rayes and V. Trevisan, The resultant of Chebyshev polynomials, Canad. Math. Bull. **54** (2011), 288–296.

[5] E. T. Lehmer, A numerical function applied to cyclotomy, Bull. Amer. Math. Soc. **36** (1930), 291–298.

[6] K. A. Loper and N. J. Werner, Resultants of minimal polynomials of maximal real cyclotomic extensions, J. Number Theory **158** (2016), 298–315.

[7] S. R. Louboutin, Resultants of Chebyshev polynomials: a short proof, Canad. Math. Bull. **56** (2013), 602–605.

[8] H. Lüneburg, Resultanten von Kreisteilungspolynomen, Arch. Math. (Basel) **42** (1984), 139–144.

[9] H. Schmidt, Resultants and discriminants of multiplication polynomials for elliptic curves, Appendix A by Schmidt and Jung Kyu Canci, J. Number Theory, **149** (2015), 70–91.

[10] E. T. Whittaker and G. N. Watson, A course of modern analysis, An introduction to the general theory of infinite processes and of analytic functions; with an account of the principal transcendental functions, Reprint of the fourth (1927) edition, Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[11] K. Yamagata and M. Yamagishi, On the ring of integers of real cyclotomic fields, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **92** (2016), 73–76.

[12] M. Yamagishi, Resultants of Chebyshev polynomials: the first, second, third, and fourth kinds, Canad. Math. Bull. **58** (2015), 423–431.

[13] 竹内端三, 楕円函数論, 岩波書店, 1936.