種の指標 L 関数の明示式とその応用

水野 義紀 * (徳島大学)

1　導入

城戸 義旗さんは大阪大学修士論文 [7] (平成 15 年) において, 多くの数値例を基に次の予想を提示した. 主張にある $h(D_i)$ は, 判別式 D_i の虚 2 次体 $\mathbf{Q}(\sqrt{D_i})$ の類数, $W(D_i)$ は単数群の位数, $A_0(f^2D_0)$ は判別式 f^2D_0 の簡約 2 次無理数の集合, $\lfloor\alpha\rfloor$ はガウス記号 ($\lfloor\alpha\rfloor \le \alpha < \lfloor\alpha\rfloor+1$ を満たす整数) である.

城戸の予想. $D_0 > 0$ を実 2 次体の判別式とし, $D_1 < 0$, $D_2 < 0$ を虚 2 次体の判別式とする. さらに, ある $f \in \mathbf{N}$ が存在して, $f^2D_0 = D_1D_2$ の関係があるものとする. このとき,

$$24\frac{h(D_1)h(D_2)}{W(D_1)W(D_2)} = \sum_{\alpha\in A_0(f^2D_0)} \psi(\alpha)\lfloor\alpha\rfloor$$

が成り立つ. ここで, ψ は, ±1 に値を取るもので次で定義される. $\alpha \in A_0(f^2D_0)$ に対して, α の特性多項式を aX^2+bX+c $(a,b,c\in\mathbf{Z},(a,b,c)=1,a>0,b^2-4ac=f^2D_0)$ とする. D_1 を割る素判別式 d に対して, クロネッカー記号 $(\frac{d}{a})$ と $(\frac{d}{c})$ の少なくとも一方は 0 でなく, $\chi_d(\alpha)$ を 0 でない方の値とする. ここで, ψ を

$$\psi(\alpha) = \prod_{\text{prime discriminant } d|D_1} \chi_d(\alpha)$$

と定義する.

$(D_1, D_2) = 1$, $f = 1$, ψ が種の指標である場合はザギエによる既知の結果であり, 条件を弱めたらどうなるかを実験し定式化したのが城戸の予想である.

ザギエの結果を特殊化することで, ヒルツェブルフ ([4, p. 63]) による虚 2 次体の類数を連分数で記述する面白い公式が導ける. ザギエ「数論入門」([17, 14 章]) に解説がある. 主張の条件 $p > 3$ は, $p = 3$ のとき単数群の位数が違ってくることに由来する.

ヒルツェブルフ・ザギエ. $3 < p \equiv 3 \pmod 4$ を素数, $\mathbf{Q}(\sqrt{p})$ の類数 $h(4p) = 1$ とする. $\sqrt{p}$ の連分数展開を $\sqrt{p} = [a_0, \overline{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{2t}}]$ とすると, $\mathbf{Q}(\sqrt{-p})$ の類数が

$$h(-p) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{2t}(-1)^i a_i$$

で与えられる.

城戸さんは大阪大学博士前期課程の 1 学年後輩で, 山本芳彦先生の研究室であった. 彼が卒業するときに修士論文をもらい, それから折をみて考えていたが, [8], [3] をきっかけとしてやっと理解できた. 城戸の予想と一般化, 応用として得られるヒルツェブルフ・ザギエ型の公式について報告する.

* この研究は, 科学研究費補助金により助成を受けたものです (若手研究 (B) 25800021, 基盤研究 (C) 17K05175).

2 種の指標の L 関数と, その明示式

Δ を 2 次判別式とする. すなわち整数 Δ は平方数でなく, $\Delta \equiv 0, 1 \pmod 4$. Δ が偶数か奇数かに従って $\sigma = 0$ または 1 とおき, $\omega_\Delta := (\sigma + \sqrt{\Delta})/2$ (平方根は $\sqrt{\Delta} := i^{(1-\mathrm{sign}(\Delta))/2}\sqrt{|\Delta|}$) とする. $\mathcal{O}_\Delta := [1, \omega_\Delta]$ を判別式 Δ の整環とする. 極大でないものも含めて考えている. $\mathcal{C}_\Delta$ でイデアル類群, $\mathcal{C}_\Delta^+$ で狭義イデアル類群を表し, $h(\Delta) := |\mathcal{C}_\Delta|$, $h^+(\Delta) := |\mathcal{C}_\Delta^+|$ が類数である. $\Delta < 0$ なら $W(\Delta) := \sharp\mathcal{O}_\Delta^\times$ とおく. 2 次判別式 Δ は $\Delta = d_K f^2$ の形に一意的に表せる. ここで d_K は 2 次体 $K = \mathbf{Q}(\sqrt{\Delta})$ の判別式, 自然数 f は導手とよばれる.

任意の $\mathcal{O}_\Delta$-可逆な整イデアル $\mathfrak{a}$ に対し, 整数基底 $\mathfrak{a} = [\beta_1, \beta_2]$ を $(\beta_1\beta_2' - \beta_1'\beta_2)/\sqrt{\Delta} < 0$ を満たすように取る. 但し, β' は β の共役である. この様な基底を向き付けられた基底とよぶ. この基底に対し $f_{\beta_1,\beta_2}(x, y) := \mathfrak{N}_\Delta(\mathfrak{a})^{-1}(\beta_1 x + \beta_2 y)(\beta_1' x + \beta_2' y)$ とおくと, これは判別式 Δ の原始的 2 元 2 次形式となる. ここで $\mathfrak{N}_\Delta(\mathfrak{a}) := (\mathcal{O}_\Delta : \mathfrak{a})$ は $\mathfrak{a}$ の絶対ノルムとした. 整数係数 2 元 2 次形式 $ax^2 + bxy + cy^2$ を $[a, b, c]$ と略記することもある. 2 次形式の $SL_2(\mathbf{Z})$ 同値類 $[\![f_{\beta_1,\beta_2}]\!]$ は, 向き付けられた基底の取り方に依らず定まる. 第 10 章も参照.

e_1, e_2 を二つの基本判別式とする. 自然数 f_0 に対し, $\Delta := e_1 e_2 f_0^2$ は判別式になる. 逆に判別式 Δ に対し, Δ/e_1 がまた判別式になる様な基本判別式 $e_1 \mid \Delta$ を取り, $\Delta/e_1 = e_2 f_0^2$ と表せば $\Delta = e_1 e_2 f_0^2$ の形の表示を得る.

$\Delta = e_1 e_2 f_0^2$ を 2 次判別式とする. 文献 [1], [8], [5] 等に従い, 判別式 Δ の原始的 2 元 2 次形式で負定値でないものに対し, 種の指標 χ_{e_1,e_2} を次で定義する:

$$\chi_{e_1,e_2}([a,b,c]) := \prod_{\text{prime discriminant } q^*|e_1} \chi^{(q^*)}([a,b,c]),$$

$$\chi^{(q^*)}([a,b,c]) := \begin{cases} \chi_{q^*}(a) & \text{if } (a,q) = 1, \\ \chi_{q^*}(c) & \text{if } (c,q) = 1, \end{cases} \qquad \chi_{q^*}(m) := \left(\frac{q^*}{m}\right).$$

ここで $\chi_{q^*}(m)$ はクロネッカー記号. この χ_{e_1,e_2} は well-defined な狭義の類指標になる. 特に $SL_2(\mathbf{Z})$ 同値類上で一定値を取る. $\chi_{e_1,e_2} = \chi_{e_2,e_1}$ も確認できる.

2 次判別式 Δ に付随する次のふたつの対象を同一視する (本稿, 第 10 章を参照): 狭義イデアル類群 $\mathcal{C}_\Delta^+$, 原始的 2 元 2 次形式で負定値でないものの $SL_2(\mathbf{Z})$ 同値類 $\mathfrak{F}_\Delta$. この同一視により, 種の指標 χ_{e_1,e_2} を $\mathcal{C}_\Delta^+$ の指標と考え, 種の指標の L 関数を次で定義する:

$$\zeta(s, \mathcal{O}_\Delta, \chi_{e_1,e_2}) := \sum_{\text{invertible } \mathcal{O}_\Delta-\text{ideal } \mathfrak{a}} \chi_{e_1,e_2}(\mathfrak{a})\mathfrak{N}_\Delta(\mathfrak{a})^{-s} \qquad (\Re(s) > 1).$$

ここで和はすべての $\mathcal{O}_\Delta$-可逆な整イデアルをわたる. 表題に有る明示式とは, 次の結果を指す.

定理 1. e_1, e_2 を異なる二つの基本判別式, f_0 を自然数, $\Delta := e_1 e_2 f_0^2$ とすると,

$$\zeta(s, \mathcal{O}_\Delta, \chi_{e_1,e_2}) = L(s, \chi_{e_1})L(s, \chi_{e_2})$$
$$\times \prod_{\text{prime } p|f_0} \frac{(1 - \chi_{e_1}(p)p^{-s})(1 - \chi_{e_2}(p)p^{-s}) - p^{m_p - 1 - 2m_p s}(p^{1-s} - \chi_{e_1}(p))(p^{1-s} - \chi_{e_2}(p))}{1 - p^{1-2s}}.$$

ここで $L(s, \chi_e)$ はディリクレ L 関数, $\chi_e(*) = (\frac{e}{*})$ はクロネッカー記号, m_p は p^{m_p} が f_0 を割る最大の整数.

$(e_1, e_2) = 1, f_0 = 1$ の場合は良く知られた分解式で, 証明も易しい. 基本判別式 e_1, e_2 のどちらかが 1 の場合, この結果は金子先生 [9] の結果であり, e_1, e_2 のどちらかは奇数で, Δ の導

手も奇数の場合, この結果は Chinta-Offen [3] にある. しかし, 両論文において証明は省略されている.

指標の直交性を援用して局所因子を分析すると, 定理 1 から 2 元 2 次形式の表現数を係数に持つディリクレ級数を, 固定した種の中の類をわたって平均したものの明示式 (Williams 達による) を再導出することも出来る. $\Delta < 0$ なら [5, Theorem 10.1, p. 295], $\Delta > 0$ なら [13, Theorem 3, p. 52] を参照. 言い換えると, 定理 1 は彼らの結果と同値である. その意味で定理 1 は, 本当に新しいとは言えないが, 我々の証明は Williams 達のものに比べて直接的で工夫は要らない.

また, 伊吹山先生 [6] もこの明示式を独立に出されていることを知った. その動機は, 2 次ジーゲル保型形式の跡公式で type VII の寄与に清水の L 関数という形で出てくるということである.

3 ヒルツェブルフ・ザギエ型公式

定理 1 の応用として, ヒルツェブルフ・ザギエ型の公式を得ることが出来る.

系 1. $p \equiv 1 \pmod{12}$ を素数で, $\mathbf{Q}(\sqrt{p})$ の類数が $h(p) = 1$ であるとする. $\omega_{9p} := (1+3\sqrt{p})/2$ の連分数展開を $\omega_{9p} = [a_0, \overline{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{2t}}]$ とすると, $h(9p) = 1$ であって, かつ $\mathbf{Q}(\sqrt{-3p})$ の類数が

$$h(-3p) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2t}(-1)^i a_i$$

で与えられる.

例 1 ($p = 73$)**.** $(1+3\sqrt{73})/2 = [13, \overline{3, 6, 12, 1, 1, 1, 12, 6, 3, 25}]$, $-3+6-12+1-1+1-12+6-3+25 = 8$ から $h(-3\cdot 73) = 4$.

系 2. $p \equiv 1 \pmod{24}$ を素数で, $\mathbf{Q}(\sqrt{p})$ の類数が $h(p) = 1$ であるとする. $\omega_{36p} := 3\sqrt{p}$ の連分数展開を $\omega_{36p} = [a_0, \overline{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{2t}}]$ とすると, $h(36p) = 1$ であって, かつ $\mathbf{Q}(\sqrt{-3p})$ の類数が

$$h(-3p) = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{2t}(-1)^i a_i$$

で与えられる.

例 2 ($p = 73$)**.** $3\sqrt{73} = [25, \overline{1, 1, 1, 2, 1, 1, 5, 1, 4, 1, 5, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 50}]$, $-1+1-1+2-1+1-5+1-4+1-5+1-1+2-1+1-1+\ 50 = 40$ から $h(-3\cdot 73) = 4$.

得られた L 関数の明示式と併せて, この様なことを金子先生に報告すると,「こんなのもある」と次の観察を教示頂くことが出来た. その観察も, 我々の結果の系として導くことが出来る. この系 3 は, ヒルツェブルフ・ザギエにあたる $p \equiv 3 \pmod 4$ の場合を補う形の定式化であって, さすが金子先生, と思われた.

系 3. $p \equiv 1 \pmod 4$ を素数, 整環 $\mathcal{O}_{4p}$ の類数 $h(4p) = 1$ とする. $\omega_{16p} := 2\sqrt{p}$ の連分数展開を $\omega_{16p} = [a_0, \overline{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{2t}}]$ とすると, $h(16p) = 1$ であって, かつ $\mathbf{Q}(\sqrt{-p})$ の類数が

$$h(-4p) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{2t}(-1)^i a_i$$

で与えられる.

例 3 ($p=53$)**.** $2\sqrt{53}=[14,\overline{1,1,3,1,1,1,6,1,1,1,3,1,1,28}]$, $-1+1-3+1-1+1-6+1-1+1-3+1-1+28=18$ から $h(-4\cdot 53)=6$.

例 4 ($p=73$)**.** $2\sqrt{73}=[17,\overline{11,2,1,3,8,3,1,2,11,34}]$, $-11+2-1+3-8+3-1+2-11+34=12$ から $h(-4\cdot 73)=4$.

注意 1. $p\equiv 1 \pmod 8$ のとき, $h(4p)=1$ は $h(p)=1$ と同値になる. 実際, 後で述べる補題 4 から $h(4p)=h(p)(2-\chi_p(2))/[\mathcal{O}_p^\times:\mathcal{O}_{4p}^\times]$ と $[\mathcal{O}_p^\times:\mathcal{O}_{4p}^\times]\mid(2-\chi_p(2))$ が出るので, $[\mathcal{O}_p^\times:\mathcal{O}_{4p}^\times]=1$. 従って $p\equiv 1 \pmod 8$ の場合, 系 3 はルーにより既知である ([12, p. 1147]).

これらの系は, 次に述べる定理 2 の特殊化として得られる. $\Delta>0$ を 2 次判別式とする. 判別式 Δ の原始的不定形式 $f=[a,b,c]$ に対し, $\xi_f=(b+\sqrt{\Delta})/(2a)$ とおく. ξ_f は 2 次無理数である (型 (a,b,c), 判別式 Δ の 2 次無理数とよばれている). $\mathcal{A}_\Delta$ を判別式 Δ の 2 次無理数全体, $\mathcal{A}_\Delta^+:=\{\alpha\in\mathcal{A}_\Delta\,;\,-1<\alpha'<0,\ 1<\alpha\}$ を判別式 Δ の簡約 2 次無理数全体とする. $\alpha=(b+\sqrt{\Delta})/(2a)\in\mathcal{A}_\Delta^+$ に対し, 格子 $\mathfrak{a}=[a,a\alpha]$ は $\mathcal{O}_\Delta$-正規イデアル (regular ideal) となる. ここで $\mathcal{O}_\Delta$-正規イデアルとは, 整イデアルであって可逆かつ原始的なことを意味する. $\alpha=(b+\sqrt{\Delta})/(2a)\in\mathcal{A}_\Delta^+$ に原始的 2 次形式 $f_\alpha(x,y):=f_{a,a\alpha}(x,y)=[a,b,(b^2-\Delta)/(4a)]$ を付随させ, その指標の値として記号 $\chi_{e_1,e_2}(\alpha)$ を定める: $\chi_{e_1,e_2}(\alpha):=\chi_{e_1,e_2}(f_\alpha)$.

定理 2. $e_1,e_2<0$ を異なるふたつの負基本判別式, f_0 を自然数, $\Delta:=e_1e_2f_0^2>0$ とすると,

$$\frac{6\sqrt{\Delta}}{\pi^2}\zeta(1,\mathcal{O}_\Delta,\chi_{e_1,e_2})=\sum_{\alpha\in\mathcal{A}_\Delta^+}\chi_{e_1,e_2}(\alpha)\lfloor\alpha\rfloor=\frac{h(e_1)h(e_2)}{W(e_1)W(e_2)}\cdot 24f_0$$
$$\times\prod_{\text{prime }p\mid f_0}\frac{(1-\chi_{e_1}(p)p^{-1})(1-\chi_{e_2}(p)p^{-1})-p^{-1-m_p}(1-\chi_{e_1}(p))(1-\chi_{e_2}(p))}{1-p^{-1}}.$$

ここで m_p は定理 1 と同様に定義され, $\lfloor\alpha\rfloor$ は $\lfloor\alpha\rfloor\le\alpha<\lfloor\alpha\rfloor+1$ を満たす整数である.

$f_0=1$, $e_1\ne e_2$ の場合が城戸さんの予想である. $e_1\mid e_2$, $f_0=1$ の場合には, Lu [12] も $h(e_1)h(e_2)$ の表示を得ているが, 少し複雑に見える.

判別式 $\Delta=1440$ の例. $e_1=-4,e_2=-8\cdot 5,f_0=3,\Delta=1440$ のとき, $h(e_1)=1$, $W(e_1)=4$, $h(e_2)=2$, $W(e_2)=2$, $\chi_{e_1}(3)=\chi_{e_2}(3)=-1$ で $\sum_{\alpha\in\mathcal{A}_\Delta^+}\chi_{e_1,e_2}(\alpha)\lfloor\alpha\rfloor=36$.

$e_1'=-4\cdot 5,e_2'=-8,f_0=3,\Delta=1440$ のとき, $h(e_1')=2$, $W(e_1')=4$, $h(e_2')=1$, $W(e_2)=2$, $\chi_{e_1'}(3)=\chi_{e_2'}(3)=1$ で $\sum_{\alpha\in\mathcal{A}_\Delta^+}\chi_{e_1',e_2'}(\alpha)\lfloor\alpha\rfloor=24$.

reduced forms	$\alpha\in\mathcal{A}_\Delta^+$	cont.frac.	$\chi_{e_1,e_2}(\alpha)\lfloor\alpha\rfloor$	$\chi_{e_1',e_2'}(\alpha)\lfloor\alpha\rfloor$
$[13,-20,-20]$	$\frac{2}{13}(5+3\sqrt{10})$	$\overline{[2,4,2,1]}$	$+2$	-2
$[20,-20,-13]$	$\frac{1}{10}(5+3\sqrt{10})$	$\overline{[1,2,4,2]}$	-1	$+1$
$[8,-24,-27]$	$\frac{3}{4}(2+\sqrt{10})$	$\overline{[3,1,6,1]}$	$+3$	-3
$[27,-24,-8]$	$\frac{2}{9}(2+\sqrt{10})$	$\overline{[1,6,1,3]}$	-1	$+1$
$[5,-30,-27]$	$\frac{3}{5}(5+2\sqrt{10})$	$\overline{[6,1,3,1]}$	$+6$	-6
$[27,-30,-5]$	$\frac{1}{9}(5+2\sqrt{10})$	$\overline{[1,3,1,6]}$	-1	$+1$
$[8,-32,-13]$	$\frac{1}{4}(8+3\sqrt{10})$	$\overline{[4,2,1,2]}$	-4	$+4$
$[13,-32,-8]$	$\frac{2}{13}(8+3\sqrt{10})$	$\overline{[2,1,2,4]}$	$+2$	-2
$[1,-36,-36]$	$6(3+\sqrt{10})$	$\overline{[36,1]}$	$+36$	$+36$
$[36,-36,-1]$	$\frac{1}{6}(3+\sqrt{10})$	$\overline{[1,36]}$	-1	-1
$[4,-36,-9]$	$\frac{3}{2}(3+\sqrt{10})$	$\overline{[9,4]}$	-9	-9
$[9,-36,-4]$	$\frac{2}{3}(3+\sqrt{10})$	$\overline{[4,9]}$	$+4$	$+4$
			36	24

reduced forms は簡約形式のつもりであるが, Halter-Koch ([8, p. 210]) の定義は高木 [15] と少し異なる. $\mathcal{A}_\Delta^+$ の元を列挙するために用いたのみで本論とは関係ないが, 上では [15] の意味で用いている.

4 定理 1 の証明方針

2 次判別式 $\Delta = e_1e_2f_0^2$ が偶数か奇数かに従って $\sigma = 0$ または 1 とおき, $\omega_\Delta = (\sigma+\sqrt{\Delta})/2$ としていた. 格子 $\mathfrak{b} = [a, r+\omega_\Delta]$ $(a, r \in \mathbf{N})$ が $\mathcal{O}_\Delta$-イデアルになるのは, $a \mid \mathcal{N}(r+\omega_\Delta)$ なるときである. さらに, $\mathcal{O}_\Delta$-イデアル $\mathfrak{b} = [a, r+\omega_\Delta]$ が $\mathcal{O}_\Delta$-可逆になるのは, $\gcd(a, \Delta, \mathcal{N}(r+\omega_\Delta)/a) = 1$ なるときである. $\mathcal{O}_\Delta$ の原始的イデアル $\mathfrak{b}$ は, 適当な $a, r \in \mathbf{N}$, $r \pmod a$, $a \mid \mathcal{N}(r+\omega_\Delta)$, $\mathfrak{N}_\Delta(\mathfrak{b}) = a$ を用いて $\mathfrak{b} = [a, r+\omega_\Delta]$ と表せる ([8, Theorem 5.4.2, p. 133] 参照). この基底 $\beta_1 = a, \beta_2 = r+\omega_\Delta$ は $(\beta_1\beta_2' - \beta_1'\beta_2)/\sqrt{\Delta} < 0$ を満たし, 向き付けられている. $\mathcal{O}_\Delta$ の整イデアルは $\mathcal{O}_\Delta$-可逆かつ原始的なとき, $\mathcal{O}_\Delta$-正規 (regular) と呼ばれる.

2 次判別式 $\Delta = e_1e_2f_0^2$ を $\Delta = d_Kf^2$, d_K は $K := \mathbf{Q}(\sqrt{\Delta})$ の判別式, f は導手, と表しておく. $\mathcal{O}_\Delta$ においては, 素イデアル分解の一意性は必ずしも成立しない. しかし導手 f と素なイデアル $\mathfrak{a}$ $((\mathfrak{N}_\Delta(\mathfrak{a}), f) = 1)$ に限れば成立する. また, 可逆整イデアルを互いに素な素数冪ノルムをもつ可逆整イデアルの積に分解する仕方は一意的である. 自然数でくくれば原始的なイデアルに帰着出来るので, $\mathcal{O}_\Delta$-正規イデアルで考えれば十分である. 具体的には, $\mathcal{O}_\Delta$-正規イデアル $\mathfrak{b} = [\prod_p p^{l_p}, r+\omega_\Delta]$ の一意分解は $\mathfrak{b} = \prod_p \mathfrak{b}^{(p)}$, $\mathfrak{b}^{(p)} := [p^{l_p}, r+\omega_\Delta]$, $\mathfrak{N}_\Delta(\mathfrak{b}^{(p)}) = p^{l_p}$ で与えられる ([8, Exercise 5.4.8, p. 139] のイデアル積の公式と [8, Theorem 5.4.2, p. 133] の正規イデアルの特徴付け参照). 従って, オイラー積表示を得る ([9] も参照):

$$\zeta(s, \mathcal{O}_\Delta, \chi_{e_1,e_2}) = \prod_{\text{prime } p} \zeta_p(s, \mathcal{O}_\Delta, \chi_{e_1,e_2}),$$
$$\zeta_p(s, \mathcal{O}_\Delta, \chi_{e_1,e_2}) := \sum_{t\ge 0} \sum_{\substack{\text{invertible } \mathcal{O}_\Delta-\text{ideal } \mathfrak{a} \\ \mathfrak{N}_\Delta(\mathfrak{a}) = p^t}} \chi_{e_1,e_2}(\mathfrak{a})\mathfrak{N}_\Delta(\mathfrak{a})^{-s} = \sum_{t\ge 0} p^{-st}\eta_1(p^t).$$

ここで

$$\eta_1(p^t) := \sum_{\substack{\text{invertible } \mathcal{O}_\Delta-\text{ideal } \mathfrak{a} \\ \mathfrak{N}_\Delta(\mathfrak{a}) = p^t}} \chi_{e_1,e_2}(\mathfrak{a}) = \sum_{j=0}^{\lfloor t/2 \rfloor} \sum_{\substack{\text{regular } \mathcal{O}_\Delta-\text{ideal } \mathfrak{b} \\ \mathfrak{N}_\Delta(\mathfrak{b}) = p^{t-2j}}} \chi_{e_1,e_2}(\mathfrak{b}) = \sum_{j=0}^{\lfloor t/2 \rfloor} \theta_1(p^{t-2j}),$$
$$\eta_0(p^t) := \sum_{\substack{\text{invertible } \mathcal{O}_\Delta-\text{ideal } \mathfrak{a} \\ \mathfrak{N}_\Delta(\mathfrak{a}) = p^t}} 1 = \sum_{j=0}^{\lfloor t/2 \rfloor} \sum_{\substack{\text{regular } \mathcal{O}_\Delta-\text{ideal } \mathfrak{b} \\ \mathfrak{N}_\Delta(\mathfrak{b}) = p^{t-2j}}} 1 = \sum_{j=0}^{\lfloor t/2 \rfloor} \theta_0(p^{t-2j}),$$
$$\theta_1(p^{t-2j}) := \sum_{\substack{\text{regular } \mathcal{O}_\Delta-\text{ideal } \mathfrak{b} \\ \mathfrak{N}_\Delta(\mathfrak{b}) = p^{t-2j}}} \chi_{e_1,e_2}(\mathfrak{b}), \qquad \theta_0(p^{t-2j}) := \sum_{\substack{\text{regular } \mathcal{O}_\Delta-\text{ideal } \mathfrak{b} \\ \mathfrak{N}_\Delta(\mathfrak{b}) = p^{t-2j}}} 1.$$

上に述べたように, 導手 f を割る素数 p のオイラー因子の計算に特に注意が要る. 文献 [2, p. 263] にある, ノルムが p 冪の正規イデアルのリストを用いて, 対応する原始的 2 次形式を求めた後, χ_{e_1,e_2} の値を定めて $\theta_j(p^t)$ を書き下し, 指標和を計算することでオイラー因子が計算できる.

値 $\theta_j(p^t)$ の計算例. 奇素数 $p \mid f$ を取り, n を $d_1 := \Delta/p^{2n}$ がまた判別式になる最大の整数とする. 他の場合も同様であるから, $(\frac{d_1}{p}) = -1$ の場合に値 $\theta_j(p^{2n})$ の計算を紹介する.

文献 [2, p. 263] あるいは [8, Theorem 5.4.2, p. 133] により, $\mathfrak{b} = [p^{2n}, r+\omega_\Delta]$ が $\mathcal{O}_\Delta$-正規になるのは, ある自然数 m で $2r+\sigma = p^n m$, $p \nmid m^2 - d_1$ なるものが存在するときである. $(\frac{d_1}{p}) = -1$ と仮定しているので, これは $2r+\sigma = p^n m$ なる自然数 m が存在することとしてよく, m は $\mathrm{mod}\ p^n$ を動くことが出来る. 従って

$$\theta_0(p^{2n}) = \sum_{\substack{\text{regular } \mathcal{O}_\Delta-\text{ideal } \mathfrak{b} \\ \mathfrak{N}_\Delta(\mathfrak{b}) = p^{2n}}} 1 = \sum_{m \bmod p^n} 1 = p^n.$$

$\mathfrak{b} = [p^{2n}, r+\omega_\Delta]$ の定める原始的 2 次形式の同値類の代表は

$$f_{p^{2n}, r+\omega_\Delta}(x,y) = p^{-2n}(p^{2n}x + (r+\omega_\Delta)y)(p^{2n}x + (r+\omega'_\Delta)y) = [p^{2n}, p^n m, (m^2-d_1)/4]$$

である (10 章にある全単射 $\Phi_\Delta : \mathfrak{F}_\Delta \to \mathcal{C}^+_\Delta$ により, $\Phi_\Delta([\![f_{p^{2n},r+\omega_\Delta}]\!]) = [\mathfrak{b}]^+$). 従って

$$\chi^{(q^*)}(\mathfrak{b}) = \begin{cases} 1 & \text{if } q \neq p, \\ \chi_{p^*}(m^2-d_1) & \text{if } q = p, \end{cases} \qquad \chi_{e_1,e_2}(\mathfrak{b}) = \begin{cases} 1 & \text{if } p \nmid e_1, \\ \chi_{p^*}(m^2-d_1) & \text{if } p \mid e_1, \end{cases}$$

$$\theta_1(p^{2n}) = \sum_{\substack{\text{regular } \mathcal{O}_\Delta-\text{ideal } \mathfrak{b} \\ \mathfrak{N}_\Delta(\mathfrak{b}) = p^{2n}}} \chi_{e_1,e_2}(\mathfrak{b}) = \begin{cases} \sum_{m \bmod p^n} 1 = p^n & \text{if } p \nmid e_1, \\ \sum_{m \bmod p^n} \chi_{p^*}(m^2-d_1) = -p^{n-1} & \text{if } p \mid e_1. \end{cases}$$

5　2-因子の扱い

判別式 e を基本判別式 D と導手 F を用いて $e = DF^2$ と表す. このとき次の記号を用いる: $\Delta(e) := D$ とし, $\Delta_2(e)$ は $\Delta(e)$ の 2-因子. 従って $\Delta_2(e) \in \{1, -4, \pm 8\}$ かつ $\Delta(e)/\Delta_2(e)$ は奇基本判別式 (または 1). 前の設定に戻って, $\Delta = e_1 e_2 f_0^2$ とする. m_2 は $2^{m_2} \| f_0$ なる 0 または自然数とし, いつもの様に $\Delta = d_K f^2$ と表し, $2 \mid f$ の場合を考える. n で $d_1 := \Delta/2^{2n}$ がまた判別式になる最大の整数を表す. 偶な素判別式は 3 種類あるため, それらが e_1, e_2 に含まれる仕方に従って $e_1 e_2 f_0^2$ に付随する基本判別式 $\Delta(e_1 e_2 f_0^2)$ および導手の 2 冪がいろいろ起こりえる. そのため, 少し注意が必要になる.

- d_1 は奇判別式 (i.e. $\Delta_2(d_1) = 1$) $\Longleftrightarrow \Delta_2(e_1) = \Delta_2(e_2)$
- $\Delta_2(d_1) = -4 \Longleftrightarrow (\Delta_2(e_1), \Delta_2(e_2)) \in \{(1,-4), (-4,1), (\pm 8, \mp 8)\} \Longrightarrow d_1 \equiv 12 \pmod{16}$
- $\Delta_2(d_1) = 8 \Longleftrightarrow (\Delta_2(e_1), \Delta_2(e_2)) \in \left\{ \begin{matrix} (1,8), (8,1), \\ (-4,-8), (-8,-4) \end{matrix} \right\} \Longrightarrow d_1 \equiv 8 \pmod{32}$
- $\Delta_2(d_1) = -8 \Longleftrightarrow (\Delta_2(e_1), \Delta_2(e_2)) \in \left\{ \begin{matrix} (1,-8), (-8,1), \\ (-4,8), (8,-4) \end{matrix} \right\} \Longrightarrow d_1 \equiv 24 \pmod{32}$

n と m_2 の関係は, $\Delta_2(e_1)$ または $\Delta_2(e_2)$ が 1 なら $n = m_2$, そうでない場合 $\Delta_2(d_1) = -4$ のとき $n = m_2 + 2$, $\Delta_2(d_1) = \pm 8$ のとき $n = m_2 + 1$ 等となる. d_1 は判別式であるから

- $(\frac{d_1}{2}) = -1 \Longleftrightarrow d_1 \equiv 5 \pmod 8$　　• $(\frac{d_1}{2}) = 1 \Longleftrightarrow d_1 \equiv 1 \pmod 8$

以上に注意しつつ, [2, p. 263] にあるノルムが 2 冪の正規イデアルのリストを活用する.

6　Hecke-Meyer-Siegel-Zagier

$\zeta(1, \mathcal{O}_\Delta, \chi_{e_1,e_2})$ の簡約 2 次無理数をわたる和による表示を得るため, ヘッケ・マイヤー・ジーゲル・ザギエの結果を用いる (実 2 次体のクロネッカー極限公式). $\Delta > 0$ が基本判別式の場

合, 次の公式がジーゲルの本 [14, p. 133] にある. $\Delta > 0$ が (基本判別式とは限らない) 2 次判別式の場合も全く同様に証明できる. $\mathcal{C}_\Delta$ は判別式 Δ のイデアル類群, $\mathcal{C}_\Delta^+$ は狭義イデアル類群であった. $\mathcal{O}_\Delta$-可逆な分数イデアル $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ が同値なことを $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$ で表し, 同値類は $[\mathfrak{a}]$ と表す. 狭義同値は, $\mathfrak{a} \sim_+ \mathfrak{b}$, 狭義同値類は $[\mathfrak{a}]^+$ とする.

命題 (ジーゲル)**.** $\Delta > 0$ を 2 次判別式とする. χ は狭義の類指標で $\chi((\beta)) = \mathrm{sign}\mathcal{N}(\beta)$ を満たすとする. $\mathcal{O}_\Delta$ の基本単数 $\epsilon_\Delta > 1$ について $\mathcal{N}(\epsilon_\Delta) = 1$ を仮定する. そのとき

$$\zeta(1, \mathcal{O}_\Delta, \chi) = \frac{\pi^2}{\sqrt{\Delta}} \sum_{[\mathfrak{b}]^+ \in \mathcal{C}_\Delta^+} \overline{\chi}(\mathfrak{b}) G(\mathfrak{b}),$$

$$G(\mathfrak{b}) = \frac{\chi((\beta_2))}{2\pi i} \left[\mathrm{Log} \left(\sqrt{(z-\alpha)(z-\alpha')} \eta(z)^2 \right) \right]_{z_0}^{z_0^*}.$$

ここに $\eta(z)$ はデデキントのエータ関数, z_0 は上半平面の任意の点, 任意の $\mathcal{O}_\Delta$-可逆な分数イデアル $\mathfrak{b} = [\beta_1, \beta_2]$ の基底を $(\beta_1\beta_2' - \beta_1'\beta_2)/\mathcal{N}(\beta_2) > 0$ に取るとき, $M_\mathfrak{b} \in SL_2(\mathbf{Z})$, z_0^*, $\alpha \in \mathbf{R}$ は次で定義されている:

$$\epsilon_\Delta \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = M_\mathfrak{b} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \qquad M_\mathfrak{b} \in SL_2(\mathbf{Z}), \qquad z_0^* := M_\mathfrak{b}\langle z_0 \rangle, \qquad \alpha := \beta_1/\beta_2.$$

また, Log の枝は, ひとつ選んで固定している.

行列 $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbf{Z})$ で $c > 0, |a+d| > 2$ を満たすものに対し, 文献 [16] に従って,

$$I(M, s) := \int_{z_0}^{z_0^*} \frac{\partial}{\partial z} E(z, s) dz, \qquad z_0^* := M\langle z_0 \rangle$$

とおく. 命題の行列 $M_\mathfrak{b} = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbf{Z})$ は, 条件 $c > 0$, $|a+d| > 2$ を満たす. 命題は次の表示から従う:

$$\zeta(1, \mathcal{O}_\Delta, \chi) = \frac{i}{2\sqrt{\Delta}} \sum_{[\mathfrak{b}]^+ \in \mathcal{C}_\Delta^+} \overline{\chi}(\mathfrak{b}) \chi((\beta_2)) I(M_\mathfrak{b}, 1).$$

値 $I(M_\mathfrak{b}, 1)$ を詳しく計算するため, $\Im(z) > 0$ に対し

$$\delta(z) := 24\mathrm{Log}\eta(z) = 2\pi i z - 24 \sum_{n,m=1}^{\infty} e^{2\pi i n m z}/m$$

とし, 任意の $M \in SL_2(\mathbf{Z})$ に対し

$$2\pi i n_M := \delta(M\langle z \rangle) - \delta(z) - 12\mathrm{Log}(cz + d)$$

とおく. この Log は主値とする. この n_M は, z に依らない整数値を取る ($\mathrm{Log}\eta(z)$ の変換公式). 次が知られている.

補題 1 (マイヤー [16])**.** $I(M_\mathfrak{b}, 1) = \pi^2 n_{M_\mathfrak{b}}/(6i)$

補題 2 (ザギエ [16])**.** (1) $M \in SL_2(\mathbf{Z})$ が $M = \left(\begin{smallmatrix} b_1 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} b_2 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \cdots \left(\begin{smallmatrix} b_r & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ $(b_j \in \mathbf{Z})$ の形なら, $n_M = \sum_{i=1}^r (b_i - 3)$.
(2) 任意の $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbf{Z})$, $c \neq 0$ について, $n_{-M} = n_M + 6\,\mathrm{sign}(c)$.

7　系 1,2,3 の証明

いくつか必要な補題を述べておく．$e > 0$ が 2 次判別式のとき, $\epsilon_e > 1$ を $\mathcal{O}_e$ の基本単数とする．

補題 3. (1) もし $\mathcal{N}(\epsilon_e) = -1$ であれば, e は $p \equiv 3 \pmod 4$ なる素数で割れない．
(2) e_1, e_2 を異なる二つの負基本判別式とする．判別式 $\Delta = e_1 e_2 f_0^2$ について, $\mathcal{N}(\epsilon_\Delta) = 1$. 従って, 任意の $\alpha \in \mathcal{A}_\Delta^+$ に対し, 連分数展開の周期の長さは偶数.

Proof. (1) は [8, Theorem 5.2.2, p. 124] にある．(2) を示す．
<u>場合 1</u> Δ が素数 $p \equiv 3 \pmod 4$ で割れるとき．(1) により $\mathcal{N}(\epsilon_\Delta) = 1$ が言える．
<u>場合 2</u> Δ が素数 $p \equiv 3 \pmod 4$ で割れないとき．$e_i < 0$ かつ $p \equiv 1 \pmod 4$ は正の素判別式であるから, 各 e_i は負の素判別式 -4 または -8 で割り切れる．従って $4^2 \mid \Delta$. このとき, $\mathcal{O}_\Delta = [1, \sqrt{\Delta}/2]$ 故, ϵ_Δ は, ある整数 x, y により $\epsilon_\Delta = x + y\sqrt{\Delta}/2$ と表せる．従って $\mathcal{N}(\epsilon_\Delta) = x^2 - y^2\Delta/4 \equiv x^2 \equiv 0, 1 \pmod 4$. よって $\mathcal{N}(\epsilon_\Delta) = -1$ は不可能である． □

補題 3 の (2) は (証明は簡略化できたものの) 城戸 [7] にある．連分数展開の周期の長さの偶奇と基本単数のノルムの関係は [11, p. 126] 参照.

補題 4. 2 次判別式 e, $K := \mathbf{Q}(\sqrt{e})$ とし, $e = d_K f^2$ (d_K は K の判別式, f は自然数) と表しておく．$\mathcal{O}_{d_K}$ を K の整数環, χ_{d_K} を K のクロネッカー記号,

$$\nu := [\mathcal{O}_{d_K}^\times : \mathcal{O}_e^\times], \qquad \psi(f) := f \cdot \prod_{\text{prime } q \mid f} (1 - \chi_{d_K}(q) q^{-1})$$

とおき, $\varphi(f)$ でオイラー関数を表すことにする．このとき
(1) $\nu \mid \varphi(f)\psi(f)$,
(2) $h(d_K f^2) = h(d_K)\psi(f)/\nu$.

補題 4 の (1) は [15, 定理 5.26, p. 319, 問題 1, p. 310], (2) は [17, p. 77], [8, Excercise 8.1.5, p. 328] 参照.

補題 5 (高木 [15, p. 316])**.** 素数 $p \equiv 1 \pmod 4$ なら, $\mathcal{N}(\epsilon_p) = -1$.

系 1,2,3 を証明するため, 一般的事実を準備する．e_1, e_2 を異なる二つの負基本判別式とする．$\Delta = e_1 e_2 f_0^2$ が偶数か奇数かに従って $\sigma = 0$ または 1 とおき, 基数を $\omega_\Delta = (\sigma + \sqrt{\Delta})/2$ と定義した．その連分数展開は $\omega_\Delta = [a_0, \overline{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{2t}}] = [a_0, a_1, \cdots, \xi_j]$ の形で与えられる．補題 3 (2) により, 周期の長さは偶数である．各終項は $\xi_j = [\overline{a_j, a_{j+1}, a_{j+2}, \cdots, a_{2t-j}}] \in \mathcal{A}_\Delta^+$ で, [8, Theorem 2.3.5, p. 54] を用いた直接計算により

$$\begin{aligned} \xi_{2t} &= a_0 - \omega'_\Delta, & f_{\xi_{2t}} &= [1, 2a_0 - \sigma, a_0^2 - a_0\sigma + (\sigma^2 - \Delta)/4], \\ \xi_1 &= 1/(\omega_\Delta - a_0), & f_{\xi_1} &= [-\xi_{2t}\xi'_{2t}, 2a_0 - \sigma, -1] \qquad (\xi_{2t}\xi'_{2t} < 0). \end{aligned}$$

χ_{e_1,e_2} の定義から, $\chi_{e_1,e_2}(\xi_{2t}) = \chi_{e_1}(1) = 1$, $\chi_{e_1,e_2}(\xi_1) = \chi_{e_1}(-1) = -1$ ($e_1 < 0$ である). 2 次形式 $f_{\xi_{2j}}$ は基本形式 $f_{1,\omega_\Delta} = g_\Delta := [1, \sigma, (\sigma - \Delta)/4]$ と $SL_2(\mathbf{Z})$ 同値, $f_{\xi_{2j-1}}$ は g_Δ と $GL_2(\mathbf{Z})$ 同値であるが $SL_2(\mathbf{Z})$ 同値ではない. 第 10 章の記号を用いて 2 次無理数の用語で言えば, $\xi_j \in \mathcal{A}_\Delta^+$, $[\xi_1]_\sim = [\xi_j]_\sim$ $(\forall j)$, 偶数 j につき $[\xi_2]_{\sim_+} = [\xi_j]_{\sim_+}$, $\chi_{e_1,e_2}(\xi_j) = 1$, 奇数 j につき $[\xi_2]_{\sim_+} \neq [\xi_j]_{\sim_+}$, $[\xi_1]_{\sim_+} = [\xi_j]_{\sim_+}$, $\chi_{e_1,e_2}(\xi_j) = -1$ が分かる．[11, 定理 3.6, p. 115] も参照.

系 1 を証明するため, 定理 2 で $e_1 = -3$, $e_2 = -3p$, $f_0 = 1$ 従って $\Delta = 9p$ とおく. $K = \mathbf{Q}(\sqrt{9p})$ の判別式は $d_K = p$ なので, $\Delta = 9p$ の導手は $f = 3$, 補題 4 にいう $\varphi(3) = \psi(3) = 2$ である. 今, $\nu_p = [\mathcal{O}_p^\times : \mathcal{O}_{9p}^\times]$ とおく. 補題 4 と仮定 $h(p) = 1$ により, $\nu_p \mid 4$ かつ $h(9p) = 2/\nu_p \in \mathbf{N}$. 一方, 補題 3 (2) と補題 5 から, $\nu_p > 1$, $\nu_p = 2$ が出て, $h(9p) = 1$ が結論される. これにより全ての $\mathcal{A}_{9p}^+$ が同値になり, 特に ω_{9p} と $GL_2(\mathbf{Z})$ 同値なこと, 及び $\mathcal{A}_{9p}^+ = \{\xi_j \,;\, j = 1, 2, \cdots, 2t\}$ が分かる ([11, 定理 3.6, p. 115]). 故に,

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{A}_{9p}^+} \chi_{-3,-3p}(\alpha) \lfloor \alpha \rfloor = \sum_{j=1}^{2t} \chi_{-3,-3p}(\xi_j) \lfloor \xi_j \rfloor = \sum_{j=1}^{2t} (-1)^j a_j.$$

値 $h(-3) = 1$, $W(-3) = 6$, $W(-3p) = 2$ と定理 2 の等式から系 1 が導かれる. 系 2 も同様で $e_1 = -3, e_2 = -3p, f_0 = 2$ とおけばよい.

系 3 を証明するため, 定理 2 で $e_1 = -4$, $e_2 = -4p$, $f_0 = 1$ 従って $\Delta = 16p$ とおく. $K = \mathbf{Q}(\sqrt{16p}) = \mathbf{Q}(\sqrt{4p})$ の判別式は $d_K = p$ である. また, $\nu_p' = [\mathcal{O}_p^\times : \mathcal{O}_{16p}^\times]$, $\nu_p = [\mathcal{O}_p^\times : \mathcal{O}_{4p}^\times]$. とおく. 補題 4 により, $h(4p) = h(p)(2 - \chi_p(2))/\nu_p$ かつ $\nu_p \mid (2 - \chi_p(2))$, 特に $h(p) \mid h(4p)$. 今, $h(4p) = 1$ を仮定しているので $h(p) = 1$ となる. 従って, $p \equiv 1 \pmod 8$ なら $\nu_p = 1$, $p \equiv 5 \pmod 8$ なら $\nu_p = 3$ であることが分かる. 一方, 補題 4 から $h(16p) = 2(2 - \chi_p(2))/\nu_p'$ かつ $\nu_p' \mid 4(2 - \chi_p(2))$. 補題 3 (2) と補題 5 から $\nu_p' > 1$ は偶数. $\mathcal{O}_{16p}^\times \subset \mathcal{O}_{4p}^\times \subset \mathcal{O}_p^\times$ を踏まえると $\nu_p \mid \nu_p'$. これらを用いて $h(16p) = 1$ が以下のように示される.
場合 1 $p \equiv 1 \pmod 8$ のとき, $h(16p) = 2/\nu_p' \in \mathbf{N}$ なので, 偶数 $\nu_p' > 1$ は 2 である.
場合 2 $p \equiv 5 \pmod 8$ のとき, ν_p' は $\nu_p = 3$ で割り切れ, $\nu_p' \mid 12$ なので $\nu_p' \in \{3, 6, 12\}$, しかも ν_p' は偶数で $h(16p) = 6/\nu_p' \in \mathbf{N}$ 故, $\nu_p' = 6$ となり $h(16p) = 1$.

あとは系 1 の証明と同様に進む. 値 $h(-4) = 1$, $W(-4) = 4$, $W(-4p) = 2$ に注意する.

例 3 であるが, 連分数展開 $(1 + \sqrt{53})/2 = [4, \overline{7}]$ により, $[\overline{7}] = (7 + \sqrt{53})/2 \in \mathcal{A}_{53}^+$ と $\epsilon_{53} = (7 + \sqrt{53})/2$ が分かる. ϵ_{53}^j $(1 \leq j \leq 12)$ を計算することで (あるいは同様に $\epsilon_{4\cdot 53} = 182 + 25\sqrt{53}$ を求めることで) $\nu_{53} = 3$ が言え, 補題 4 (2) と $h(53) = 1$ から $h(4 \cdot 53) = 1$ が分かる. 従って系 3 の仮定は満たされており, 例 3 を得る.

8 定理 2 の証明

定理 2 の設定で話を進める. 特に $\Delta = e_1 e_2 f_0^2$ である. 次により命題 (ジーゲル) を適用できる.

補題 6. χ_{e_1,e_2} は狭義の類指標で, $\chi_{e_1,e_2}((\alpha)) = \operatorname{sign} \mathcal{N}(\alpha)$ を満たす.

Proof. 狭義の類指標であることは [8] 6.5 章を参照. $\mathcal{N}(\alpha) > 0$ なる $\alpha \in \mathbf{Q}(\sqrt{\Delta})$ に対し, 単項イデアル (α) に対応する原始的 2 次形式は $g_\Delta = [1, \sigma, (\sigma - \Delta)/4]$. 従って $\chi_{e_1,e_2}((\alpha)) = 1$. 一方, $\mathcal{N}(\alpha) < 0$ なる $\alpha \in \mathbf{Q}(\sqrt{\Delta})$ に対しては, (α) に対応する原始的 2 次形式は $[(\Delta - \sigma)/4, -\sigma, -1]$. 今, $e_1 < 0$ だから $\chi_{e_1,e_2}((\alpha)) = \chi_{e_1}(-1) = -1$. □

一般に, 簡約 2 次無理数 $\xi = (b + \sqrt{\Delta})/(2a) \in \mathcal{A}_\Delta^+$ に対し, 格子 $I(\xi) = [a\xi, a]$ は $\mathcal{O}_\Delta$-正規イデアルである. 基底 $\beta_1 = a\xi$, $\beta_2 = a$ は $\beta_2 > 0$, $(\beta_1 \beta_2' - \beta_1' \beta_2)/\mathcal{N}(\beta_2) = \xi - \xi' > 0$ を満たしている. 同値類 $[\mathfrak{b}] \in \mathcal{C}_\Delta$ の代表を, ある $\xi \in \mathcal{A}_\Delta^+$ を用いて $\mathfrak{b} = I(\xi)$ の形に選べる. ξ の連分数展開を $\xi = [\overline{u_0, u_1, u_2, \cdots, u_{2n-1}}] = [u_0, u_1, \cdots, \xi_j]$ $(\xi_0 := \xi)$ とする. 任意の j について $\xi_j \in \mathcal{A}_\Delta^+$ である. 第 10 章の記号を用いて言えば, $\xi_j \in \mathcal{A}_\Delta^+$, $[\xi]_\sim = [\xi_j]_\sim$ $(\forall j)$, 偶数 j に

つき $[\xi]_{\sim_+} = [\xi_j]_{\sim_+}$, 奇数 j につき $[\xi]_{\sim_+} \neq [\xi_j]_{\sim_+}$, $[\xi_1]_{\sim_+} = [\xi_j]_{\sim_+}$ である ([11, 定理 3.6, p. 115] 参照). [8, Theorem 2.2.9, p. 44] により, この基底 $\beta_1 = a\xi$, $\beta_2 = a$ に付随する命題 (ジーゲル) の行列 $M_{\mathfrak{b}}$ は $M_{\mathfrak{b}} = \left(\begin{smallmatrix} u_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} u_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\cdots\left(\begin{smallmatrix} u_{2n-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ と表せる. $J = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ とおき, 恒等式 $\left(\begin{smallmatrix} u & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) J = -\left(\begin{smallmatrix} u & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $J\left(\begin{smallmatrix} u & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -u & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $J^2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ に注意すると

$$M_{\mathfrak{b}} = (-1)^n \left(\begin{smallmatrix} \widetilde{u_0} & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} \widetilde{u_1} & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\cdots\left(\begin{smallmatrix} \widetilde{u_{2n-1}} & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \qquad \widetilde{u_j} := (-1)^j u_j.$$

補題 2 (ザギエの公式) を援用して,

$$n_{M_{\mathfrak{b}}} = \sum_{j=0}^{2n-1} (\widetilde{u_j} - 3) + \frac{(-1)^n - 1}{2} 6.$$

以上は $\mathcal{O}_\Delta$-正規イデアル $\mathfrak{b} = I(\xi_0)$ に対して $n_{M_{\mathfrak{b}}}$ を求めた. 同じことを $\mathcal{O}_\Delta$-正規イデアル $\overline{\mathfrak{b}} := I(\xi_1)$ に行い $n_{M_{\overline{\mathfrak{b}}}}$ を求める ($\overline{\mathfrak{b}}$ は共役イデアル $\mathfrak{b}'$ を意味しない). $\mathcal{N}(\epsilon_\Delta) = 1$ であることから, $[\overline{\mathfrak{b}}] = [\mathfrak{b}]$, $[\overline{\mathfrak{b}}]^+ \neq [\mathfrak{b}]^+$ である. さっきの論法を $\xi_1 = [\overline{u_1, u_2, u_3, \cdots, u_{2n-1}, u_0}]$ に適用することで, 次を得る:

$$n_{M_{\overline{\mathfrak{b}}}} = \sum_{j=0}^{2n-1} (-\widetilde{u_j} - 3) + \frac{(-1)^n - 1}{2} 6.$$

関係式 $\chi_{e_1,e_2}(I(\xi_j)) = (-1)^j \chi_{e_1,e_2}(I(\xi_0))$ を考慮すると,

$$\begin{aligned}
\chi_{e_1,e_2}(\mathfrak{b}) n_{M_{\mathfrak{b}}} + \chi_{e_1,e_2}(\overline{\mathfrak{b}}) n_{M_{\overline{\mathfrak{b}}}} &= \chi_{e_1,e_2}(I(\xi_0)) n_{M_{\mathfrak{b}}} + \chi_{e_1,e_2}(I(\xi_1)) n_{M_{\overline{\mathfrak{b}}}} \\
&= \sum_{j=0}^{2n-1} \chi_{e_1,e_2}(I(\xi_0))(\widetilde{u_j} - 3) + \sum_{j=0}^{2n-1} \chi_{e_1,e_2}(I(\xi_1))(-\widetilde{u_j} - 3) \\
&= 2\sum_{j=0}^{2n-1} \chi_{e_1,e_2}(I(\xi_j)) u_j = 2\sum_{j=0}^{2n-1} \chi_{e_1,e_2}(\xi_j) \lfloor \xi_j \rfloor.
\end{aligned}$$

この等式を $\mathcal{C}_\Delta^+ = \bigcup_{[\mathfrak{b}] \in \mathcal{C}_\Delta} \{[\mathfrak{b}]^+, [\overline{\mathfrak{b}}]^+\}$ にわたって加えれば,

$$\zeta(1, \mathcal{O}_\Delta, \chi) = \frac{i}{2\sqrt{\Delta}} \sum_{[\mathfrak{b}]^+ \in \mathcal{C}_\Delta^+} \chi_{e_1,e_2}(\mathfrak{b}) \chi_{e_1,e_2}((\beta_2)) I(M_{\mathfrak{b}}, 1) = \frac{i}{2\sqrt{\Delta}} \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_\Delta^+} \frac{\pi^2}{6i} 2\chi_{e_1,e_2}(\alpha) \lfloor \alpha \rfloor.$$

これと, 明示式 (定理 1) 及びディリクレの類数公式により得られる $\zeta(1, \mathcal{O}_\Delta, \chi)$ の表示を等値すると定理 2 を得る.

9　オイラー因子のリーマン予想の類似

金子先生のもうひとつの論文 [10] を参考に, L 関数に現れたオイラー因子がリーマン予想の類似を満たすことを確認する. ここでオイラー因子とは次を指す ($u := p^{-s}$):

$$P_m(u) := \frac{(1 - \chi_{e_1}(p)u)(1 - \chi_{e_2}(p)u) - p^{m-1}u^{2m}(pu - \chi_{e_1}(p))(pu - \chi_{e_2}(p))}{1 - pu^2}.$$

$s = 1/2 + it/\log p$ とおくと $u = p^{-s} = e^{-it}/\sqrt{p}$ であり, $P_m(u)$ は

$$\begin{aligned}
&\frac{1 - e^{-2(m+1)it} - (\chi_{e_1}(p) + \chi_{e_2}(p))p^{-1/2}e^{-it}(1 - e^{-2mit}) + \chi_{e_1}(p)\chi_{e_2}(p)p^{-1}e^{-2it}(1 - e^{-2(m-1)it})}{1 - e^{-2it}} \\
&\qquad = \frac{e^{-imt}}{p}\left(p\frac{\sin(m+1)t}{\sin t} - \sqrt{p}(\chi_{e_1}(p) + \chi_{e_2}(p))\frac{\sin mt}{\sin t} + \chi_{e_1}(p)\chi_{e_2}(p)\frac{\sin(m-1)t}{\sin t}\right).
\end{aligned}$$

$x := \cos t$ と変数変換し, $Q_m(x) := pe^{imt}P_m(u)$ と定義する. 例えば

$$Q_0(x) = p - \chi_{e_1}(p)\chi_{e_2}(p), \qquad Q_1(x) = 2px - \sqrt{p}(\chi_{e_1}(p) + \chi_{e_2}(p)).$$

第 2 種チェビシェフ多項式 $U_m(x)$ を用いて, $Q_m(x)$ は次のように表せる:

$$Q_m(x) = pU_m(x) - \sqrt{p}(\chi_{e_1}(p) + \chi_{e_2}(p))U_{m-1}(x) + \chi_{e_1}(p)\chi_{e_2}(p)U_{m-2}(x).$$

多項式 $U_m(x)$ $(m = 0, 1, 2, \cdots)$ の次数は m である. 例えば,

$$U_0(x) = 1, \qquad U_1(x) = 2x, \qquad U_2(x) = 4x^2 - 1, \qquad U_3(x) = 8x^3 - 4x.$$

$U_{-1}(x) = 0$, $U_{-2}(x) = -1$ も便宜上思い出しておく.

オイラー因子 $P_m(u)$ に対するリーマン予想の類似を確認するには, $Q_m(x)$ の全ての根が区間 $(-1, 1)$ にあることを見れば十分である (実際, これは $t \in \mathbf{R}$ を導く). 良く知られた漸化式 $U_m(x) = 2xU_{m-1}(x) - U_{m-2}(x)$ を用いると, $Q_m(x)$ の漸化式

$$Q_m(x) = 2xQ_{m-1}(x) - Q_{m-2}(x) \qquad (m = 2, 3, 4, \cdots) \tag{1}$$

を得る. $Q_m(x)$ は実係数 m 次かつ最高次の係数が正なので, まず $Q_m(x)$ が異なる m 個の実根を持つことが分かる. 実際, $Q_0(x)$, $Q_1(x)$ については明らかで, 漸化式 (1) に $Q_{m-1}(x)$ の零点を代入することでグラフの概形が帰納的に読み取れ, 全ての $Q_m(x)$ でも正しいことが分かる.

もう一度, 漸化式 (1), $Q_m(x)$ は実係数 m 次かつ最高次の係数が正なこと, 及びこれらから分かるグラフの概形を用いると, $Q_n(x), Q_{n-1}(x), \cdots, Q_0(x)$ が $[-1, 1]$ においてスツルム列を成すことが帰納法で確認できる. 点 $x = \pm 1$ における符号変化の回数 $N(-1) = n$, $N(1) = 0$ は, 次から求められる:

$$Q_n(1) = (p - \chi_{e_1}(p)\chi_{e_2}(p)) + n(\sqrt{p} - \chi_{e_1}(p))(\sqrt{p} - \chi_{e_2}(p)) > 0,$$
$$(-1)^n Q_n(-1) = (p - \chi_{e_1}(p)\chi_{e_2}(p)) + n(\sqrt{p} + \chi_{e_1}(p))(\sqrt{p} + \chi_{e_2}(p)) > 0.$$

スツルムの定理により $Q_m(x)$ は $N(-1) - N(1) = m - 0 = m$ 個の根を区間 $(-1, 1)$ にもつことが結論される.

スツルム列. $f(x) = f_0(x), f_1(x), \cdots, f_l(x) \in \mathbf{R}[x]$ が区間 $[a, b]$ で次の 4 条件を満たすとき, 区間 $[a, b]$ においてスツルム列を成すという.
(1) 任意の $x_0 \in [a, b]$, $k = 0, 1, \cdots, l-1$ に対し, 値 $f_k(x_0)$ と $f_{k+1}(x_0)$ は同時に零にならない.
(2) ある $x_0 \in [a, b]$, $k = 1, \cdots, l-1$ に対し $f_k(x_0) = 0$ とすると, $f_{k-1}(x_0)f_{k+1}(x_0) < 0$.
(3) $f_l(x) > 0$ $(\forall x \in [a, b])$, または $f_l(x) < 0$ $(\forall x \in [a, b])$.
(4) ある $x_0 \in [a, b]$ で $f(x_0) = 0$ とすると, $f'(x_0)f_1(x_0) > 0$.

スツルムの定理. $f(x) = f_0(x), f_1(x), \cdots, f_l(x) \in \mathbf{R}[x]$ が区間 $[a, b]$ においてスツルム列を成すとする. 簡単のため $f(x) = f_0(x)$ は重根を持たないとし, $f(a)f(b) \neq 0$ と仮定する. $c \in \mathbf{R}$ に対し $N(c)$ は数列 $f_0(c), f_1(c), \cdots, f_l(c) \in \mathbf{R}$ を左から右に見ていったときの符号変化の回数とする (0 は削除して数える). このとき $f(x)$ の区間 $[a, b]$ 内の根は $N(a) - N(b)$ 個.

10　用語と対応の纏め ([8] から抜粋)

Δ を 2 次判別式とする．$\mathfrak{a}$ が分数 $\mathcal{O}_\Delta$-イデアルとは, 格子 $\mathfrak{a} \subset \mathbf{Q}(\sqrt{\Delta})$ で $\mathcal{O}_\Delta \mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}$ を満たすものを指す．分数 $\mathcal{O}_\Delta$-イデアル $\mathfrak{a}$ が $\mathcal{O}_\Delta$-可逆とは, $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 = \mathcal{O}_\Delta$ となる分数 $\mathcal{O}_\Delta$-イデアル $\mathfrak{a}_1$ が存在することを言う．2 つの分数 $\mathcal{O}_\Delta$-イデアル $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ が同値 ($\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$) であるとは, $\mathfrak{a} = \lambda\mathfrak{b}$ となる $\lambda \in \mathbf{Q}(\sqrt{\Delta})^\times$ が存在することである．$\mathfrak{a}$ の同値類を $[\mathfrak{a}]$ で表し, $\mathcal{O}_\Delta$-可逆な分数 $\mathcal{O}_\Delta$-イデアルの同値類全体を $\mathcal{C}_\Delta$ とする (イデアル類群). 2 つの分数 $\mathcal{O}_\Delta$-イデアル $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ が狭義同値 ($\mathfrak{a} \sim_+ \mathfrak{b}$) であるとは, $\mathfrak{a} = \lambda\mathfrak{b}$ となる $\lambda \in \mathbf{Q}(\sqrt{\Delta})^\times$, $\mathcal{N}(\lambda) > 0$ が存在することである．$\mathfrak{a}$ の狭義同値類を $[\mathfrak{a}]^+$ で表し, $\mathcal{O}_\Delta$-可逆な分数 $\mathcal{O}_\Delta$-イデアルの狭義同値類全体を $\mathcal{C}_\Delta^+$ とする (狭義イデアル類群). 判別式 Δ の 2 次無理数全体を

$$\mathcal{A}_\Delta := \{\xi = (b+\sqrt{\Delta})/(2a)\,;\, a,b,c \in \mathbf{Z}, a \neq 0, (a,b,c) = 1, b^2-4ac = \Delta\},$$

一次分数変換を $M\langle z\rangle := \dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$, $M = \left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)$ で表す．2 つの数 $z_1, z_2 \in \mathcal{A}_\Delta$ が同値 ($z_1 \sim z_2$) であるとは, $z_1 = A\langle z_2\rangle$ となる $A \in GL_2(\mathbf{Z})$ が存在することである．ξ の同値類を $[\xi]_\sim$ で表し, 同値類全体を $\mathfrak{X}_\Delta$ とする．2 つの数 z_1, $z_2 \in \mathcal{A}_\Delta$ が狭義同値 ($z_1 \sim_+ z_2$) であるとは, $z_1 = A\langle z_2\rangle$ となる $A \in SL_2(\mathbf{Z})$ が存在することである．ξ の同値類を $[\xi]_{\sim_+}$ で表し, 同値類全体を $\mathfrak{X}_\Delta^+$ とする．Halter-Koch に従って

$$h(\Delta) := |\mathfrak{X}_\Delta|, \qquad h^+(\Delta) := \begin{cases} |\mathfrak{X}_\Delta| & \text{if } \Delta < 0, \\ |\mathfrak{X}_\Delta^+| & \text{if } \Delta > 0, \end{cases}$$

と定義する ([8, p. 20]).

判別式 Δ の負定値でない原始的 2 元 2 次形式の $SL_2(\mathbf{Z})$ 同値類の全体を $\mathfrak{F}_\Delta$ と表す．$ax^2+bxy+cy^2$ を $[a,b,c]$ と略記し, $f = [a,b,c]$ の同値類は $[\![f]\!] = [\![a,b,c]\!]$ で表す．$f = [a,b,c]$ に対し, $\xi_f := (b+\sqrt{\Delta})/(2a)$ とおく．ξ_f は $f(X,-1) = 0$ のひとつの解である．

事実 1. $\Delta > 0$ に対し, $\vartheta_\Delta([\![f]\!]) := [\xi_f]_{\sim_+}$ で定まる写像 $\vartheta_\Delta : \mathfrak{F}_\Delta \to \mathfrak{X}_\Delta^+$ は全単射．また $\Delta < 0$ に対し, $\vartheta_\Delta([\![f]\!]) := [\xi_f]_\sim$ で定まる写像 $\vartheta_\Delta : \mathfrak{F}_\Delta \to \mathfrak{X}_\Delta$ は全単射．従って,

$$h^+(\Delta) := \begin{cases} |\mathfrak{X}_\Delta| & \text{if } \Delta < 0 \\ |\mathfrak{X}_\Delta^+| & \text{if } \Delta > 0 \end{cases} = |\mathfrak{F}_\Delta|$$

([8, p. 197]).

判別式 Δ の 2 次無理数 $\xi = (b+\sqrt{\Delta})/(2a) \in \mathcal{A}_\Delta$ は, $a \neq 0, b, c \in \mathbf{Z}$, $(a,b,c) = 1$, $b^2-4ac = \Delta$ のとき型 (a,b,c) と呼ばれる．格子 $I(\xi) := [a, a\xi]$ は $\mathcal{O}_\Delta$-正規イデアル (即ち, 整イデアルであって可逆かつ原始的) になり, $\mathfrak{N}_\Delta(I(\xi)) = |a|$.

事実 2. 任意の 2 次判別式 Δ に対し, $\iota_\Delta([\xi]_\sim) := [I(\xi)]$ で定まる写像 $\iota_\Delta : \mathfrak{X}_\Delta \to \mathcal{C}_\Delta$ は全単射．また $\Delta > 0$ に対し, $\iota_\Delta([\xi]_{\sim_+}) := [I(\xi)]^+$ で定まる写像 $\iota_\Delta : \mathfrak{X}_\Delta^+ \to \mathcal{C}_\Delta^+$ は全単射．ここで ξ は 型 (a,b,c) で, $a > 0$ に選んでおく．従って,

$$h(\Delta) := |\mathfrak{X}_\Delta| = |\mathcal{C}_\Delta|, \qquad h^+(\Delta) = \begin{cases} |\mathcal{C}_\Delta| & \text{if } \Delta < 0 \\ |\mathcal{C}_\Delta^+| & \text{if } \Delta > 0 \end{cases} = |\mathcal{C}_\Delta^+|$$

([8, p. 146]).

事実 3. 任意の 2 次判別式 Δ に対し, $\Phi_\Delta([\![f]\!]) := \left[I(\xi_f)\sqrt{\Delta}^{(1-\mathrm{sign}(a))/2}\right]^+$ で定まる写像 $\Phi_\Delta : \mathfrak{F}_\Delta \to \mathcal{C}_\Delta^+$ は全単射．従って, $h^+(\Delta) = |\mathfrak{F}_\Delta| = |\mathcal{C}_\Delta^+|$ ([8, p. 214]).

参考文献

[1] W. Bosma and P. Stevenhagen, On the computation of quadratic 2-class groups, J. Theor. Nombres Bordeaux **8** (1996), no. 2, 283–313.

[2] H. Butts and G. Pall, Ideals not prime to the conductor in quadratic orders, Acta Arith. **21** (1972), 261–270.

[3] G. Chinta and O. Offen, Orthogonal period of a $GL_3(\mathbf{Z})$ Eisenstein series, In: Representation theory, complex analysis, and integral geometry, 41–59, Birkhauser/Springer, New York, 2012.

[4] F. Hirzebruch, Hilbert modular surfaces, Enseignement Math. (2) **19** (1973), 183–281.

[5] J. Huard, P. Kaplan and K. Williams, The Chowla-Selberg formula for genera, Acta Arith. **73** (1995), no. 3, 271–301.

[6] T. Ibukiyama, The genus theory of Gauss and applications to L functions of orders, preprint

[7] 城戸義旗, Hirzebruch の定理の拡張について, 大阪大学修士論文, 平成 15 年.

[8] F. Halter-Koch, Quadratic irrationals, An introduction to classical number theory, Pure and Applied Mathematics (Boca Raton). CRC Press, Boca Raton, FL, 2013.

[9] M. Kaneko, A generalization of the Chowla-Selberg formula and the zeta functions of quadratic orders, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **66** (1990), no. 7, 201–203.

[10] M. Kaneko, On the local factor of the zeta function of quadratic orders, In: Zeta functions, topology and quantum physics, 75–79, Dev. Math., 14, Springer, New York, 2005.

[11] 河田敬義, 数論ー古典数論から類体論へ, 岩波書店, 1992 年.

[12] H. Lu, Hirzebruch sum and class number of the quadratic fields, Chinese Sci. Bull. **36** (1991), no. 14, 1145–1147.

[13] H. Muzaffar and K. Williams, A restricted Epstein zeta function and the evaluation of some definite integrals, Acta Arith. **104** (2002), no. 1, 23–66.

[14] C. Siegel, Advanced analytic number theory. Second edition, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1980.

[15] 高木貞治, 初等整数論講義 第 2 版, 共立出版, 1971 年.

[16] D. Zagier, Nombres de classes et fractions continues, In: Journées Arithmétiques de Bordeaux (Conf., Univ. Bordeaux, Bordeaux, 1974), pp. 81–97, Asterisque, No. 24-25, Soc. Math. France, Paris, 1975.

[17] D.B. ザギヤー, 数論入門ーゼータ関数と 2 次体, 岩波書店, 1990 年.