次数3の分岐Siegel級数の計算について

軍司 圭一 (千葉工業大学)

1 Siegel Eisenstein 級数

以下の記号を用意する．$\Gamma^g = Sp(g, \mathbb{Z})$ を階数が g (行列サイズが $2g$) のシンプレクティック群とし, その部分群として

$$\Gamma_0^g(l) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma^g \,\middle|\, C \equiv 0 \bmod l \right\}, \quad \Gamma_\infty^g = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in \Gamma^g \right\}$$

をとる．ψ を l を法とする Dirichlet 指標とし, $l = p$ が奇素数のとき, χ_0 を p を法とする自明指標, χ_p を 2 次指標とする．$k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を $\psi(-1) = (-1)^k$ なるものとしたとき, 次数 g, 重さ k, レベル l の指標付 Siegel-Eisenstein 級数を

$$E_{k,l,\psi}^g(Z) := \sum_{\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_\infty^g \backslash \Gamma_0^g(l)} \psi(\det D) \det(CZ + D)^{-k}$$

で定める．ここで Z は Siegel 上半空間 $\mathbb{H}_g := \{Z \in \mathrm{Sym}^g(\mathbb{C}) \mid \mathrm{Im}(Z) > 0\}$ の元である．右辺の級数は $k > g + 1$ で絶対収束し, $E_{k,l,\psi}^g \in M_k(\Gamma_0^g(l), \overline{\psi})$ が成り立つ．Siegel-Eisenstein 級数は, もっとも重要な Siegel 保型形式の 1 つである。

目標. $E_{k,l,\psi}^g$ の Fourier 展開の明示式を求めたい.

この素朴な目標に対しての解答はなかなか難しく, $l = 1$ すなわち full modular の場合であっても, 一般の次数 g に対して解決されたのは比較的最近である (1999 年, Katsurada [Ka])．レベル付の場合の知られている結果としては次が挙げられる.

- Mizuno ([Mi, 2009]) $g = 2$, l: square-free odd, ψ: primitive
- G. ([Gu, 2015]) $g = 2$, $l = p$: odd prime, ψ: primitive
- Takemori ([Ta1, 2012]) $g = 2$, l: any integer, ψ: primitive
- Takemori ([Ta2, 2015]) g: arbitrarly, l: odd, $\psi = \prod_{p \mid l} \psi_p$ is primitive, $\psi_p \neq \chi_p$.

Mizuno は, 次数 2 の Siegel Eisenstein 級数を Jacobi form の Eisenstein 級数の Maass lift と見なして計算した．次数が 2 のときに, 奇素数 p の分岐する Siegel 級数を計算したのが筆者であり, 同じ手法で Takemori は任意のレベル l で計算を完成させた．のみならず [Ta1] では, 計算結果を非常にきれいな形にまとめており, 手法こそ異なるものの, それが一般の次数 g での結果 ([Ta2]) につながったとみられる.

以上は ψ が原始的指標のときの結果であるが, $\psi = \chi_0$ の場合の結果として, [Di] が挙げられる．[Di] では次数が 2 で l が square-free, odd のとき, すべての cusp に対応する Eisenstein 級

数の Fourier 係数が計算されている．方法としては, full modular の Eisenstien 級数 $E^2_{k,1,\chi_0}$ に Heck 作用素 $U(p)$ を作用させ, レベルが p の Eisenstein 級数を構成するというものであるが, この方法の欠点としてレベルが p^n の形のときには使えないということが挙げられる．

この報告集では, 次数が 3, レベルが奇素数 p, ψ が原始指標のときの計算を紹介する．上記の [Ta2] では一般の次数で計算がなされているが, その手法は $\psi = \chi_p$ には適用できないため, $\psi = \chi_p$ も含む形で計算を遂行したのが本結果である．

2 分岐 Siegel 級数

次数 g, レベル l, 重さが k の指標付 Siegel-Eisenstein 級数 $E^g_{k,l,\psi}(Z)$ の Fourier 展開を

$$E^g_{k,l,\psi}(Z) = \sum_{\mathrm{Sym}^g(\mathbb{Z})^* \ni N \geq 0} C(N)\mathbf{e}(NZ)$$

と表す．ここで $\mathrm{Sym}^g(\mathbb{Z})^*$ は次数が g の半整数対称行列全体の集合であり, 正方行列 M に対して $\mathbf{e}(M) = \exp(2\pi i\,\mathrm{Tr}(M))$ とおく．半正定値 N に対して, $\mathrm{rank}\,N < g$ であれば, Fourier 係数 $C(N)$ は次数が $\mathrm{rank}\,N$ の Siegel-Eisenstein 級数の Fourier 係数に帰着されるため, $N > 0$ の場合だけ考えればよい．

命題 2.1. $N > 0$ に対して, $E^g_{k,l,\psi}(Z)$ の T における Fourier 係数 $C(T)$ は

$$C(T) = \widetilde{\xi}(N,k)S_g(\psi,N,k)$$

と表される．ここで

$$\widetilde{\xi}(N,k) = \frac{2^{-g(g-1)/2}(-2\pi i)^{gk}}{\Gamma_g(k)}(\det N)^{k-(g+1)/2}$$

であり, $S_g(\psi,N,k)$ は後述する指標付 Siegel 級数である．ただし,

$$\Gamma_g(s) = \pi^{g(g-1)/4}\prod_{i=0}^{g-1}\Gamma(s-i/2)$$

とおいた．

Siegel 級数を定義するため, 記号をいくつか準備する．まず,

$$\mathcal{M}_g = \{(C,D) \in M_g(\mathbb{Z})^{\oplus 2} \mid C,\, D \text{ は symmetric co-prime}\}$$

とおく．ここで symmetric とは $C\,{}^tD = D\,{}^tC$ が成り立つことであり, co-prime とは, ある $X, Y \in M_g(\mathbb{Z})$ に対して $CX + DY = 1_g$ となることである．

$$\mathcal{M}^g_g = \{(C,D) \in \mathcal{M}_g \mid \det C \neq 0\}$$

とおくと,

$$GL_g(\mathbb{Z})\backslash\mathcal{M}^g_g \to \mathrm{Sym}^g(\mathbb{Q}), \quad (C,D) \mapsto C^{-1}D$$

は全単射である．考えている Eisenstein 級数のレベル l に対して

$$\mathrm{Sym}^g(\mathbb{Q})' := \{C^{-1}D \in \mathrm{Sym}^g(\mathbb{Q}) \mid (C,D) \in \mathcal{M}^g_g,\ C \equiv 0 \bmod l\}$$

とする. 次に各素数 p に対して, $\mathrm{Sym}^g(\mathbb{Q})_p = \bigcup_{n\geq 0} \dfrac{1}{p^n} \mathrm{Sym}^g(\mathbb{Z})$ とおき, $p \mid l$ なる素数 p に対しては

$$\mathrm{Sym}^g(\mathbb{Q})'_p = \mathrm{Sym}^g(\mathbb{Q})' \cap \mathrm{Sym}^g(\mathbb{Q})_p$$

と定める. $T = C^{-1}D \in \mathrm{Sym}^g(\mathbb{Q})$ に対して, $\delta(T) = |\det C|$, $\mu(T) = \det(T)\delta(T)$ と定める.

定義. ψ を l を法とする Dirichlet 指標とする. 複素数 s と $N \in \mathrm{Sym}^g(\mathbb{Q})$ に対して,

$$S_g(\psi, N, s) := \sum_{T \in \mathrm{Sym}^g(\mathbb{Q})' \bmod 1} \psi(\nu(T))\delta(T)^{-s}\mathbf{e}(TN)$$

とおき, これを指標付の Siegel 級数と呼ぶ.

指標付の Siegel 級数が Euler 積表示を持つことは次のように示される. まず $T \in \mathrm{Sym}^g(\mathbb{Q})'$ に対し, $\delta(T) = \prod_{p_i \mid l} p_i^{e_i} \prod_{q_i \nmid l} q_i^{f_i}$ と表したとき, $T = \sum T_{p_i} + \sum T_{q_i}$ ($T_{p_i} \in \mathrm{Sym}^g(\mathbb{Q})'_{p_i}$, $T_{q_i} \in \mathrm{Sym}^g(\mathbb{Q})_{q_i}$) という分解がある. このとき

$$\delta(T) = \prod_{p_i} \delta(T_{p_i}) \prod_{q_i} \delta(T_{q_i}), \quad \nu(T) \equiv \prod_{p_i \mid l} \nu(T_{p_i}) \prod_{q_i \nmid l} \delta(T_{q_i}) \bmod l$$

が成り立つ. $\nu(T)$ に関しては, l を割らない素数の寄与は $\delta(T_{q_i})$ の形で表れていることに注意. このことから

$$S_g(\psi, N, s) = \prod_{q:\mathrm{prime}} S_g^q(\psi, N, s),$$

$$S_g^q(\psi, N, s) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{T \in \mathrm{Sym}^g(\mathbb{Q})_q \bmod 1} \psi(\delta(T))\,\delta(T)^{-s}\mathbf{e}(TN) & q \nmid l \text{ のとき}, \\ \displaystyle\sum_{T \in \mathrm{Sym}^g(\mathbb{Q})'_q \bmod 1} \psi(\nu(T))\,\delta(T)^{-s}\mathbf{e}(TN) & q \mid l \text{ のとき} \end{cases}$$

が成り立つ. $q \mid l$ のときの $S_g^q(\psi, N, s)$ を**分岐 Siegel 級数** (*ramified Siegel series*) と呼ぶ. これの計算が本稿の主題である.

注意. 通常の (指標付でない) Siegel 級数は

$$S_g^q(N, s) = \sum_{T \in \mathrm{Sym}^g(\mathbb{Q})_q \bmod 1} \delta(T)^{-s}\mathbf{e}(TN),$$

と定義され, 一般次数に対する明示公式は [Ka] で初めて与えられた. さて, 基本的事実として, ある有理式 $P(X) \in \mathbb{Q}(X)$ が存在して, $S_g^q(N, s) = P(q^{-s})$ となる. このとき, $q \nmid l$ に対しては

$$S_g^q(\psi, N, s) = P(\psi(q)q^{-s})$$

となることが示される. すなわち, $q \nmid l$ に対しての計算は [Ka] に帰着される.

分岐 Siegel 級数の計算のため, 新たに記号をいくつか準備する. 以下 p を l を割る素数とし, $e = \mathrm{ord}_p\, l$ とする. このとき

$$S_g^p(N, \psi, s) = \sum_{T \in \mathrm{Sym}^g(\mathbb{Q}_p)' \bmod \mathbb{Z}_p} \psi(\nu(T))\,\delta(T)^{-s}\mathbf{e}_p(TN)$$

と表される．記号が $\mathbb{Z}$ 上のものと $\mathbb{Z}_p$ 上のものとで濫用されているが，それは自然に解釈できる．すなわち $\mathcal{M}_g^g(\mathbb{Z}_p) = \{(C,D) \in M_g(\mathbb{Z}_p) \,|\, (C,D)$ は symmetric co-prime$\}$ とすると，$GL_g(\mathbb{Z}_p)\backslash\mathcal{M}_g^g(\mathbb{Z}_p) \simeq \mathrm{Sym}^g(\mathbb{Q}_p)$ であり，$T = C^{-1}D \in \mathrm{Sym}^g(\mathbb{Q}_p)$ に対し，$\delta(T) = p^{\mathrm{ord}_p(\det C)}$，$\nu(T) = \delta(T)\det(T)$ と定める．$\mathrm{Sym}^g(\mathbb{Q}_p)' = \{C^{-1}D \,|\, (C,D) \in M_g^g(\mathbb{Z}_p),\ C \equiv 0 \bmod p^e\}$ であり，l を法とする Dirichlet 指標 ψ は，自然な全射 $\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}/p^e$ を通じて $\mathbb{Z}_p$ 上の指標に拡張される．$\mathbf{e}_p$ は

$$\varphi : \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \simeq \bigcup_{n\geq 0} \frac{1}{p^n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$$

を通じて，$X \in \mathrm{Sym}^g(\mathbb{Q}_p)$ に対して $\mathbf{e}_p(X) = \exp(2\pi i\varphi(\mathrm{Tr}(X)))$ と定義される．

$$\mathcal{M}_g(p^e) = \{(C,D) \in \mathcal{M}_g^g(\mathbb{Z}_p) \,|\, C \equiv 0 \bmod p^e,\ \det C = p^i\ (i \geq 0)\}$$

とおく．すると

$$SL_g(\mathbb{Z})\backslash\mathcal{M}_g(p^e) \to \mathrm{Sym}^g(\mathbb{Q}_p)', \quad (C,D) \mapsto C^{-1}D$$

は全単射となる．これを利用し，$T = C^{-1}D$ と書き直して計算を進めていきたいのだが，(C,D) が co-prime であるという条件が扱いにくい．そこで条件を緩めて，

$$\widetilde{\mathcal{M}}_g(p^e) = \{(C,D) \,|\, (C,D)\ \text{は symmetric},\ C \equiv 0 \bmod p^e,\ \det C = p^i\ (i \geq 0)\}$$

と定める．

補題 2.2. $(C,D) \in M_g^g(\mathbb{Z}_p)$ を symmetric な組とし，$\det C \neq 0$ とする．すると $M \in M_g(\mathbb{Z}_p)$ が存在して，

$$C = MC', \quad D = MD', \quad (C',D') \in \mathcal{M}_g^g(\mathbb{Z}_p)$$

が成り立つ．

この補題より，

$$S_g^p(\psi, N, s) = \sum_{\substack{(C,D)\in SL_g(\mathbb{Z}_p)\backslash\widetilde{\mathcal{M}}_g(p^e) \\ D \bmod C}} \psi(\det D)(\det C)^{-s}\mathbf{e}_p(C^{-1}DN) \tag{2.1}$$

が成り立つことが分かる．なぜなら，$(C,D) \in \widetilde{\mathcal{M}}_g(p) \smallsetminus \mathcal{M}_g(p)$ に対しては，$C = MC'$，$D = MD'$ と書けるが，$\det C$ が p べきより，$\det M$ は p で割れる ($\det M = 1$ となるのは (C,D) が co-prime のときに限る)．よって $\det D \equiv 0 \bmod p$ だから，$\psi(\det D) = 0$ となり，このような (C,D) に関する寄与は 0 である．

なお，和に現れる $D \bmod C$ とは，各 C に対して $D_1 \equiv D_2 \bmod C$ を $D_1 - D_2 \in CM_g(\mathbb{Z})$ で定義したときの同値類を D が走るという意味である．

以上により分岐 Siegel 級数は $\mathbb{Z}_p$ 上定義されたものと見なせるが，これには次の利点がある．$U \in GL_g(\mathbb{Z}_p)$ に対し，$N[U] := {}^tUNU$ とおくと，

$$S_g^p(\psi, N[U], s) = \psi(\det U)^{-2}S_g^p(\psi, N, s)$$

となることが容易にわかる．よって特に p が奇素数であれば，$N = \mathrm{diag}(n_1, \ldots, n_g)$ の場合に計算が帰着できるのである．

3 次数 3 の分岐 Siegel 級数の計算

以下, $g=3$, $l=p$ を奇素数とし, ψ は p を法とする原始的な指標とする. 特に $\psi=\chi_p$ の場合が重要である. 本稿の目標は, $S_3^p(\psi,N,s)$ の明示公式を与えることである.

既に述べたとおり N として対角行列をとればよいので,

$$N=p^m\begin{pmatrix}\alpha & & \\ & \beta p^r & \\ & & \gamma p^{r+t}\end{pmatrix}, \quad (p,\alpha\beta\gamma)=1 \tag{3.1}$$

と仮定してよい.

$\Lambda=SL_3(\mathbb{Z}_p)$ とし, $\gamma\in GL_3(\mathbb{Q}_p)$ に対して $\Lambda^\gamma=\gamma^{-1}\Lambda\gamma$ と定める.

$$\tau_{ijk}=\begin{pmatrix}p^i & & \\ & p^{i+j} & \\ & & p^{i+j+k}\end{pmatrix}$$

とすると, $(C,D)\in\widetilde{\mathcal{M}}_g^g(p)$ に対し, $C\in\Lambda\tau_{ijk}\Lambda$ となる i,j,k $(i\geq 1,\ j,k\geq 0)$ がとれる. C は $\Lambda\backslash\Lambda\tau_{ijk}\Lambda$ を走るが, 全単射

$$\Lambda\backslash\Lambda\tau_{ijk}\Lambda\simeq\Lambda\cap\Lambda^{\tau_{ijk}}\backslash\Lambda, \quad \tau_{ijk}Y\mapsto Y$$

がある. この右辺 $\Lambda\cap\Lambda^{\tau_{ijk}}\backslash\Lambda$ を Ξ_{ijk} とおく. $C=\tau_{ijk}Y$ $(Y\in\Xi_{ijk})$ に対して, $D=\widetilde{D}\,{}^tY^{-1}$ と書くと,

$$(C,D) \text{ が symmetric} \iff \tau_{ijk}^{-1}\widetilde{D} \text{ が対称行列}$$

となる.

$$\mathbf{e}_p(C^{-1}DN)=\mathbf{e}_p(Y^{-1}\tau_{ijk}^{-1}\widetilde{D}{}^tY^{-1}N)=\mathbf{e}_p(\tau_{ijk}^{-1}\widetilde{D}\,N[Y^{-1}])$$

であるから, 結局 (2.1) 式は

$$S_3^p(\psi,N,s)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j,k=0}^{\infty}p^{-(3i+2j+k)s}\sum_{Y\in\Xi_{ijk}}\sum_{\widetilde{D}\bmod\tau_{ijk}}\psi(\det\widetilde{D})\,\mathbf{e}_p(\tau_{ijk}^{-1}\widetilde{D}\,N[Y^{-1}]) \tag{3.2}$$

と書ける.

Ξ_{ijk} を記述するために, 対称群 (GL_3 の Weyl 群) の記号を用意する. $\mathfrak{S}_3$ を 3 次対称群とし, $\sigma\in\mathfrak{S}_3$ に対応する $O(3)$ の元 $(s_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}$ を

$$s_{ij}=\begin{cases}1 & i=\sigma(j) \text{ のとき}\\ 0 & \text{その他のとき}\end{cases}$$

で定める. 記号の節約のため, この行列も再び σ で表すことにする. このとき

$$\sigma^{-1}\operatorname{diag}(a_1,a_2,a_3)\sigma=\operatorname{diag}(a_{\sigma(1)},a_{\sigma(2)},a_{\sigma(3)})$$

となる. $\mathfrak{S}_3$ の元を

$$\sigma_1=\mathrm{id},\ \sigma_2=(2,3),\ \sigma_3=(1,2),\ \sigma_4=(1,2,3),\ \sigma_5=(1,3,2),\ \sigma_6=(1,3)$$

と表す.

(3.2) 式において, Ξ_{ijk} の元は Y^{-1} の形で現れるため, 予め $\Xi_{ijk}^{-1}=\{Y^{-1}\,|\,Y\in\Xi_{ijk}\}$ とおく. Ξ_{ijk} の具体的な形は以下の通りである.

補題 3.1. Ξ_{ijk}^{-1} の代表系として次のものがとれる.

(1) $j=k=0$ のとき, $\Xi_{i00}^{-1}=\{1_3\}$.

(2) $j\geq 1$ かつ $k=0$ のとき, $\Xi_{ij0}^{-1}=\coprod_{l=1}^{3}\mathcal{I}_l$,

$$\mathcal{I}_1=\left\{\begin{pmatrix}1&u&v\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\middle|\ u,v\in\mathbb{Z}/p^j\right\},\quad \mathcal{I}_2=\left\{\sigma_3\begin{pmatrix}1&pu&v\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\middle|\ \begin{matrix}u\in\mathbb{Z}/p^{j-1}\\v\in\mathbb{Z}/p^j\end{matrix}\right\},$$
$$\mathcal{I}_3=\left\{\sigma_5\begin{pmatrix}1&pu&pv\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\middle|\ u,v\in\mathbb{Z}/p^{j-1}\right\}.$$

(3) $j=0$ かつ $k\geq 1$ のとき, $\Xi_{i0k}^{-1}=\coprod_{l=1}^{3}\mathcal{J}_l$,

$$\mathcal{J}_1=\left\{\begin{pmatrix}1&0&u\\0&1&v\\0&0&1\end{pmatrix}\middle|\ u,v\in\mathbb{Z}/p^k\right\},\quad \mathcal{J}_2=\left\{\sigma_2\begin{pmatrix}1&0&u\\0&1&pv\\0&0&-1\end{pmatrix}\middle|\ \begin{matrix}u\in\mathbb{Z}/p^{k}\\v\in\mathbb{Z}/p^{k-1}\end{matrix}\right\},$$
$$\mathcal{J}_3=\left\{\sigma_4\begin{pmatrix}1&0&pu\\0&1&pv\\0&0&1\end{pmatrix}\middle|\ u,v\in\mathbb{Z}/p^{k-1}\right\}.$$

(4) $j,k\geq 1$ のとき, $\Xi_{ijk}^{-1}=\coprod_{l=1}^{6}\mathcal{K}_l$,

$$\mathcal{K}_1=\left\{\begin{pmatrix}1&u&w\\0&1&v\\0&0&1\end{pmatrix}\middle|\ \begin{matrix}u\in\mathbb{Z}/p^j\\v\in\mathbb{Z}/p^k\\w\in\mathbb{Z}/p^{j+k}\end{matrix}\right\},\quad \mathcal{K}_2=\left\{\sigma_2\begin{pmatrix}1&u&w\\0&1&pv\\0&0&-1\end{pmatrix}\middle|\ \begin{matrix}u\in\mathbb{Z}/p^j\\v\in\mathbb{Z}/p^{k-1}\\w\in\mathbb{Z}/p^{j+k}\end{matrix}\right\},$$
$$\mathcal{K}_3=\left\{\sigma_3\begin{pmatrix}1&pu&w\\0&1&v\\0&0&-1\end{pmatrix}\middle|\ \begin{matrix}u\in\mathbb{Z}/p^{j-1}\\v\in\mathbb{Z}/p^k\\w\in\mathbb{Z}/p^{j+k}\end{matrix}\right\},$$
$$\mathcal{K}_4=\left\{\sigma_4\begin{pmatrix}1&u&pw\\0&1&pv\\0&0&1\end{pmatrix}\middle|\ \begin{matrix}u\in\mathbb{Z}/p^j\\v\in\mathbb{Z}/p^{k-1}\\w\in\mathbb{Z}/p^{j+k-1}\end{matrix}\right\},$$
$$\mathcal{K}_5=\left\{\sigma_5\begin{pmatrix}1&pu&pw\\0&1&v\\0&0&1\end{pmatrix}\middle|\ \begin{matrix}u\in\mathbb{Z}/p^{j-1}\\v\in\mathbb{Z}/p^k\\w\in\mathbb{Z}/p^{j+k-1}\end{matrix}\right\},$$
$$\mathcal{K}_6=\left\{\sigma_6\begin{pmatrix}1&pu&pw\\0&1&pv\\0&0&-1\end{pmatrix}\middle|\ \begin{matrix}u\in\mathbb{Z}/p^{j-1}\\v\in\mathbb{Z}/p^{k-1}\\w\in\mathbb{Z}/p^{j+k-1}\end{matrix}\right\}.$$

上で定めた各代表元ごとに和をとったものを, $S(1_3)$, $S(\mathcal{I}_l),\ldots$ などと表す. すなわち

$$S(1_3)=\sum_{i=1}^{\infty}p^{-3is}\sum_{D\in\mathrm{Sym}^3(\mathbb{Z}/p^i)}\psi(\det D)\mathbf{e}_p(\frac{1}{p^i}DN),$$

$$S(\mathcal{I}_l) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p^{-(3i+2j)s} \sum_{Y\in\mathcal{I}_l} \sum_{\widetilde{D} \bmod \tau_{ij0}} \psi(\det\widetilde{D})\mathbf{e}_p(\tau_{ij0}^{-1}\widetilde{D}N[Y]),$$

$$S(\mathcal{J}_l) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} p^{-(3i+k)s} \sum_{Y\in\mathcal{J}_l} \sum_{\widetilde{D} \bmod \tau_{i0k}} \psi(\det\widetilde{D})\mathbf{e}_p(\tau_{i0k}^{-1}\widetilde{D}N[Y]),$$

$$S(\mathcal{K}_l) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} p^{-(3i+2j+k)s} \sum_{Y\in\mathcal{K}_l} \sum_{\widetilde{D} \bmod \tau_{ijk}} \psi(\det\widetilde{D})\mathbf{e}_p(\tau_{ijk}^{-1}\widetilde{D}N[Y])$$

とおく. これより

$$S_3^p(\psi, N, s) = S(1_3) + \sum_{l=1}^{3} S(\mathcal{I}_l) + \sum_{l=1}^{3} S(\mathcal{J}_l) + \sum_{l=1}^{6} S(\mathcal{K}_l)$$

である. 以下, これを計算していこう.

3.1 $S(1_3)$ の計算

これには次の結果を使う.

定理 3.2 (H. Saito [Sa, Theorem 1.3, Theorem 2.3])**.** p を素数とし, $N \in \mathrm{Sym}^g(\mathbb{F}_p)$ と p を法とする Dirichlet 指標 ψ に対して

$$W_g^g(N, \psi) = \sum_{T\in \mathrm{Sym}^g(\mathbb{F}_p)} \psi(\det T)\mathbf{e}(\frac{1}{p}ST)$$

と定める. このとき $W_g^g(N, \psi)$ の明示公式がある.

明示式の具体形は場合分けも含めて煩雑なので, ここでは述べない. この公式は $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p$ 上の話であるが, 次のようにして我々の場合に適用できる. なお一般の次数 g で同様にできるため, その形で書くことにする.

まず $N \in \mathrm{Sym}^g(\mathbb{Z})^*$ に対して, $N = p^m N'$, $N' \not\equiv 0 \bmod p$ とおく. すると

$$S(1_g) = \sum_{i=1}^{\infty} p^{-igs} \sum_{T\in \mathrm{Sym}^g(\mathbb{Z}/p^i)} \psi(\det T)\mathbf{e}\left(\frac{1}{p^{i-m}}TN'\right)$$

である. $T = T_1 + pT_2$ ($T_1 \in \mathrm{Sym}^g(\mathbb{F}_p)$, $T_2 = \mathrm{Sym}^g(\mathbb{Z}/p^{i-1})$) と分解すると

$$S(1_g) = \sum_{i=1}^{\infty} p^{-igs} \sum_{T_1\in \mathrm{Sym}^g(\mathbb{F}_p)} \psi(\det T_1)\mathbf{e}\left(\frac{1}{p^{i-m}}T_1N'\right) \sum_{T_2\in \mathrm{Sym}^g(\mathbb{Z}/p^{i-1})} \mathbf{e}\left(\frac{1}{p^{i-m-1}}T_2N'\right)$$

となる. T_2 に関する和は $i-m-1>0$ で消えるので, $i \leq m+1$ としてよい. すると $i \leq m$ では $\mathbf{e}\left(\frac{1}{p^{i-m}}T_1N'\right) = 1$ であるから,

$$S(1_g) = \sum_{i=1}^{m+1} p^{-igs+g(g+1)(i-1)/2} \sum_{T_1\in \mathrm{Sym}^g(\mathbb{F}_p)} \psi(\det T_1)\mathbf{e}\left(\frac{1}{p^{i-m}}T_1N'\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} p^{-igs+g(g+1)(i-1)/2} \sum_{T_1 \in \mathrm{Sym}^2(\mathbb{F}_p)} \psi(\det T_1)$$
$$+ p^{-(m+1)gs+g(g+1)m/2} \sum_{T_1 \in \mathrm{Sym}^g(\mathbb{F}_p)} \psi(\det T_1) \mathbf{e}\left(\frac{1}{p} T_1 N'\right)$$

となる. 2 行目の最後の和が $W_g^g(N', \psi)$ に他ならない. なお 1 行目の和 $\sum \psi(\det T_1)$ は, 定理 3.2 で $N = 0$ としたものと見なしてもよいし, 有限体上の直交群の位数からも容易に計算できる.

我々の $g = 3$ の場合は次のようになる. 以下, Dirichlet 指標 ψ に対して, $G(\psi)$ で Gauss 和を表す.

命題 3.3. p を奇素数, ψ を p を法とする原始的な指標とする.

(1) $\psi \neq \chi_p$ のとき,

$$S(1_3) = \begin{cases} p^{(6-3s)m-3s} \overline{\psi}(\alpha\beta\gamma) G(\chi_p)^3 G(\psi) G(\psi\chi_p) & r = t = 0 \\ 0 & \text{その他の場合} \end{cases}$$

となる.

(2) $\psi = \chi_p$ のとき,

$$S(1_3) = \begin{cases} -\chi_p(\alpha\beta\gamma)\varepsilon_p p^{(6-3s)m+5/2-3s} & r = t = 0 \\ 0 & r = 0,\ t > 0 \\ \chi_p(-\alpha)(p-1)p^{(6-3s)m+3-3s} & r \neq 0 \end{cases}$$

となる. ただし, 奇素数 p に対して,

$$\varepsilon_p = \begin{cases} 1 & p \equiv 1 \bmod 4 \\ \sqrt{-1} & p \equiv 3 \bmod 4 \end{cases}$$

とおいた.

3.2 その他の項の寄与の計算

残りの $S(\mathcal{I}_l)$ $(1 \leq l \leq 3)$, $S(\mathcal{J}_l)$ $(1 \leq l \leq 3)$, $S(\mathcal{K}_l)$ $(1 \leq l \leq 6)$ については, 次が成り立つ.

補題 3.4. $l \geq 2$ に対して

$$S(\mathcal{I}_l) = S(\mathcal{K}_l) = 0$$

である.

注意. 講演中には $S(\mathcal{J}_2) = S(\mathcal{J}_3) = 0$ と話してしまったが, これは筆者の勘違いであり, $S(\mathcal{J}_l)$ の計算はもう少し複雑である.

この補題より計算がかなり簡略化されるように見えるが, この補題は計算の結果として 0 になったという意味であり, 実際にはすべての項に対して計算を実行している.

例えば $S(\mathcal{I}_1)$ を考える. このとき $\widetilde{D} = \begin{pmatrix} a & {}^t\mathbf{b} \\ p^j\mathbf{b} & S \end{pmatrix}$ の形となり, $\psi(\det \widetilde{D}) = \psi(a)\psi(\det S)$ と, 3 次の行列式が 1 次と 2 次の積に分解するので, この点の計算は容易になる. N を (3.1) の形としたとき, $\widetilde{N} = \begin{pmatrix} \beta & \\ & p^t\gamma \end{pmatrix}$ (すなわち $N = p^m \begin{pmatrix} \alpha & \\ & p^r\widetilde{N} \end{pmatrix}$) とおくと,

$$\begin{aligned} S(\mathcal{I}_1) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p^{-(3i+2j)s} \sum_{a\in\mathbb{Z}/p^i}\ \sum_{\mathbf{b}\in(\mathbb{Z}/p^i)^2}\ \sum_{S\in\mathrm{Sym}^2(\mathbb{Z}/p^{i+j})}\ \sum_{\mathbf{u}\in(\mathbb{Z}/p^j)^2} \\ \times \psi(a)\psi(\det S)\mathbf{e}\left(\frac{\alpha a}{p^{i-m}}\right)\mathbf{e}\left(\frac{2\alpha {}^t\mathbf{u}\mathbf{b}}{p^{i-m}}\right)\mathbf{e}\left(\frac{\alpha {}^t\mathbf{u}S\mathbf{u}}{p^{i-m+j}}\right)\mathbf{e}\left(\frac{1}{p^{i+j-m-r}}\widetilde{N}S\right) \end{aligned}$$

となる. これは定理 3.2 および, Gauss 和の公式を用いて計算できる.

最後に $\psi = \chi_p$ のときの計算結果をまとめておく.

命題 3.5. $\psi = \chi_p$ に対し, $S(\mathcal{I}_1)$ は次で与えられる.

(1) $r = 0$ のとき $S(\mathcal{I}_1) = 0$.

(2) $r \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} S(\mathcal{I}_1) &= \chi_p(-\alpha)(p-1)\varepsilon_p p^{-(3m+3)s+6m+5/2}\left(\sum_{\substack{j=1\\ j:\mathrm{odd}}}^{r} p^{(4-2s)j} + p\sum_{\substack{j=1\\ j:\mathrm{even}}}^{r} p^{(4-2s)j}\right) \\ &\quad + \chi_p(-\alpha)p^{(6-3s)m+(4-2s)r+3/2-3s} \times \begin{cases} -p & r\text{: odd},\ \ t=0 \\ p(p-1) & r\text{: odd},\ \ t>0 \\ -\chi_p(-\beta\gamma)p & r\text{: even},\ \ t=0 \\ 0 & r\text{: even},\ \ t>0. \end{cases} \end{aligned}$$

命題 3.6. $\psi = \chi_p$ に対し, $S(\mathcal{J}_1)$ は次で与えられる.

(1) $r = 0$ のとき

$$\begin{aligned} S(\mathcal{J}_1) &= \chi_p(-\gamma)\chi_p(-\alpha\beta)^{t+1}\varepsilon_p(p-1)p^{(3-s)m+(5/2-s)r+(2-s)t-1/2-s}\sum_{i=1}^{m} p^{(3-2s)i} \\ &\quad - \chi_p(-\gamma)\chi_p(-\alpha\beta)^{t+1}\varepsilon_p p^{(6-3s)m+(2-s)t+5/2-3s}, \end{aligned}$$

ただし 2 行目は $t > 0$ のときのみ生じる項である.

(2) $r \geq 2$ が偶数のとき

$$\begin{aligned} S(\mathcal{J}_1) &= \chi_p(-\alpha)\varepsilon_p(p-1)^2 p^{(1-s)m-1/2-s}\left\{\sum_{i=1}^{m+1} p^{(3-2s)i}\sum_{\substack{k=1\\ k:\mathrm{even}}}^{r-1} p^{(5/2-s)k} - \sum_{i=1}^{m} p^{(3-2s)i}\right\} \\ &\quad + \chi_p(-\gamma)\chi_p(-\alpha\beta)^{t+1}\varepsilon_p(p-1)p^{(3-s)m+(5/2-s)r+(2-s)t-1/2-s}\sum_{i=1}^{m+1} p^{(3-2s)i}. \end{aligned}$$

(3) r が奇数のとき

$$S(\mathcal{J}_1)=\chi_p(-\alpha)\varepsilon_p(p-1)^2p^{(1-s)m-1/2-s}\left\{\sum_{i=1}^{m+1}p^{(3-2s)i}\sum_{\substack{k=1\\k:\mathrm{even}}}^{r-1}p^{(5/2-s)k}-\sum_{i=1}^{m}p^{(3-2s)i}\right\}$$
$$+\varepsilon_p\chi_p(-\alpha)(p-1)^2p^{(3-s)m+(5/2-s)r-3}\sum_{i=1}^{m+1}p^{(3-2s)i}\sum_{k=1}^{t}(\chi_p(\alpha\beta)p^{2-s})^k$$
$$-\varepsilon_p\chi_p(-\beta)\chi_p(\alpha\beta)^t(p-1)p^{(3-s)m+(5/2-s)r+(2-s)t-1-s}\sum_{i=1}^{m+1}p^{(3-2s)i}.$$

命題 3.7. $\psi=\chi_p$ に対し，$S(\mathcal{J}_2)$ および $S(\mathcal{J}_3)$ は以下のとおりである.

(1) $r=0$ のとき $S(\mathcal{J}_2)=0$ であり, $r\geq 1$ に対しては

$$S(\mathcal{J}_2)=\chi_p(-\alpha)\varepsilon_p(p-1)^2p^{(3-2s)m-3/2-3s}\left\{\sum_{i=1}^{m+1}p^{(3-2s)i}\sum_{\substack{k=1\\k:\mathrm{even}}}^{r-1}p^{(5/2-s)k}-\sum_{i=1}^{m}p^{(3-2s)i}\right\}$$
$$+\begin{cases}\chi_p(-\beta)\varepsilon_p(p-1)p^{(3-s)m+(5/2-s)r-1-s}\displaystyle\sum_{i=1}^{m+1}p^{(3-2s)i} & r\text{: odd}\\ -\chi_p(-\alpha)\varepsilon_p(p-1)p^{(3-s)m+(5/2-s)r-3/2-s}\displaystyle\sum_{i=1}^{m+1}p^{(3-2s)i} & r\geq 2\text{: even}\end{cases}$$

となる.

(2) $S(\mathcal{J}_3)$ に対しては

$$S(\mathcal{J}_3)=\chi_p(-\alpha)\varepsilon_p(p-1)p^{(3-s)m-2-s}\sum_{i=1}^{m}p^{(3-2s)i}$$

が成り立つ.

命題 3.8. $\psi=\chi_p$ に対し，$S(\mathcal{K}_1)$ は次の通りである.

(1) $r=0$ ならば $S(\mathcal{K}_1)=0$ である。

(2) $r\geq 2$ が偶数のとき,

$$S(\mathcal{K}_1)=\chi_p(-\alpha)\varepsilon_p(p-1)^2p^{(6-3s)m+3/2-3s}\sum_{\substack{j=2\\\mathrm{even}}}^{r-1}p^{(4-2s)j}\sum_{\substack{k=2\\\mathrm{even}}}^{r-1-j}p^{(5/2-s)k}$$
$$+\chi_p(-\gamma)\chi_p(-\alpha\beta)^{t+1}\varepsilon_pp^{(6-3s)m+(2-s)t+5/2-3s}$$
$$\times\left\{(p-1)\sum_{\substack{j=2\\j:\mathrm{even}}}^{r-1}p^{(3/2-s)j}-p^{(4-2s)r}\right\}$$

である. ただし，最後の $-p^{(4-2s)r}$ の項は，$t\geq 1$ のときのみ生じる項である.

(3) r が奇数のとき,

$$
\begin{aligned}
S(\mathcal{K}_1) = \chi_p(-\alpha)\varepsilon_p(p-1)^2 p^{(6-3s)m+3/2-3s} &\sum_{\substack{j=2\\ \text{even}}}^{r-1} p^{(4-2s)j} \sum_{\substack{k=2\\ \text{even}}}^{r-1-j} p^{(5/2-s)k} \\
&+ \chi_p(-\beta)\varepsilon_p(p-1)p^{(6-3s)m+(5/2-s)r+2-3s} \sum_{\substack{j=2\\ j:\text{even}}}^{r-1} p^{(3/2-s)j} \\
&\qquad \times \left\{ (p-1)\sum_{k=0}^{t-1}\left(\chi_p(\alpha\beta)p^{2-s}\right)^k - \left(\chi_p(\alpha\beta)p^{2-s}\right)^t \right\} \\
&+ \chi_p(-\alpha)\varepsilon_p p^{(6-3s)m+(4-2s)r+5/2-3s} \\
&\qquad \times \left\{ (p-1)\sum_{k=1}^{t-1}\left(\chi_p(\alpha\beta)p^{2-s}\right)^k - \left(\chi_p(\alpha\beta)p^{2-s}\right)^t \right\}
\end{aligned}
$$

である.

注意. $\psi = \chi_p$ のときの計算結果は, 2 次指標でない ψ に比べて著しく煩雑である. これは計算の途中で, 2 次の Gauss 和の計算から出てくる 2 次指標が, もともとの指標と打ち消しあい, 自明指標が出てきてしまうことが原因である.

参考文献

[Di] M. J. Dickson, Fourier coefficients of degree two Siegel-Eisenstein series with trivial character at squarefree level, Ramanujan J. **37** (2015), no. 3, 541–562.

[Gu] K. Gunji, On the Siegel Eisenstein series of degree two for low weights, J. Math. Soc. Japan **67** (2015), no. 3, 1043–1067.

[Ka] H. Katsurada, An explicit formula for Siegel series, Amer. J. Math. **121** (1999), 415–452.

[Mi] Y. Mizuno, An explicit arithmetic formula for the Fourier coefficients of Siegel-Eisenstein series of degree two and square-free odd levels, Math. Z. **263** (2009), no. 4, 837–860.

[Sa] H. Saito, A generalization of Gauss sums and its applications to Siegel modular forms and L-functions associated with the vector space of quadratic forms, J. Reine Angew. Math. **416** (1991), 91–142.

[Ta1] S. Takemori, p-adic Siegel Eisenstein series of degree two, J. Number Theory **132** (2012), 1203–1264.

[Ta2] S. Takemori, Siegel Eisenstein series of degree n and Λ-adic Eisenstein series, J. Number Theory **149** (2015), 105–138.